УДК 517.9

АСИМПТОТИЧНИЙ АНАЛІЗ МАТЕМАТИЧНОГО СПОДІВАННЯ ПОВНОЇ ЕНЕРГІЇ ГАРМОНІЧНОГО ОСЦИЛЯТОРА ЗІ ЗОВНІШНІМ ЗБУРЕННЯМ ПРОЦЕСОМ ТИПУ «ДРОБОВИЙ ШУМ»

О. Д. Стецюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: yelena.sod@gmail.com

We study the behavior of the mean complete energy of a harmonic oscillator without friction perturbed by a "shot noise" type process as $t \to \infty$.

Исследуется поведение при $t \to \infty$ математического ожидания полной энергии гармонического осциллятора без трения при внешнем возмущении процессом типа „дробный шум".

1. Вступ. Під гармонічним осцилятором без тертя розуміють тіло маси 1, рух якого описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$\ddot{u}(t) + k^2 u(t) = q(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \tag{1}$$

де $q(t)$ — зовнішня збурююча сила, $u_0, \dot{u}_0$ — початкове положення і початкова швидкість осцилятора, $u(t), \dot{u}(t)$ — положення і швидкість осцилятора в момент часу $t > 0$, $k > 0$ — параметр осцилятора (характеризує жорсткість пружини осцилятора), $E(t) = \dfrac{1}{2}\,\dot{u}^2(t) + {}+k^2u^2(t)$ — повна енергія осцилятора.

Рівняння (1) еквівалентне системі диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{aligned} &dx_1(t) = kx_2(t)dt, \\ &dx_2(t) = -kx_1(t)dt + q(t)dt, \\ &u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0, \end{aligned} \tag{2}$$

де $x_1(t) = ku(t)$, $x_2(t) = \dot{u}(t)$. Тоді у нових позначеннях

$$2E(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t). \tag{3}$$

У детермінованому випадку [1, с. 144], коли зовнішня збурююча сила в системі (1) $q(t)$ є невипадковою неперервною і періодичною з періодом $2l$ функцією:

1) повна енергія $E(t) \le C < \infty$ для всіх $t \ge 0$, якщо $k \ne n\pi/l$ при всіх $n = 1, 2, \ldots$;

2) $E(t) \sim t^2$ при $t \to \infty$, якщо існує таке n_0, що $k = n_0\pi/l$ і $\int_{-l}^{l} q(t)\cos n_0\pi/l t dt$ та $\int_{-l}^{l} q(t)\sin n_0\pi/l t dt$ одночасно не дорівнюють нулю.

Модель гармонічного осцилятора з неперервним випадковим збуренням, у якому $ME(t) \sim t^{\alpha}$, $\alpha \in \{1, 2, 3\}$, при $t \to \infty$, розглядалась у роботі [2], при $ME(t) \sim t^{\alpha}$, $\alpha > 1/2$ — у [3, 4].

У даній роботі досліджується поведінка з часом ($t \to \infty$) математичного сподівання повної енергії осцилятора з випадковим зовнішнім збуренням „дробовим шумом” ($\dot{\nu}([0,t), A)$ — похідна пуассонівської міри $\nu([0,t), A)$ з параметром $t\Pi(A)$, де A — борелева множина на R^2, $\Pi(A)$ — міра на σ-алгебрі борелевих множин R^2, $\Pi(A) < \infty$). У цьому випадку рівняння (1) потрібно розуміти як систему двох стохастичних диференціальних рівнянь вигляду (2) при $q(t)dt = f(t) \int_{R^2} \varphi(v)\nu(dt, dv)$ або $q(t)dt = f(t) \int_{R^2} \varphi(v)\tilde{\nu}(dt, dv)$, де $\tilde{\nu}(dt, dv) = \nu(dt, dv) - dt\Pi(dv)$.

2. Допоміжні результати.

Лема 1. *Нехай $f(t)$ — $2l$-періодична неперервна функція на R. Тоді для будь-якого $k \in R$ такого, що $\nexists i \in N : k = \dfrac{i\pi}{l}$ $\exists C > 0$:*

$$\left| \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\underline{\lim_{t\to\infty}} \right) \int\limits_0^t f(s) \sin ks \, ds \right| \le C \quad i \quad \left| \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\underline{\lim_{t\to\infty}} \right) \int\limits_0^t f(s) \cos ks \, ds \right| \le C.$$

Доведення. Маємо

$$\left| \overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_0^t f(s) \sin ks \, ds \right| = \left| \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\int\limits_0^{2l} f(s) \sin ks \, ds + \int\limits_{2l}^{4l} f(s) \sin ks \, ds + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + \int\limits_{2([t/2l]-1)l}^{2[t/2l]l} f(s) \sin ks \, ds + \int\limits_{2[t/2l]l}^{t} f(s) \sin ks \, ds \right) \right|.$$

Оскільки $f(t)$ є $2l$-періодичною, то вираз справа можемо записати таким чином:

$$\left| \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(\int\limits_0^{2l} f(s) \sin ks \, ds + \int\limits_0^{2l} f(s) \sin k(s+2l) ds + \ldots \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots + \int\limits_0^{2l} f(s) \sin k \left(s + 2\left([t/2l] - 1\right) l\right) \, ds + \int\limits_{2[t/2l]l}^{t} f(s) \sin ks \, ds \right) \right| \le$$

$$\le \left| \overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_0^{2l} f(s) \left(\sin ks + \sin k(s+2l) + \ldots + \sin k(s+2nl) \right) \, ds \right| +$$

$$+ \left| \overline{\lim_{t\to\infty}} \int\limits_{2[t/2l]l}^{t} f(s) \sin ks \, ds \right|.$$

Виконаємо перетворення над сумою під інтегралом

$$S_n = \sin ks + \sin k(s+2l) + \ldots + \sin k(s+2nl) =$$
$$= \sin ks \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \cos 2mkl\right) + \cos ks \sum_{m=1}^{n} \sin 2mkl.$$

Легко перевірити рівності

$$1 + \sum_{m=1}^{n} \cos 2mkl = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin kl}\left(\sin kl + \sum_{m=1}^{n} [\sin(2m+1)kl - \sin(2m-1)kl]\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)kl}{2\sin kl},$$

$$\sum_{m=1}^{n} \sin 2mkl = \frac{1}{2\sin kl}\sum_{m=1}^{n} [\cos(2m-1)kl - \cos(2m+1)kl] =$$
$$= \frac{\cos kl - \cos(2n+1)kl}{2\sin kl}.$$

Тоді

$$S_n = \sin ks \frac{\sin kl + \sin(2n+1)kl}{2\sin kl} + \cos ks\, \frac{\cos kl - \cos(2n+1)kl}{2\sin kl}.$$

Отже, маємо

$$\left|\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^t f(s)\sin ksds\right| \le \left|\int_0^{2l} f(s)\frac{\sin ks}{2}\, ds\right| +$$
$$+ \left|\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^{2l} f(s)\sin ks \frac{\sin(2n+1)kl}{2\sin kl}\, ds\right| + \left|\int_0^{2l} f(s)\cos ks \frac{\cos kl}{2\sin kl}\, ds\right| +$$
$$+ \left|\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_0^{2l} f(s)\cos ks \frac{\cos(2n+1)kl}{2\sin kl}\, ds\right| + \left|\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{2[t/2l]l}^{t} f(s)\sin ks\, ds\right|.$$

Покладемо $c := \max|f(t)|$, тоді

$$\left|\int_{2[t/2l]l}^{t} f(s)\sin ks\, ds\right| \le 2lc \quad \forall t \ge 0, \left|\int_0^{2l} f(s)\frac{\sin ks}{2}\, ds\right| \le cl,$$

$$\left|\int_0^{2l} f(s)\cos ks \frac{\cos kl}{2\sin kl}\,ds\right| \le cl\left|\frac{\cos kl}{\sin kl}\right|.$$

Відомо [5, с. 382], що

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2l} f(s)\sin ks \frac{\sin(2n+1)kl}{2\sin kl}\,ds = 0$$

і

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2l} f(s)\cos ks \frac{\cos(2n+1)kl}{2\sin kl}\,ds = 0.$$

Покладемо $C := \mathrm{cl}\left(3+\left|\dfrac{\cos kl}{\sin kl}\right|\right)$, що і доводить лему.

Аналогічно отримуємо твердження для нижньої границі та для

$$\left|\overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\underline{\lim}_{t\to\infty}\right)\int_0^t f(s)\cos ks\,ds\right|.$$

Лему доведено.

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай $u(t)$ — розв'язок рівняння (2), в якому $q(t)dt = f(t)\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(dt,dv)$, $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$, $\tilde{\nu}(dt,dv) = \nu(dt,dv) - dt\Pi(dv)$, $\nu(t,A)$ — пуассонівська міра з $M\nu(t,A) = t\Pi(A)$, $\Pi(A)$ — міра на σ-алгебрі борелевих множин R^2, $\int_{R^2}|\varphi(v)|\Pi(dv) < \infty$, $\int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv) < \infty$, $f(t)$ — неперервна $2l$-періодична функція.*

Тоді

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}ME(t) = \frac{1}{4l}\int_0^{2l} f^2(s)\,ds\int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv).$$

Доведення. Фундаментальна матриця розв'язків незбуреної системи [6, с. 37]

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos kt & \sin kt \\ -\sin kt & \cos kt \end{pmatrix}.$$

Розглянемо процес

$$y(t) = X^{-1}(t)x(t),$$

тобто процеси

$$y_1(t) = [x_1(t)\cos kt - x_2(t)\sin kt], \quad y_1(0) = u_0$$

та

$$y_2(t) = [x_1(t)\sin kt + x_2(t)\cos kt], \quad y_2(0) = \dot{u}_0.$$

За формулою Іто знайдемо $dy_1(t)$:

$$dy_1(t) = [-kx_1(t)\sin kt - kx_2(t)\cos kt]\,dt + [(kx_2(t)\cos kt + kx_1(t)\sin kt]\,dt+$$

$$+\int\limits_R (x_1(t)\cos kt - (x_2(t) + f(t)\varphi(v))\sin kt - (x_1(t)\cos kt - x_2(t)\sin kt)+$$

$$+ f(t)\varphi(v)\sin kt)\Pi(dv)dt + \int\limits_R (x_1(t)\cos kt - (x_2(t) + f(t)\varphi(v)\sin kt-$$

$$-(x_1(t)\cos kt - x_2(t)\sin kt))\tilde{\nu}(dt,dv),$$

$$dy_1(t) = -f(t)\int\limits_R \varphi(v)\sin kt\tilde{\nu}(dt,dv).$$

Отже, $y_1(t) = -\int_0^t f(s)\sin ks\int_R \varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + u_0.$

Аналогічно знаходимо $y_2(t) = \int_0^t f(s)\cos ks\int_R \varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + \dot{u}_0.$

Отже, розв'язок системи (2) при $q(t)dt = \int_{R^2} f(t)\varphi(v)\tilde{\nu}(dt,dv)$ має вигляд

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\cos kt\int\limits_0^t f(s)\sin ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + \sin kt\int\limits_0^t f(s)\cos ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + u_0, \\ x_2(t) &= \sin kt\int\limits_0^t f(s)\sin ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + \cos kt\int\limits_0^t f(s)\cos ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + \dot{u}_0. \end{aligned} \tag{4}$$

Підставимо розв'язок (4) у (3):

$$2E(t) = \left(-\cos kt\int\limits_0^t f(s)\sin ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + \sin kt\int\limits_0^t f(s)\cos ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + u_0\right)^2 +$$

$$+\left(\sin kt\int\limits_0^t f(s)\sin ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + \cos kt\int\limits_0^t f(s)\cos ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv) + \dot{u}_0\right)^2 =$$

$$= \cos^2 kt\left(\int\limits_0^t f(s)\sin ks\int\limits_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\right)^2 + u_0^2 + \dot{u}_0^2 +$$

$$+\sin^2 kt\left(\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\right)^2-$$

$$-2\cos kt\sin kt\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)+$$

$$+2(-u_0\cos kt+\dot{u}_0\sin kt)\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)+$$

$$+2(u_0\sin kt+\dot{u}_0\cos kt)\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)+$$

$$+\sin^2 kt\left(\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\right)^2+\cos^2 kt\left(\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\right)^2+$$

$$+2\cos kt\sin kt\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)=$$

$$=\left(\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\right)^2+\left(\int_0^t \cos ks\int_{R^2} f(s)\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)+\right)^2+$$

$$+u_0^2+\dot{u}_0^2+2(-u_0\cos kt+\dot{u}_0\sin kt)\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)+$$

$$+2(u_0\sin kt+\dot{u}_0\cos kt)\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv).$$

Знайдемо математичне сподівання повної енергії $E(t)$. Відповідно до властивостей стохастичного інтеграла [7, с. 256]

$$2ME(t)=M\left[\left(\int_0^t\int_{R^2} f(s)\sin ks\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\int_0^t\int_{R^2} f(s)\cos ks\varphi(v)\tilde{\nu}(ds,dv)\right)^2\right]+u_0^2+\dot{u}_0^2+=$$

$$= \int_0^t \int_{R^2} M\left[f(s)\sin ks\varphi(v)\right]^2 \Pi(dv)ds + \int_0^t \int_{R^2} M\left[f(s)\cos ks\varphi(v)\right]^2 \Pi(dv)ds + u_0^2 + \dot{u}_0^2 =$$

$$= \int_0^t f^2(s)\sin^2 ks \int_{R^2} \varphi(v)^2\Pi(dv)ds + \int_0^t f^2(s)\cos^2 ks \int_{R^2} \varphi(v)^2\Pi(dv)ds +$$

$$+ u_0^2 + \dot{u}_0^2 = \int_0^t f^2(s)ds \int_{R^2} \varphi^2(v)\Pi(dv) + u_0^2 + \dot{u}_0^2.$$

Оскільки $f(t)$ — $2l$-періодична функція, то $2l$ теж буде періодом $f^2(t)$. Запишемо інтеграл $\int_0^t f^2(s)\,ds$ таким чином:

$$\int_0^t f^2(s)ds = \int_0^{2l} f^2(s)ds + \int_{2l}^{4l} f^2(s)ds + \ldots + \int_{2([t/2l]-1)l}^{2[t/2l]l} f^2(s)ds + \int_{2[t/2l]l}^{t} f^2(s)ds =$$

$$= \left[\frac{t}{2l}\right] \int_0^{2l} f^2(s)ds + \int_0^{t-2[t/2l]l} f^2(s)ds = \left[\frac{t}{2l}\right] \int_0^{2l} f^2(s)ds + J_1(t),$$

де $J_1(t) = \int_0^{t-2[t/2l]l} f^2(s)ds$. Оскільки $f^2(t)$ неперервна на $[0, t-2[t/2l]l]$, то вона обмежена на $[0, t-2[t/2l]l]$, тому існує $c_1 > 0$ таке, що $|f^2(t)| \le c_1$ для будь-якого $t \ge 0$. Тому маємо

$$|J_1(t)| = \left| \int_0^{t-2[t/2l]l} f^2(s)ds \right| \le c_1\left(t - 2[t/2l]l\right) \le c_1 2l \quad \forall t \ge 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f^2(s)ds = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[\frac{t}{2l}\right]\int_0^{2l} f^2(s)ds + \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}J_1(t) = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f^2(s)ds.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\, 2ME(t) = \frac{1}{2l}\int_0^{2l} f^2(s)ds \int_{R^2} \varphi^2(u)\Pi(du).$$

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай* $u(t)$ *— розв'язок рівняння (2), в якому* $q(t)dt = f(t)\int_{R^2}\varphi(v)\nu(dt,dv)$, $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$, $\nu(t,A)$ *— пуассонівська міра з* $M\nu(t,A) = t\Pi(A)$, $\Pi(A)$ *— міра на*

σ-алгебрі борелевих множин R^2, $\int_{R^2} |\varphi(v)|\Pi(dv) < \infty$, $\int\limits_{R^2} \varphi^2(v)\Pi(dv) < \infty$, $f(t)$ — неперервна $2l$-періодична функція.

Тоді:

1) якщо $\nexists i \in N : k = \dfrac{i\pi}{l}$, то $\lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} ME(t) = \dfrac{1}{4l} \int_0^{2l} f^2(s)ds \int_{R^2} \varphi^2(v)\Pi(dv)$;

2) якщо $\exists i \in N : k = \dfrac{i\pi}{l}$, то $\lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t^2} ME(t) = \dfrac{a_i^2 + b_i^2}{8} \left(\int_{R^2} \varphi(v)\Pi(dv) \right)^2$, де $a_i = \dfrac{1}{l} \int_0^{2l} f(s) \sin \dfrac{i\pi}{l} sds$, $b_i = \dfrac{1}{l} \int_0^{2l} f(s) \cos \dfrac{i\pi}{l} sds$.

Доведення. Як і при доведенні теореми 1, можна показати, що розв'язок системи (2) при $q(t) = \int_{R^2} f(t)\varphi(v)\nu(dt, dv)$ має вигляд

$$x_1(t) = -\cos kt \int\limits_0^t f(s) \sin ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) + \sin kt \int\limits_0^t f(s) \cos ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) + u_0,$$
$$x_2(t) = \sin kt \int\limits_0^t f(s) \sin ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) + \cos kt \int\limits_0^t f(s) \cos ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) + \dot{u}_0. \tag{5}$$

Підставимо розв'язок (5) у (3):

$$2E(t) = \Bigg(-\cos kt \int\limits_0^t f(s) \sin ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) + $$
$$+ \sin kt \int\limits_0^t f(s) \cos ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) + u_0 \Bigg)^2 +$$
$$+ \Bigg(\sin kt \int\limits_0^t f(s) \sin ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) +$$
$$+ \cos kt \int\limits_0^t f(s) \cos ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) + \dot{u}_0 \Bigg)^2 .$$

Знайдемо математичне сподівання $E(t)$:

$$2ME(t) = M \Bigg[\Bigg(-\cos kt \int\limits_0^t f(s) \sin ks \int\limits_{R^2} \varphi(v)\nu(ds, dv) +$$

$$+\sin kt\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)+u_0\Bigg)^2+$$

$$+\Bigg(\sin kt\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)+$$

$$+\cos kt\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)+\dot{u}_0\Bigg)^2\Bigg]=$$

$$=M\left[\left(\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)\right)^2+\left(\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)\right)^2\right]=$$

$$=M\left[\left(\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)\right)^2+\left(\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)\right)^2\right]+$$

$$+M\Bigg[2\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\Pi(dv)ds+$$

$$+2\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\nu(ds,dv)\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\Pi(dv)ds\Bigg]+$$

$$+M\left[\left(\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\Pi(dv)ds\right)^2+\left(\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\Pi(dv)ds\right)^2\right]=$$

$$=\int_0^t f^2(s)\sin^2 ks\int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv)ds+\int_0^t f^2(s)\cos^2 ks\int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv)ds+$$

$$+\left(\int_0^t f(s)\sin ks\int_{R^2}\varphi(v)\Pi(dv)ds\right)^2+\left(\int_0^t f(s)\cos ks\int_{R^2}\varphi(v)\Pi(dv)ds\right)^2=$$

$$=\int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv)\int_0^t f^2(s)ds+\left(\int_{R^2}\varphi(v)\Pi(dv)\right)^2\Bigg[\Bigg[\left(\int_0^t f(s)\sin ks\,ds\right)^2+$$

$$+\left(\int_0^t f(s)\cos ksds\right)^2\Bigg]\Bigg]=\int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv)I_1(t)+\left(\int_{R^2}\varphi(v)\Pi(dv)\right)^2\left[I_2^2(t)+I_3^2(t)\right].$$

Випадок 1: $\nexists i \in N : k = \dfrac{i\pi}{l}$.

Згідно з лемою 2 існує $\exists C > 0$ таке, що

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\underline{\lim_{t\to\infty}}\right)\left(I_2^2(t)+I_3^2(t)\right) = \overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\underline{\lim_{t\to\infty}}\right)\left(\left(\int_0^t f(s)\sin ksds\right)^2 + \left(\int_0^t f(s)\cos ksds\right)^2\right) \le$$

$$\le \overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\underline{\lim_{t\to\infty}}\right)\int_0^t (f(s)\sin ks)^2 ds + \overline{\lim_{t\to\infty}}\left(\underline{\lim_{t\to\infty}}\right)\int_0^t (f(s)\cos ks)^2 ds \le C.$$

Тому $\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}\left(I_2^2(t)+I_3^2(t)\right) = 0$.

За теоремою 1

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv)\int_0^t f^2(s)ds = \int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv)\frac{1}{2l}\int_0^{2l} f^2(s)ds.$$

Отже, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{1}{t}2ME(t) = \displaystyle\int_{R^2}\varphi^2(v)\Pi(dv)\frac{1}{2l}\int_0^{2l} f^2(s)ds$.

Випадок 2: $\exists i \in N : k = \dfrac{i\pi}{l}$.

Оскільки $f(t)$ — $2l$-періодична функція, то $2l$ теж буде періодом $f(t)\sin\dfrac{i\pi}{l}t$. Запишемо інтеграл $\displaystyle\int_0^t \sin\frac{i\pi}{l}sf(s)ds$ у вигляді

$$I_2(t) = \int_0^t f(s)\sin\frac{i\pi}{l}sds = \int_0^{2l} f(s)\sin\frac{i\pi}{l}sds + \int_{2l}^{2l} f(s)\sin\frac{i\pi}{l}sds + \ldots$$

$$\ldots + \int_{2([t/2l]-1)l}^{2[t/2l]l} f(s)\sin\frac{i\pi}{l}sds + \int_{2[t/2l]l}^{t} f(s)\sin\frac{i\pi}{l}sds =$$

$$= \left[\frac{t}{2l}\right]\int_0^{2l} f(s)\sin\frac{i\pi}{l}sds + \int_0^{t-2[t/2l]l} f(s)\sin\frac{i\pi}{l}sds = \left[\frac{t}{2l}\right]a_i l + J_2(t),$$

де $J_2(t) = \displaystyle\int_0^{t-2[t/2l]l} f(s)\sin\frac{i\pi}{l}sds$ і, як при доведенні теореми 1, $\exists c_2 \ge 0 : |J_2(t)| \le c_2 2l$ $\forall t \ge 0$.

Аналогічно

$$I_3(t) = \int_0^t f(s)\cos\frac{i\pi}{l}s\,ds = \left[\frac{t}{2l}\right]b_i l + J_3(t),$$

де

$$J_3(t) = \int\limits_0^{t-2[t/2l]l} f(s) \cos \frac{i\pi}{l}\, s\, ds$$

і $\exists c_3 \geq 0 : |J_3(t)| \leq c_3 2l \;\; \forall t \geq 0.$

Тоді

$$I_2^2(t) + I_3^2(t) = \left[\frac{t}{2l}\right]^2 l^2 \left(a_i^2 + b_i^2\right) + 2\left[\frac{t}{2l}\right] l \left(a_i J_2(t) + b_i J_3(t)\right) + J_2^2(t) + J_3^2(t),$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\left(I_2^2(t) + I_3^2(t)\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2}\left[\frac{t}{2l}\right]^2 l^2 \left(a_i^2 + b_i^2\right) + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} 2\left[\frac{t}{2l}\right] l \left(a_i J_2\left(t\right) + b_i J_3(t)\right) +$$

$$+ \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} J_2^2(t) + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} J_3^2(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4}\left(a_i^2 + b_i^2\right).$$

Інтеграл $I_1(t)$ обраховано у теоремі 1 і $I_1(t) = \left[\frac{t}{2l}\right] \int_0^{2l} f^2(s) ds + J_1(t)$, тому

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} I_1(t) = 0.$$

Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^2} 2ME(t) = \left(\int\limits_{R^2} \varphi(v)\Pi(dv)\right)^2 \frac{a_i^2 + b_i^2}{4}.$$

Теорему доведено.

1. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения вариационного исчисления. — М.: Наука, 1965. — 424 с.
2. *Кулініч Г.Л., Куровський Д. Ю., Петрусенко Д. В.* Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії гармонічного осцилятора при випадковому імпульсному збуренні // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 299 – 306.
3. *Дивнич М. Т., Куровський Д. Ю., Єршов А. В.* Асимптотичний аналіз математичного сподівання повної енергії випадкового гармонічного осцилятора // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, механіка. — 2005. — № 3. — С. 104 – 112.
4. *Kulinich G. L.* On the limiting behaviors of a harmonic oscillator with random external disturbance // Y.A. M.S.A. — 1995. — **8**. — P. 265 – 274.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа: В 3 т. — М.: Гостехтеориздат, 1956. — Т. 2.
6. *Андронов А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М., 1959.
7. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения. — Киев: Наук. думка, 1968.

Одержано 11.03.11,
після доопрацювання — 17.10.13