УДК 517.9

ГЛОБАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Н. А. Богай

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We found sufficient conditions for existence and uniqueness of a global solution for a certain class of systems of nonlinear difference equations, and study properties of this solution.

Установлены достаточные условия существования и единственности глобального решения одного класса систем нелинейных разностных уравнений и исследованы его свойства.

Системи нелінійних різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(t), x(t-1), \ldots, x(t-k)), \tag{1}$$

де $t \in R = (-\infty; +\infty)$, A — дійсна $(n \times n)$-матриця, F: $R \times R^n \times \ldots \times R^n \to R^n$, $k \geq 1$, мають широкі застосування в різних областях природознавства (див. роботи [1–4] і наведену в них бібліографію). Це, очевидно, було однією із причин активного розвитку їх теорії, яка на даний час має ряд добре розроблених напрямків. До них, зокрема, належить напрямок, основною метою якого є дослідження питань існування та єдиності неперервних N-періодичних (N — ціле додатне число) розв'язків таких рівнянь [5, 6]. Цього, однак, не можна стверджувати про вивчення питань існування та єдиності глобальних (визначених при всіх $t \in R$) розв'язків таких систем рівнянь, які займають особливе місце в їх теорії. Хоча тут також є окремі результати, які стосуються вивчення цих питань для деяких класів рівнянь вигляду (1) [7], але в загальному випадку вони досліджені мало. Тому основною метою даної роботи є встановлення достатніх умов існування та єдиності глобального розв'язку системи рівнянь (1) і дослідження його властивостей.

1. Спочатку розглянемо випадок, коли власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матриці A і вектор-функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_k)$ задовольняють такі умови:

1) $0 < |\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$;

2) вектор-функція $F(t, x_0, x_1, \ldots, x_k)$ є неперервною за всіма аргументами і задовольняє співвідношення

$$|F(t, x_0', x_1', \ldots, x_k') - F(t, x_0'', x_1'', \ldots, x_k'')| \leq L \sum_{i=0}^{k} |x_i' - x_i''|,$$

де $t \in R$, $x_i', x_i'' \in R^n$, $i = 0, 1, \ldots, k$, L — деяка додатна стала, $|x| = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$;

3) $\sup\limits_{t \in R} |F(t, 0, \ldots, 0)| = M < \infty$.

В цьому випадку має місце наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай виконано умови 1–3. Тоді при достатньо малому L існує єдиний неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $\vartheta(t)$ системи рівнянь (1).*

Доведення. Виконуючи в (1) заміну змінних

$$x(t) = Cy(t), \tag{2}$$

де C — деяка неособлива матриця, зводимо систему рівнянь (1) до вигляду

$$y(t+1) = \Lambda y(t) + \tilde{F}(t, y(t), y(t-1), \ldots, y(t-k)), \tag{3}$$

де $\Lambda = C^{-1}AC = \operatorname{diag}(\Lambda_1(\lambda_1), \ldots, \Lambda_p(\lambda_p))$, $1 \le p \le n$; Λ_i, $i = 1, \ldots, p$, — квадратні $(n_i \times n_i)$-матриці вигляду

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix},$$

причому $\sum\limits_{i=1}^{p} n_i = n$, ε — як завгодно мала додатна стала і $\tilde{F}(t, y(t), y(t-1), \ldots, y(t-k)) = C^{-1}F(t, Cy(t), Cy(t-1), \ldots, Cy(t-k))$. З огляду на умови 2, 3 легко переконатися, що вектор-функція $\tilde{F}(t, y_0, y_1, \ldots, y_k)$ задовольняє такі умови:

$2')$ $|\tilde{F}(t, y_0^{'}, y_1^{'}, \ldots, y_k^{'}) - \tilde{F}(t, y_0^{''}, y_1^{''}, \ldots, y_k^{''})| \le \tilde{L} \sum\limits_{i=0}^{k} |y_i^{'} - y_i^{''}|$, $\tilde{L} = |C^{-1}||C|L$;

$3')$ $\sup\limits_{t \in R} |\tilde{F}(t, 0, \ldots, 0)| = \tilde{M}$, $\tilde{M} \le |C^{-1}|M$.

Покажемо, що система рівнянь (3) має єдиний неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $w(t)$. Для цього запишемо систему рівнянь (3) у вигляді

$$y(t) = \Lambda y(t-1) + \tilde{F}(t-1, y(t-1), y(t-2), \ldots, y(t-k-1)) \tag{3'}$$

і для побудови її неперервного й обмеженого при $t \in R$ розв'язку $w(t)$ скористаємося методом послідовних наближень. При цьому послідовні наближення $y_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, визначимо за допомогою наступних співвідношень:

$$\begin{aligned} &y_0(t) = 0, \\ &y_m(t) = \Lambda y_{m-1}(t-1) + \tilde{F}(t-1, y_{m-1}(t-1), \ldots, y_{m-1}(t-k-1)), m = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{4}$$

Таким чином, побудовані вектор-функції $y_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, є неперервними при $t \in R$ (випливає з умов теореми). Більш того, покажемо, що при всіх $t \in R$ і $m \ge 1$ виконується нерівність

$$|y_m(t)| \le \frac{\tilde{M}}{1 - \Theta}, \tag{5}$$

де $\Theta = |\Lambda| + (k+1)\tilde{L} < 1$ при достатньо малих ε і L.

Дійсно, за умовою $3'$ нерівність (5) має місце при $m = 1$, оскільки $y_1(t) = \tilde{F}(t-1, 0, \ldots, 0)$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що нерівність (5) доведено для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Справді, згідно з (4), (5) і умовами теореми одержуємо

$$|y_{m+1}(t)| \leq |\Lambda|\,|y_m(t-1)| + |\tilde{F}(t-1, y_m(t-1), \ldots, y_m(t-k-1)) - \tilde{F}(t-1, 0, \ldots, 0)| +$$

$$+ |\tilde{F}(t-1, 0, \ldots, 0)| \leq$$

$$\leq |\Lambda| \frac{\tilde{M}}{1-\Theta} + \tilde{L}(k+1) \frac{\tilde{M}}{1-\Theta} + \tilde{M} =$$

$$= \tilde{M}\left(1 + \frac{1}{1-\Theta}(|\Lambda| + (k+1)\tilde{L})\right) \leq \tilde{M}\left(1 + \frac{\Theta}{1-\Theta}\right) = \frac{\tilde{M}}{1-\Theta}.$$

Цим самим доведено, що нерівність (5) має місце при всіх $t \in R$ і $m \geq 0$.

Тепер покажемо, що послідовність вектор-функцій $y_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігається при всіх $t \in R$ до деякої неперервної вектор-функції $w(t)$. Для цього, очевидно, достатньо показати, що при всіх $t \in R$ і $m \geq 0$ виконується оцінка

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \leq \tilde{M}\Theta^{m-1}. \tag{6}$$

Оскільки на підставі (4) при $m = 1$ маємо

$$y_1(t) - y_0(t) = \tilde{F}(t-1, 0, \ldots, 0),$$

то, беручи до уваги умову $3'$, одержуємо

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq \tilde{M},$$

тобто в цьому випадку оцінка (6) виконується.

Припустимо, що оцінку (6) доведено для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, на підставі (4), (6) і умов теореми знаходимо

$$|y_{m+1}(t) - y_m(t)| \leq |\Lambda|\,|y_m(t-1) - y_{m-1}(t-1)| +$$

$$+ |\tilde{F}(t-1, y_m(t-1), \ldots, y_m(t-k-1)) -$$

$$- \tilde{F}(t-1, y_{m-1}(t-1), \ldots, y_{m-1}(t-k-1))| \leq$$

$$\leq |\Lambda|\tilde{M}\Theta^{m-1} + \tilde{L}(k+1)\tilde{M}\Theta^{m-1} =$$

$$= \tilde{M}\Theta^{m-1}(|\Lambda| + (k+1)\tilde{L}) \leq \tilde{M}\Theta^m.$$

Таким чином, оцінка (6) виконується при всіх $t \in R$ і $m \geq 0$. Тоді з (6) безпосередньо випливає, що послідовність вектор-функцій $y_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots,$ рівномірно збігається до деякої вектор-функції $w(t) = \lim\limits_{m\to+\infty} y_m(t)$, яка є розв'язком системи рівнянь $(3')$ і задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{\tilde{M}}{1-\Theta}.$$

В цьому легко переконатись, якщо в (4) і (5) перейти до границі при $m \to +\infty$.

Припустимо, що система рівнянь $(3')$ має ще один неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $\bar{w}(t)$ такий, що $\bar{w}(t) \neq w(t)$. Тоді на підставі умов теореми одержуємо

$$\begin{aligned}|w(t)-\bar{w}(t)| \leq |\Lambda|\,|w(t-1)-\bar{w}(t-1)|+ \\ +|\tilde{F}(t-1,w(t-1),\ldots,w(t-k-1))-\tilde{F}(t-1,\bar{w}(t-1),\ldots,\bar{w}(t-k-1))| \leq \\ \leq |\Lambda| \parallel w(t)-\bar{w}(t) \parallel +\tilde{L}(k+1) \parallel w(t)-\bar{w}(t) \parallel \leq \\ \leq \Theta \parallel w(t)-\bar{w}(t) \parallel\end{aligned}$$

або $\parallel w(t)-\bar{w}(t) \parallel \leq \Theta \parallel w(t)-\bar{w}(t) \parallel$, де $\parallel w(t)-\bar{w}(t) \parallel = \sup\limits_{t\in R} |w(t)-\bar{w}(t)|$. Звідси випливає, що $w(t) \equiv \bar{w}(t)$. Отримана суперечність завершує доведення теореми.

Зауваження 1. З огляду на заміну змінних (2) легко отримати єдиний неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $\vartheta(t)$ системи рівнянь (1):

$$\vartheta(t) = Cw(t).$$

Виконаємо в (3) взаємно однозначну заміну змінних

$$y(t) = z(t) + w(t), \tag{7}$$

де $w(t) = \lim\limits_{m\to\infty} y_m(t)$ і $y_m(t)$, $m = 0,1,\ldots$, визначаються співвідношеннями (4). В результаті цього дослідження система рівнянь (3) зведеться до дослідження системи

$$z(t+1) = \Lambda z(t) + \bar{F}(t, z(t), z(t-1), \ldots, z(t-k)), \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned}\bar{F}(t, z(t), z(t-1), \ldots, z(t-k)) = \tilde{F}(t, z(t)+ \\ + w(t), z(t-1)+w(t-1), \ldots, z(t-k)+w(t-k))- \\ - \tilde{F}(t, w(t), w(t-1), \ldots, w(t-k)).\end{aligned}$$

При цьому вектор-функція $\bar{F}(t, z_0, z_1, \ldots, z_k)$ задовольняє (випливає із умов $2'$, $3'$) умови:

$2''$) $|\bar{F}(t, z_0^{'}, \ldots, z_k^{'}) - \bar{F}(t, z_0^{''}, \ldots, z_k^{''})| \leq \tilde{L} \sum\limits_{i=0}^{k} |z_i^{'} - z_i^{''}|$;

$3''$) $\bar{F}(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$.

Має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо виконано умови 1, $2''$, $3''$, то система рівнянь (8) має сім'ю неперервних при $t \geq 0$ розв'язків $z(t)$, які задовольняють умову*

$$\lim_{t \to +\infty} z(t) = 0. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки для довільного $t \in R^+$ має місце рівність $t = [t] + \tau$, де $[t]$ — ціла частина t, і $\tau \in [0, 1)$, то покладемо

$$z(\tau) = \varphi_0(\tau), \quad z(\tau - 1) = \varphi_{-1}(\tau - 1), \quad \ldots, \quad z(\tau - k) = \varphi_{-k}(\tau - k), \tag{10}$$

де $\varphi_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, — довільні неперервні при $\tau \in [0, 1)$ вектор-функції, що задовольняють умови

$$\lim_{\tau \to 1-0} \varphi_{-i}(\tau - i) = \varphi_{-i}^1 \neq \pm\infty, \quad i = 0, 1, \ldots, k,$$

$$\varphi_{-i}^1 = \varphi_{-i+1}(-i + 1), \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{11}$$

$$\varphi_0^1 = \Lambda\varphi_0(0) + \bar{F}(0, \varphi_0(0), \varphi_{-1}(-1), \ldots, \varphi_{-k}(-k)).$$

Тоді з (8) послідовно отримуємо

$$z(\tau + 1) = \Lambda z(\tau) + \bar{F}(\tau, z(\tau), z(\tau - 1), \ldots, z(\tau - k)) = \Lambda\varphi_0(\tau) + \bar{F}(\tau, \varphi_0(\tau), \ldots, \varphi_{-k}(\tau - k)),$$

$$z(\tau + 2) = \Lambda z(\tau + 1) + \bar{F}(\tau + 1, z(\tau + 1), z(\tau), \ldots, z(\tau - k + 1)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z(\tau + k + 2) = \Lambda z(\tau + k + 1) + \bar{F}(\tau + k + 1, z(\tau + k + 1), \ldots, z(\tau + 1)), \tag{12}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z(t) = z(\tau + [t]) = \Lambda z(\tau + [t] - 1) + \bar{F}(\tau + [t] - 1, z(\tau + [t] - 1), \ldots, z(\tau + [t] - k - 1)).$$

Зважаючи на (10) – (12), можна переконатися, що так побудовані розв'язки є неперервними при всіх $t \geq 0$. Більш того, на підставі (12) і умов теореми одержуємо

$$|z(\tau + 1)| \leq (|\Lambda| + \tilde{L}(k + 1))N = N\Theta,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|z(\tau + k + 1)| \leq N\Theta,$$

$$|z(\tau + k + 2)| \leq |\Lambda|N\Theta + \tilde{L}(|z(\tau + k + 1)| + \ldots + |z(\tau + 1)|) \leq$$

$$\leq |\Lambda|N\Theta + \tilde{L}(k+1)N\Theta = N\Theta^2,$$

. . . .

$$|z(\tau + ik + j)| \leq N\Theta^{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, \quad j = i+1, i+2, \ldots, i+k+1.$$

Звідси безпосередньо випливає, що довільний розв'язок із сім'ї (12) задовольняє умову (9).

Теорему 2 доведено.

Наслідок 1. *Якщо виконано умови теореми 2, то на підставі (7) система рівнянь (3) має сім'ю (залежить від $k+1$ довільної неперервної вектор-функції $\varphi_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, що задовольняє умови (11)) неперервних при $t \geq 0$ розв'язків $y(t)$, для кожного з яких має місце співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty}[y(t) - w(t)] = 0$.*

Наслідок 2. *Якщо виконано умови теореми 1, то на підставі (2), (7) система рівнянь (1) має сім'ю (залежить від $k+1$ довільної неперервної вектор-функції $\varphi_{-i}(\tau - i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, що задовольняє умови (11)) неперервних при $t \geq 0$ розв'язків $x(t)$, для кожного з яких виконується співвідношення $\lim\limits_{t\to+\infty}[x(t) - v(t)] = 0$.*

2. У випадку, коли замість умови 1 виконується умова

$1'$) власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$, матриці A є такими, що $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, має місце наступна теорема.

Теорема 3. *Якщо виконано умови $1'$, 2, 3, то система рівнянь (1) має єдиний неперервний і обмежений при $t \in R$ розв'язок $\gamma(t)$.*

Доведення теореми проводиться за тією ж схемою, що і доведення теореми 1. При цьому послідовні наближення до розв'язку $\tilde{\gamma}(t)$ системи рівнянь (3) визначаються за допомогою співвідношень

$y_0(t) = 0,$

$y_m(t) = \Lambda^{-1}y_{m-1}(t+1) - \Lambda^{-1}\tilde{F}(t, y_{m-1}(t), y_{m-1}(t-1), \ldots, y_{m-1}(t-k)), m = 1, 2, \ldots.$

Зауваження 2. При виконанні умов теореми 3 питання про існування і побудову неперервних при $t \in (a, b) \subset R$ розв'язків, які знаходяться в достатньо малому околі розв'язку $\tilde{\gamma}(t)$, залишається в даний час відкритим.

3. Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \tilde{\Lambda}x(t) + F_1(t, x(t), y(t), x(t-1), y(t-1), \ldots, x(t-k), y(t-k)), \\ y(t+1) &= \bar{\Lambda}y(t) + F_2(t, x(t), y(t), x(t-1), y(t-1), \ldots, x(t-k), y(t-k)), \end{aligned} \tag{13}$$

де $\tilde{\Lambda} = \operatorname{diag}(\Lambda_1(\lambda_1), \ldots, \Lambda_q(\lambda_q))$, $\bar{\Lambda} = \operatorname{diag}(\Lambda_{q+1}(\lambda_{q+1}), \ldots, \Lambda_p(\lambda_p))$, і припустимо, що виконуються такі умови умови:

а) $0 < |\lambda_i| < 1 < |\lambda_j|$, $i = 1, \ldots, q$, $j = q+1, \ldots, p$;

б) вектор-функції $F_1(t, x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_k, y_k)$, $F_2(t, x_0, y_0, \ldots, x_k, y_k)$ є неперервними за всіма аргументами і задовольняють співвідношення

$$|F_j(t, x_0', y_0', \ldots, x_k', y_k') - F_j(t, x_0'', y_0'', \ldots, x_k'', y_k'')| \leq l\sum_{i=0}^{k}(|x_i' - x_i''| + |y_i' - y_i''|), \quad j = 1, 2,$$

де $t \in R, x_i^{'}, \ y_i^{'}, \ x_i^{''}, y_i^{''} \in R^n, \ i = 0, 1, \ldots, k, \ l$ — достатньо мала додатна стала;

в) $\sup\limits_{t \in R} |F_j(t, 0, 0, \ldots, 0)| = M_j < \infty, j = 1, 2.$

Зауважимо, що систему рівнянь (1) також можна записати у вигляді (13), якщо власні значення $\lambda_i, \ i = 1, \ldots, n$, матриці A задовольняють умову а).

Теорема 4. *Якщо виконано умови а) – в), то система рівнянь* (13) *має єдиний неперервний і обмежений при* $t \in R$ *розв'язок* $(\eta_1(t), \eta_2(t))$.

Доведення теореми проводиться за допомогою методу послідовних наближень і майже не відрізняється від доведення теореми 1. Невелика відмінність виникає лише при побудові послідовних наближень $x_m(t)$, $y_m(t)$, $m = 0, 1, \ldots$, які в даному випадку визначаються за допомогою співвідношень

$$x_0(t) = 0, \quad y_0(t) = 0,$$

$$x_m(t) = \tilde{\Lambda} x_{m-1}(t-1) +$$

$$+ F_1(t-1, x_{m-1}(t-1), y_{m-1}(t-1), \ldots, x_{m-1}(t-k-1), y_{m-1}(t-k-1)),$$

$$y_m(t) = \bar{\Lambda}^{-1} y_{m-1}(t+1) - \bar{\Lambda}^{-1} F_2(t, x_{m-1}(t), y_{m-1}(t), \ldots, x_{m-1}(t-k), y_{m-1}(t-k)),$$

$$m = 1, 2 \ldots.$$

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**, № 2. — P. 242 – 284.
2. *Guldberg A., Wallenberg G.* Theorie der linearen Differenzengleichungen. — Berlin, 1911. — 288 S.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 216 с.
4. *Murray J. D.* Mathematical biology. — Berlin; Heidelberg: Springer, 1989. — 767 p.
5. *Пелюх Г. П.* О существовании периодических решений нелинейных разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 12. — С. 1626 – 1633.
6. *Пелюх Г. П., Богай Н. А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 3. — С. 351 – 359.
7. *Пелюх Г. П.* О непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси решениях систем нелинейных разностных уравнений и их свойствах // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 12. — С. 1636 – 1645.

Одержано 18.12.2006