УДК 517.54

КВАДРАТИЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ В ЗАДАЧАХ О ПРОИЗВЕДЕНИИ ВНУТРЕННИХ РАДИУСОВ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ*

А. К. Бахтин, В. Е. Вьюн

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3

We study applications of the theory of quadratic differentials to a solution of extremal problems on non-overlapping domains with free poles on rays, and generalize known results to a certain class of open sets.

Роботу присвячено застосуванню теорії квадратичних диференціалів до розв'язання нових екстремальних задач про неперетинні області з вільними полюсами на променях та узагальненню раніше відомих результатів на деякий клас відкритих множин.

Работа посвящена решению новых экстремальных задач о неналегающих областях со свободными полюсами на лучах и их обобщению на некоторые классы открытых множеств. Возникновение данного направления геометрической теории функций комплексной переменной связано с классической работой М. А. Лаврентьева [1], в которой была решена задача о произведении конформных радиусов двух взаимно непересекающихся областей. Эта задача вызвала интерес многих математиков. В настоящее время результаты и методы, связанные с задачами такого рода, представляют известное направление геометрической теории функций комплексной переменной (см., например, [2–7]). Фундаментальная роль квадратичных дифференциалов как универсального способа для решения экстремальных задач геометрической теории функций была впервые отмечена О. Тейхмюллером [8]. Он сформулировал принцип, по которому решение каждой такой экстремальной задачи связано с некоторым квадратичным дифференциалом. Этот принцип нашел свое выражение в виде так называемой „общей теоремы о коэффициентах", сформулированной и доказанной позднее Дж. Дженкинсом [9]. Метод квадратичных дифференциалов и его применения получили значительное развитие в работах П. М. Тамразова [10], им также получены существенные дополнения к указанной выше теореме Дж. Дженкинса.

Сформулируем основные результаты работы. Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}$ — множества соответственно натуральных и вещественных чисел, $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, а $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ — ее одноточечная компактификация. Обозначим через $r(B, a)$ внутренний радиус области $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ относительно точки $a \in B$ (см., например, [2, 9, 11]), а через $\operatorname{cap} E$ — логарифмическую емкость множества E (см., например, [2, 11]), $\chi(t) := \dfrac{1}{2}(t + t^{-1})$.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. В плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим (n, m)-лучевую систему точек $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$, такую, что $0 < |a_{k,1}| < |a_{k,2}| < \ldots < |a_{k,m}| < \infty$, $\arg a_{k,1} = \arg a_{k,2} = \ldots = \arg a_{k,m} := \theta_k$, $0 = \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_n < \theta_{n+1} = 2\pi$. Для каждой (n, m)-

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0107U002027.

лучевой системы точек определим набор величин $\alpha_k := \dfrac{1}{\pi}(\theta_{k+1} - \theta_k)$ при $k = \overline{1, n}$ ($\alpha_{n+1} := := \alpha_1$, $\alpha_0 := \alpha_n$). (n, m)-Лучевую систему точек $A_{n,m}$ будем называть равнолучевой, если при каждом $k = \overline{1, n}$ $\alpha_k = \dfrac{2}{n}$. Определим набор областей $\Lambda_k := \{w \in \mathbb{C} : \theta_k < \arg w < < \theta_{k+1}\}$ для всех $k = \overline{1, n}$.

Для произвольной (n, m)-равнолучевой системы точек $A_{n,m}$ такой, что $m = 2s - 1$, $s \in \mathbb{N}$, рассмотрим „управляющие" функционалы

$$M^{(1)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{s} \chi\left(|a_{k,2p-1}|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,2p-1}|, \quad M^{(2)}(A_{n,m}) := \prod_{k=1}^{n} \prod_{p=1}^{s-1} \chi\left(|a_{k,2p}|^{\frac{n}{2}}\right) |a_{k,2p}|.$$

Пусть $\zeta_k(w)$ — однозначная ветвь функции $\zeta(w) = -i\left(e^{-i\theta_k} w\right)^{\frac{1}{\alpha_k}}$, которая реализует однолистное конформное отображение области Λ_k на полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Тогда функция $\eta_k(w) := \dfrac{1 - \zeta_k(w)}{1 + \zeta_k(w)}$ однолистно и конформно отображает Λ_k на единичный круг, причем $\eta_k(a_{k,p}) =: \gamma^{(1)}_{k,p}$, $\eta_k(a_{k+1,p}) =: \gamma^{(2)}_{k,p}$, $\gamma^{(2)}_{0,p} := \gamma^{(2)}_{n,p}$, $\eta_k(0) = 1$, $\eta_k(\infty) = -1$, $k = \overline{1, n}$, $p = \overline{1, m}$.

Рассмотрим открытое множество $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ такое, что $A_{n,m} \cup \{0, \infty\} \subset D$. Связную компоненту множества $D \bigcap \overline{\Lambda}_k$, содержащую точку a, будем обозначать $D_k(a)$. Будем говорить, что множество D удовлетворяет обобщенному условию неналегания относительно системы точек $A_{n,m} \cup \{0, \infty\}$, если при каждом $k = \overline{1, n}$ для всех различных точек $a_{l,p}$ и $a_{t,x}$, принадлежащих $\overline{\Lambda}_k$, имеет место $D_k(a_{l,p}) \cap D_k(a_{t,x}) = \varnothing$ и

$$\left[D_k(0) \cap D_k(\infty)\right] \cup \left[D_k(0) \cap D_k(a_{l,p})\right] \cup \left[D_k(a_{t,x}) \cap D_k(\infty)\right] = \varnothing.$$

На множестве пар целочисленных индексов определим равенство $(k, p) = (q, s) \Leftrightarrow k = q$ и $p = s$.

Используемые в дальнейшем определения внутреннего радиуса $r(B, a)$ области B относительно содержащейся в ней точки a, квадратичного дифференциала, обобщенной функции Грина $g_B(z, w)$ области B, конденсатора и связанные с ним понятия его емкости и модуля содержатся, например, в [2, 3, 9, 11]. Если B — открытое (не обязательно связное) множество, $a \in B$, то $B(a)$ — связная компонента множества B, содержащая точку a. Положим $r(B, a) := r(B(a), a)$,

$$g_B(w, a) := \begin{cases} g_{B(a)}(w, a), \quad w \in B(a), \\[2ex] \overline{\lim\limits_{\zeta \to w}} g_{B(a)}(\zeta, a), \quad w \in \partial B(a), \quad \zeta \in B(a), \\[2ex] 0, \quad w \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{B(a)}. \end{cases}$$

Далее в работе будем рассматривать только равнолучевые системы точек. Пусть α, $\beta \in \mathbb{R}^+$ и точки 1, i, -1, $-i$ и области G_1, G_2, G_3, G_4 являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала

$$Q(w)dw^2 = \frac{(\beta - \alpha)w^4 - 2(\beta + \alpha)w^2 + (\beta - \alpha)}{(w^4 - 1)^2}\, dw^2. \tag{1}$$

Во введенных выше обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $n, s \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $m = 2s-1$, α, $\beta \in \mathbb{R}^+$. *Тогда для любой* (n,m)-*равнолучевой системы точек* $A_{n,m} = \{a_{k,p}\}$ *и для произвольного открытого множества* D *такого, что* $A_{n,m} \cup \{0,\infty\} \subset D$, *удовлетворяющего обобщенному условию неналегания относительно системы точек* $A_{n,m} \cup \{0,\infty\}$, *выполняется неравенство*

$$[r(D,0)r(D,\infty)]^{\frac{n^2\alpha}{4}} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s} r^{\beta}(D,a_{k,2p-1}) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} r^{\alpha}(D,a_{k,2p}) \leq$$

$$\leq \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha} \left(\frac{2}{n(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{2}n(\alpha+\beta)} \left[M^{(1)}(A_{n,m})\right]^{\beta} \left[M^{(2)}(A_{n,m})\right]^{\alpha} \times$$

$$\times \left[r^{\alpha}(G_1,1)r^{\beta}(G_2,i)r^{\alpha}(G_3,-1)r^{\beta}(G_4,-i)\right]^{\frac{n(m+1)}{4}}, \tag{2}$$

знак равенства в котором достигается, когда точки 0, $a_{k,p}$, ∞ *и множество* D *являются соответственно полюсами и объединением круговых областей квадратичного дифференциала*

$$Q(w)dw^2 = w^{n-2}(1+w^n)^{m-1}\times$$

$$\times\frac{(\beta-\alpha)\left((1-iw^{n/2})^{2m+2}+(1+iw^{n/2})^{2m+2}\right)-2(\beta+\alpha)(1+w^n)^{m+1}}{\left[(1-iw^{n/2})^{2m+2}-(1+iw^{n/2})^{2m+2}\right]^2}\,dw^2. \tag{3}$$

Эта задача является обобщением некоторых результатов работы [6].

Доказательство следует схеме, предложенной в работах [3, 4], и использует идеи и методы работ [2, 7]. Из условий, наложенных на множество D, следует, что функция $g_D(z,w)$ определена при всех z, $w \in D$ и конечна при всех $z \neq w$. Пусть $E_0 = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$, $U_\varepsilon = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : |w| \leqslant \varepsilon\}$, $U_{\varepsilon^-} = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : |w| \geqslant 1/\varepsilon\}$, $E_{k,p}(\varepsilon) = \{w \in \mathbb{C} : |w-a_{k,p}| \leqslant \varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим конденсатор

$$C(\varepsilon,D,A_{n,m}) = \{E_0, U_\varepsilon, U_{\varepsilon^-}, E_{1,1}(\varepsilon), E_{1,2}(\varepsilon), \ldots, E_{n,m}(\varepsilon)\}$$

с предписанными значениями 0, $\frac{n}{2}\sqrt{\alpha}$, $\frac{n}{2}\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\alpha}, \ldots, \sqrt{\beta}$ соответственно.

Емкость конденсатора $C(\varepsilon,D,A_{n,m})$ равна

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon,D,A_{n,m}) := \inf \iint \left(\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right) dx\,dy,$$

где точная нижняя грань берется по всем вещественным непрерывным липшицевым на $\overline{\mathbb{C}}$ функциям $\varphi = \varphi(z)$ таким, что $\varphi\Big|_{E_0} = 0$, $\varphi\Big|_{U_\varepsilon} = \frac{n}{2}\sqrt{\alpha}$, $\varphi\Big|_{U_{\varepsilon^-}} = \frac{n}{2}\sqrt{\alpha}$, $\varphi\Big|_{E_{k,2p-1}} = \sqrt{\beta}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,s}$, $\varphi\Big|_{E_{k,2p}} = \sqrt{\alpha}$, $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,s-1}$. Величина $\left|C(\varepsilon,D,A_{n,m})\right| := (\operatorname{cap} C(\varepsilon,D,A_{n,m}))^{-1}$ называется модулем конденсатора $C(\varepsilon,D,A_{n,m})$.

Из теоремы 1 работы [3] следует асимптотическое равенство

$$\begin{gathered}\left|C(\varepsilon, D, A_{n,m})\right| = \frac{\tau}{2\pi}\,\log\,\frac{1}{\varepsilon} + M(D, A_{n,m}) + o(1), \quad \varepsilon \to 0,\\ \tau = \frac{2}{n((m+1)(\beta+\alpha)+(n-2)\alpha)},\end{gathered} \tag{4}$$

где $M(D, A_{n,m})$ — приведенный модуль множества D относительно системы точек $A_{n,m}$:

$$\begin{aligned}M(D, A_{n,m}) = \frac{\tau^2}{2\pi}\Bigg[&\frac{n^2\alpha}{4}\log r(D,0)r(D,\infty) + \\ &+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{s}\beta\log r(D, a_{k,2p-1}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{s-1}\alpha\log r(D, a_{k,2p}) + \frac{n^2}{2}\sqrt{\alpha}\,g_D(0,\infty) + \\ &+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{s}\log n\sqrt{\alpha\beta}\Big(g_D(0, a_{k,2p-1}) + g_D(a_{k,2p-1},\infty)\Big) + \\ &+\sum_{t=1}^{n}\sum_{x=1}^{s-1}\log n\alpha\Big(g_D(0, a_{t,2x}) + g_D(a_{t,2x},\infty)\Big) + \\ &+\sum_{(k,2p-1)\neq(t,2x-1)}\log\beta\, g_D(a_{k,2p-1}, a_{t,2x-1}) + \\ &+\sum_{(k,2p)\neq(t,2x)}\log\alpha\, g_D(a_{k,2p}, a_{t,2x}) + \\ &+\sum_{k,t=1}^{n}\sum_{p=1}^{s}\sum_{x=1}^{s-1}\log 2\sqrt{\alpha\beta}\, g_D(a_{k,2p-1}, a_{t,2x})\Bigg].\end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим разделяющее преобразование конденсатора $C(\varepsilon, D, A_{n,m})$ относительно системы функций $\{\zeta_k(w)\}_{k=1}^n$ и системы областей $\{\Lambda_k\}_{k=1}^n$. Пусть

$$C_k(\varepsilon, D, A_{n,m}) = \left\{E_0^{(k)}, E_1^{(k)}(\varepsilon), E_2^{(k)}(\varepsilon), E_{1,1}^{(k)}(\varepsilon), \ldots, E_{n,m}^{(k)}(\varepsilon)\right\},$$

где

$$E_0^{(k)} = \zeta\left(E_0 \cap \overline{\Lambda}_k\right) \cup \left[\zeta\left(E_0 \cap \overline{\Lambda}_k\right)\right]^*, \quad E_1^{(k)}(\varepsilon) = \zeta\left(U_\varepsilon \cap \overline{\Lambda}_k\right) \cup \left[\zeta\left(U_\varepsilon \cap \overline{\Lambda}_k\right)\right]^*,$$

$$E_2^{(k)}(\varepsilon) = \zeta\left(U_{\varepsilon^-} \cap \overline{\Lambda}_k\right) \cup \left[\zeta\left(U_{\varepsilon^-} \cap \overline{\Lambda}_k\right)\right]^*, \quad E_{l,p}^{(k)} = \zeta\left(E_{l,p}(\varepsilon) \cap \overline{\Lambda}_k\right) \cup \left[\zeta\left(E_{l,p}(\varepsilon) \cap \overline{\Lambda}_k\right)\right]^*,$$

$k, l = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$ и $P^* := \{w \in \overline{\mathbb{C}} : 1/\overline{w} \in P\}$ для произвольного множества $P \subset \subset \overline{\mathbb{C}}$. Тогда (см. [3, 4]) выполняется основное неравенство метода кусочно-разделяющего преобразования

$$\operatorname{cap} C(\varepsilon, D, A_{n,m}) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} C_k(\varepsilon, D, A_{n,m}). \tag{6}$$

Из (6) получаем неравенство, играющее ключевую роль для дальнейших оценок:

$$\left|C(\varepsilon, D, A_{n,m})\right| \leq 2 \left(\sum_{k=1}^{n} \left|C_k(\varepsilon, D, A_{n,m})\right|^{-1} \right)^{-1}. \tag{7}$$

Пусть область $\Gamma_{k,p}^{(1)}$ обозначает связную компоненту множества

$$\eta_k\left(D \cap \overline{\Lambda}_k\right) \cup \left(\eta_k\left(D \cap \overline{\Lambda}_k\right)\right)^*,$$

содержащую точку $\gamma_{k,p}^{(1)}$, а $\Gamma_{k,p}^{(2)}$ — связную компоненту множества

$$\eta_k\left(D \cap \overline{\Lambda}_{k-1}\right) \cup \left(\eta_k\left(B \cap \overline{\Lambda}_{k-1}\right)\right)^*,$$

содержащую точку $\gamma_{k,p}^{(2)}$ $k = \overline{1,n}$, $p = \overline{1,m}$. Аналогично, пусть $\Gamma_0^{(k)}$ обозначает связную компоненту множества $\eta_k\left(D \cap \overline{\Lambda}_k\right) \cup \left(\eta_k\left(D \cap \overline{\Lambda}_k\right)\right)^*$, содержащую точку $\gamma = 1$, а $\Gamma_\infty^{(k)}$ — связную компоненту множества $\eta_k\left(D \cap \overline{\Lambda}_k\right) \cup \left(\eta_k\left(D \cap \overline{\Lambda}_k\right)\right)^*$, содержащую точку $\gamma = -1$, $k = \overline{1,n}$. Следуя работам [2, 6], получаем следующие равенства:

$$\left|\eta_k(w) - \eta_l(a_{k,p})\right| = \left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,p}|^{\frac{n}{2}}\right)|a_{k,p}|\right]^{-1} |w - a_{k,p}| + o(1), \quad w \to a_{k,p},\, w \in \overline{\Lambda}_l, \tag{8}$$

$$k = \overline{1,n}, \quad p = \overline{1,m}, \quad l = k-1, k.$$

Также для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ имеет место

$$\begin{gathered} \left|\eta_k(w) - 1\right| = 2|w|^{\frac{n}{2}} + o(1), \quad w \to 0, \\ \left|\eta_k(w) + 1\right| = 2|w|^{-\frac{n}{2}} + o(1), \quad w \to \infty, \quad w \in \overline{\Lambda}_k. \end{gathered} \tag{9}$$

Аналогично тому, как мы получили соотношения (4) и (5), с учетом (8) и (9) для всех $k = \overline{1,n}$ приходим к выражениям

$$\begin{gathered} \left|C_k(\varepsilon, D, A_{n,m})\right| = \frac{\sigma}{2\pi} \log \frac{1}{\varepsilon} + M_k(D, A_{n,m}) + o(1), \quad \varepsilon \to 0, \\ \sigma = \frac{1}{(m+1)(\beta+\alpha) + (n-2)\alpha}, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$M_k(D, A_{n,m}) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left[\alpha \log \frac{1}{4}\, r\left(\Gamma_0^{(k)}, 1\right) r\left(\Gamma_\infty^{(k)}, -1\right) + \right.$$

$$+\sum_{p=1}^{s} \beta \log \frac{r\left(\Gamma_{k,2p-1}^{(1)}, \gamma_{k,2p-1}^{(1)}\right)\, r\left(\Gamma_{k,2p-1}^{(2)}, \gamma_{k,2p-1}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{n/2}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{-2}} +$$

$$\left. +\sum_{p=1}^{s-1} \alpha \log \frac{r\left(\Gamma_{k,2p}^{(1)}, \gamma_{k,2p}^{(1)}\right)\, r\left(\Gamma_{k,2p}^{(2)}, \gamma_{k,2p}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p}|^{n/2}\right)|a_{k,2p}|\right]^{-2}}\right]. \tag{11}$$

Из неравенства (7) после некоторых преобразований, устремляя ε к нулю, получаем неравенство для приведенных модулей

$$M(D, A_{n,m}) \leqslant \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} M_k(D, A_{n,m}). \tag{12}$$

Выражения (5), (11) и (12) приводят к неравенству

$$\frac{n^2\alpha}{4}\log r(D,0)r(D,\infty) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{s}\beta \log r(D, a_{k,2p-1}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{s-1}\alpha \log r(D, a_{k,2p}) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha \log \frac{1}{4} r(\Gamma_0^{(k)}, 1) r(\Gamma_\infty^{(k)}, -1) + \right.$$

$$+\sum_{p=1}^{s} \beta \log \frac{r\left(\Gamma_{k,2p-1}^{(1)}, \gamma_{k,2p-1}^{(1)}\right)\, r\left(\Gamma_{k,2p-1}^{(2)}, \gamma_{k,2p-1}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p-1}|^{n/2}\right)|a_{k,2p-1}|\right]^{-2}} +$$

$$\left. +\sum_{p=1}^{s-1} \alpha \log \frac{r\left(\Gamma_{k,2p}^{(1)}, \gamma_{k,2p}^{(1)}\right)\, r\left(\Gamma_{k,2p}^{(2)}, \gamma_{k,2p}^{(2)}\right)}{\left[\frac{2}{n}\chi\left(|a_{k,2p}|^{n/2}\right)|a_{k,2p}|\right]^{-2}}\right].$$

Отсюда получаем

$$\left[r(D,0)r(D,\infty)\right]^{\frac{n^2\alpha}{4}} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s} r^{\beta}(D,a_{k,2p-1}) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} r^{\alpha}(D,a_{k,2p}) \le$$

$$\le \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha}\left(\frac{2}{n}\right)^{n(m+1)(\alpha+\beta)/2} \left[M^{(1)}(A_{n,m})\right]^{\beta}\left[M^{(2)}(A_{n,m})\right]^{\alpha} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}\left[r^{\alpha}(\Gamma_0^{(k)},1)r^{\alpha}(\Gamma_\infty^{(k)},-1)\prod_{p=1}^{s} r^{\beta}(\Gamma_{k,2p-1}^{(1)},\gamma_{k,2p-1}^{(1)})r^{\beta}(\Gamma_{k,2p-1}^{(2)},\gamma_{k,2p-1}^{(2)}) \times\right.$$

$$\left.\times\prod_{p=1}^{s-1} r^{\alpha}(\Gamma_{k,2p}^{(1)},\gamma_{k,2p}^{(1)})r^{\alpha}(\Gamma_{k,2p}^{(2)},\gamma_{k,2p}^{(2)})\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из способа построения областей $\Gamma_{k,p}^{(q)}$, $\Gamma_0^{(k)}$, $\Gamma_\infty^{(k)}$ и соответствующих точек $\gamma_{k,p}^{(q)}$, 1, -1 следует, что для каждого k_0, $k_0 = 1,2,\ldots,n$, указанные области взаимно не пересекаются при всех $k=\overline{1,n}$, $p=\overline{1,m}$ и $q=1,2$, а точки образуют систему $2m+2$ точек на единичной окружности. Отсюда с учетом теоремы 2 из работы [6] получаем

$$r^{\alpha}\left(\Gamma_0^{(k)},1\right)r^{\alpha}\left(\Gamma_\infty^{(k)},-1\right)\prod_{p=1}^{s} r^{\beta}\left(\Gamma_{k,2p-1}^{(1)},\gamma_{k,2p-1}^{(1)}\right)r^{\beta}\left(\Gamma_{k,2p-1}^{(2)},\gamma_{k,2p-1}^{(2)}\right) \times$$

$$\times\prod_{p=1}^{s-1} r^{\alpha}\left(\Gamma_{k,2p}^{(1)},\gamma_{k,2p}^{(1)}\right)r^{\alpha}\left(\Gamma_{k,2p}^{(2)},\gamma_{k,2p}^{(2)}\right) \le$$

$$\le \left(\frac{1}{m+1}\right)^{(m+1)(\alpha+\beta)}\left[r^{\alpha}(G_1,1)r^{\beta}(G_2,i)r^{\alpha}(G_3,-1)r^{\beta}(G_4,-i)\right]^{\frac{m+1}{2}},$$

что окончательно и приводит к соотношению

$$\left[r(D,0)r(D,\infty)\right]^{\frac{n^2\alpha}{4}} \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s} r^{\beta}(D,a_{k,2p-1}) \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=1}^{s-1} r^{\alpha}(D,a_{k,2p}) \le$$

$$\le \left(\frac{n}{4}\right)^{n\alpha}\left(\frac{2}{n(m+1)}\right)^{\frac{m+1}{2}n(\alpha+\beta)}\left[M^{(1)}(A_{n,m})\right]^{\beta}\left[M^{(2)}(A_{n,m})\right]^{\alpha} \times$$

$$\times\left[r^{\alpha}(G_1,1)r^{\beta}(G_2,i)r^{\alpha}(G_3,-1)r^{\beta}(G_4,-i)\right]^{\frac{n(m+1)}{4}}.$$

Утверждение о знаке равенства в неравенстве (2) проверяется непосредственно.

Теорема доказана.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений //Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. — 1934. — **5.** — С. 159–245.
2. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. — 1994. – **49**, № 1 (295). — С. 3–76.
3. *Дубинин В. Н.* Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1997. — **237**. — С. 56–73.
4. *Дубинин В. Н.* Емкости конденсаторов в геометрической теории функций: Учеб. пос. — Владивосток: Изд. Дальневост. ун-та, 2003. — 116 с.
5. *Кузьмина Г. В.* Метод экстремальной метрики в задачах о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей при наличии свободных параметров // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2003. — **302**. — С. 52–67.
6. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 7. — С. 867–886.
7. *Вьюн В.Е.* Разделяющее преобразование в экстремальных задачах о неналегающих областях и для открытых множеств // Доп. НАН України. — 2007. — № 5. — С. 13–16.
8. *Teichmuller O.* Collected papers. — Berlin etc.: Springer, 1982.
9. *Дженкинс Дж. А.* Однолистные функции и конформные отображения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 256 с.
10. *Тамразов П. М.* Экстремальные конформные отображения и полюсы квадратичных дифференциалов // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. — **32**, № 5. — С. 1033–1043.
11. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966. — 628 с.

Получено 30.07.07