УДК 517.36

ТЕОРЕМЫ О СВЕДЕНИИ В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. И. Двирный

UiT Арктический ун-т Норвегии
Норвегия, Тромсе
e-mail: dvirny@mail.ru

В. И. Слынько

Ин-т механики НАН Украины
Украина, 03057, Киев, ул. Нестерова, 3
e-mail: vitstab@ukr.net

We substantiate a reduction principle for a class of impulsive differential systems. The class is characterized by the property that the matrices of the linear approximation of the impulsive system are permutable. We reduce the problem of stability of an equilibrium of the impulsive system in the critical case to finding a Lyapunov function for a certain auxiliary (model) impulsive system. The model system contains only the critical variables.

Обгрунтовано принцип зведення для класу систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом (імпульсних систем). Цей клас характеризується властивістю комутативності матриць лінійного наближення імпульсної системи. Основним результатом статті є зведення задачі про стійкість стану рівноваги імпульсної системи у критичному випадку до питання про існування допоміжної функції Ляпунова для деякої допоміжної (модельної) імпульсної системи. Модельна система містить лише критичні змінні.

Введение. Изучение критических случаев в теории устойчивости движения было начато в работе [1]. В дальнейшем устойчивость состояний равновесия в особых (или критических) случаях изучалась во многих работах (см., например, [2 – 7]). Исследованию проблемы устойчивости в критических случаях для некоторых классов функционально-дифференциальных уравнений посвящены работы [8 – 11].

Современное состояние теории устойчивости критических положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений освещено в монографии [7]. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием являются математическими моделями систем, вектор состояния которых претерпевает мгновенные изменения в некоторые моменты времени. Общая теория дифференциальных уравнений с импульсным воздействием изложена в монографии [12]. Там же изложены некоторые обобщения теорем прямого метода Ляпунова для этого класса систем. Другие результаты в этот направлении рассмотрены в работах [13 – 16].

Отметим, что средства современной качественной теории дифференциальных уравнений позволяют значительно упростить исследование устойчивости в критических случаях. Сюда можно отнести приведение системы дифференциальных уравнений в окрестности изучаемого состояния равновесия к нормальной форме А. Пуанкаре и применение теорем о редукции, позволяющие свести исходную задачу об устойчивости критического положения равновесия к исследованию устойчивости равновесия некоторой нелинейной системы, содержащей только „критические” переменные (такие системы, по терминологии [7], называются модельными системами). Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений возможность такого сведения обосновывается на основе теорем о центральном многообразии [7, 17]. Другой подход к теоремам о сведении, основанный на прямом методе Ляпунова, в наиболее общем виде сформулирован в монографии [2].

Для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием проблема устойчивости равновесия является малоизученной. В работе [18] установлен принцип сведения в одном частном случае, когда матрицы линейного приближения являются квазидиагональными. При этом дополнительно предполагается, что блок матрицы линейного приближения дискретной компоненты, соответствующий „критическим” переменным, является нулевым. Основным методом исследования в этой работе избран метод интегральных многообразий Н. Н. Боголюбова [19].

В работах [16, 20] исследуется устойчивость критических положений равновесия некоторых классов дифференциальных уравнений с импульсным воздействием при условии, что все переменные являются „критическими”.

В настоящей работе рассматриваются теоремы о сведении для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. При этом для обоснования теорем о сведении используется прямой метод Ляпунова [2]. При предположении о существовании вспомогательной функции Ляпунова для соответствующей модельной системы строится вспомогательная функция для „полной” системы, предварительно приведенной к нормальной форме А. Пуанкаре. Отметим, что полученные попутно условия устойчивости для модельной системы являются новыми.

1. Постановка задачи. Введем некоторые обозначения и определения, необходимые для дальнейшего изложения. Как обычно, $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$) обозначает комплексное (действительное) n-мерное векторное пространство, $\|.\|$ — некоторая норма в этом пространстве, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. Пусть $a \in \mathbb{R}$, $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [a, \infty)$ — возрастающая последовательность чисел, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности, $\mathcal{T} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\tau_k\}$, $\Lambda = [a, +\infty) \setminus \mathcal{T}$.

Будем считать, что $f \in PC(\Lambda; \mathbb{R}^n)$ ($f \in PC(\Lambda; \mathbb{C}^n)$), если и только если функция $f(t)$ непрерывна слева, а ее сужение на каждый из интервалов (τ_k, τ_{k+1}) является непрерывной функцией и $\sup_{t \in [a, +\infty)} \|f(t)\| < +\infty$.

Аналогично, для последовательности $\{g_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}^n$ будем считать, что $g_k \in P(\mathcal{T}; \mathbb{C}^n)$, если и только если $\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \|g_k\| < +\infty$.

Пусть Ω — связная окрестность точки $x = 0$ и $f : [a, +\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (или $f : \mathbb{N} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$). Тогда будем обозначать $f = O(g)$ равномерно по $t \in [a, \infty)$ (равномерно по $k \in \mathbb{N}$), если существуют положительная постоянная $c_0 > 0$ и окрестность $U \subset \Omega$ точки $x = 0$ такие, что при всех $(t, x) \in [a, +\infty) \times \overline{U}$ (соответственно $(k, x) \in \mathbb{N} \times \overline{U}$) выполняется неравенство

$$\|f(t, x)\| \leq c_0 \|g(x)\| \quad (\|f_k(x)\| \leq c_0 \|g(x)\|).$$

Напомним также определение локально липшицевой в области Ω функции. Функция $f\,:\,[a,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ называется локально липшицевой по переменной x равномерно по переменной $t\in[a,+\infty)$, если для любого компакта $K\subset\Omega$ существует положительная постоянная L такая, что при всех $\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_1\in K$ и $t\in[a,+\infty)$ выполняется неравенство

$$\|f(t,\mathbf{x}_2)-f(t,\mathbf{x}_1)\|\le L\|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1\|.$$

Пусть $x=(x_1,\ldots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, $\nu=(\nu_1,\ldots,\nu_n)\in\mathbb{Z}_+^n$, тогда будем считать, что $x^\nu = x_1^{\nu_1}\ldots x_n^{\nu_n}$, $|\nu|=|\nu_1|+\ldots+|\nu_n|$, $(x,\nu)=\sum_{k=1}^n\nu_kx_k$.

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\frac{d\zeta}{dt}=A\zeta+\sum_{|\nu|=2}^{m}f_\nu(t)\zeta^\nu+\mathfrak{f}_{m+1}(t,\zeta),\quad t\ne\tau_k,\\ \zeta(t+0)=B\zeta(t)+\sum_{|\nu|=2}^{m}g_\nu^k\zeta^\nu(t)+\mathfrak{g}_{m+1,k}(\zeta),\quad t=\tau_k,\end{gathered}\tag{1.1}$$

где $\zeta\in\mathbb{R}^n$, A, B — постоянные $(n\times n)$-матрицы, $f_\nu\in PC(\Lambda;\mathbb{R}^n)$, $g_\nu^k\in P(\mathcal{T};\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{f}_{m+1}\in C([a,+\infty)\times\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\mathfrak{g}_{m+1,k}\in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $a\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}$, Ω — связная окрестность точки $\zeta=0$, $\mathfrak{f}_{m+1}(t,0)=0$, $\mathfrak{g}_{m+1,k}(0)=0$ при всех $k\in\mathbb{N}$, $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность моментов импульсного воздействия, являющаяся возрастающей последовательностью действительных чисел, имеющая единственную точку сгущения на бесконечности и удовлетворяющая неравенству

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\{\tau_{k+1}-\tau_k\}<+\infty.$$

Обозначим через $\zeta(t;t_0,\zeta_0)$, $t_0<\tau$, решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1) с начальными условиями

$$\zeta(t_0;t_0,\zeta_0)=\zeta_0.$$

Решение $\zeta(t;t_0,\zeta_0)$ считается непрерывной слева функцией, т. е. $\zeta(t-0;t_0,\zeta_0)=\zeta(t;t_0,\zeta_0)$. Отметим, что решение задачи Коши $\zeta(t;t_0,\zeta_0)$ существует и единственно (см. [12]).

Предположим, что $\mathfrak{f}_{m+1}(t,\zeta)=O(\|\zeta\|^{m+1})$ и $\mathfrak{g}_{m+1,k}(\zeta)=O(\|\zeta\|^{m+1})$ равномерно по переменной $t\in[a,+\infty)$ и по $k\in\mathbb{N}$ соответственно. Также будем считать, что функция $\mathfrak{f}_{m+1}(t,\zeta)$ является локально липшицевой по переменной ζ в области Ω равномерно по переменной $t\in[a,+\infty)$.

Пусть $AB=BA$. В этом случае матрицы A и B можно одновременно привести к жордановой форме. Для сокращения выкладок дополнительно предположим, что матрица A имеет простую структуру. Случай общей жордановой формы принципиально не отличается от рассматриваемого ниже случая.

В рассматриваемом случае существует линейное невырожденное преобразование T с комплексными коэффициентами, приводящее матрицы A и B одновременно к диагональному виду. Пусть соответствующие диагональные матрицы A_1 и B_1 имеют вид

$$A_1=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n_1},i\omega_1,\ldots,i\omega_{n_2},\varkappa_1,\ldots,\varkappa_{n_3},0,\ldots,0\},$$

$$B_1 = \operatorname{diag}\{\varrho_1, \ldots, \varrho_{n_1}, e^{i\beta_1}, \ldots, e^{i\beta_{n_2}}, \rho_1, \ldots, \rho_{n_3}, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n_4}\},$$

где λ_s, $\varrho_s \in \mathbb{C}$, $s = \overline{1, n_1}$, ω_j, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = \overline{1, n_2}$, $\varkappa_p$, $\rho_p \in \mathbb{R}$, $p = \overline{1, n_3}$, $\sigma_q \in \{-1, +1\}$, $q = \overline{1, n_4}$. Здесь n_1, n_2, n_3, n_4 — неотрицательные целые числа.

Применяя линейное преобразование T к исходной нелинейной системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1), эту систему преобразуем к виду

$$\begin{aligned}
\frac{dz_s}{dt} &= \lambda_s z_s + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} f^{(s)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \neq \tau_k,\\
\frac{dw_j}{dt} &= i\omega_j w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} g^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \neq \tau_k,\\
\frac{dx_p}{dt} &= \varkappa_p x_p + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} r^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \neq \tau_k,\\
\frac{dy_q}{dt} &= \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} s^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t \neq \tau_k,\\
z_s(t+0) &= \varrho_s z_s(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} F^{(sk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t = \tau_k,\\
w_j(t+0) &= e^{i\beta_j} w_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t = \tau_k,\\
x_p(t+0) &= \rho_p x_p(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} R^{(pk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t = \tau_k,\\
y_q(t+0) &= \sigma_q y_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{m} S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2} + O_{m+1}, \quad t = \tau_k.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь и далее $z_s \in \mathbb{C}$, $f^{(s)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C})$, $F^{(sk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T}; \mathbb{C})$, $s = \overline{1, n_1}$, $w_j \in \mathbb{C}$, $g^{(j)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C})$, $G^{(jk)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C})$, $j = \overline{1, n_2}$, $x_p \in \mathbb{R}$, $r^{(p)}_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C})$, $R^{(pk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T}; \mathbb{C})$, $p = \overline{1, n_3}$, $y_q \in \mathbb{R}$, $s^{(q)}_{\nu\mu\tau} \in \mathbb{C}$, $S^{(qk)}_{\nu\mu\tau} \in P(\mathcal{T}; \mathbb{C})$, $q = \overline{1, n_4}$, $\nu = (\nu_1^T, \nu_2^T)^T \in \mathbb{Z}_+^{n_1} \times \mathbb{Z}_+^{n_2}$, $\mu = (\mu_1^T, \mu_2^T)^T \in \mathbb{Z}_+^{n_1} \times \mathbb{Z}_+^{n_2}$, $\tau = (\tau_1^T, \tau_2^T)^T \in \mathbb{Z}_+^{n_3} \times \mathbb{Z}_+^{n_4}$, $O_{m+1} = O((\|z\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{m+1}{2}})$ равномерно по $t \in [a, \infty)$ или $k \in \mathbb{N}$.

Предположим также выполнение следующих неравенств:

$$\max_s \sup_k e^{\operatorname{Re}\lambda_s(\tau_{k+1}-\tau_k)} |\varrho_s| < 1, \quad \max_p \sup_k e^{\varkappa_p(\tau_{k+1}-\tau_k)} |\rho_p| < 1. \tag{1.3}$$

Неравенства (1.3) обосновывают целесообразность введения для переменных $(z, x) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_3}$ названия некритических переменных.

Переменные $(w, y) \in \mathbb{C}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_4}$ называются критическими.

Применив теорию нормальных форм А. Пуанкаре [7, 17], покажем, что при определенных условиях исследование критического положения равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$ сводится к вопросу о существовании вспомогательной функции Ляпунова для следующей системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием:

$$\begin{gathered}
\frac{dw_j}{dt} = i\omega_j w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{g}_{\nu\mu\tau}^{(j)}(t) w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}, \quad t \neq \tau_k, \\
\frac{dy_q}{dt} = \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{s}_{\nu\mu\tau}^{(q)}(t) w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}, \quad t \neq \tau_k, \\
w_j(t+0) = e^{i\beta j} w_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{G}_{\nu\mu\tau}^{(jk)} w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}, \quad t = \tau_k, \\
y_q(t+0) = \sigma_q y_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{S}_{\nu\mu\tau}^{(qk)} w^{\nu}(w^*)^{\mu} y^{\tau}, \quad t = \tau_k,
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь $\overline{g}_{\nu\mu\tau}^{(j)} \in PC(\Lambda; \mathbb{C})$, $\overline{G}_{\nu\mu\tau}^{(jk)} \in P(\mathcal{T}; \mathbb{C})$, $\overline{s}_{\nu\mu\tau}^{(q)} \in PC(\Lambda; \mathbb{C})$, $\overline{S}_{\nu\mu\tau}^{(qk)} \in P(\mathcal{T}; \mathbb{C})$ и N — натуральное число, $2 \leq N \leq m$,

$$\overline{s}_{\nu\mu\tau}^{(q)} = \left(\overline{s}_{\mu\nu\tau}^{(q)}\right)^*, \quad \overline{S}_{\nu\mu\tau}^{(qk)} = \left(\overline{S}_{\mu\nu\tau}^{(qk)}\right)^*.$$

Систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.4), следуя работе [7], будем называть модельной системой.

Рассмотрим нелинейное преобразование переменных $(z, w, x, y) \to (\widetilde{z}, \widetilde{w}, \widetilde{x}, \widetilde{y})$ вида

$$\begin{gathered}
\widetilde{z}_s = z_s + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} Z_{\nu\mu\tau}^{(s)}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2}, \\
\widetilde{w}_j = w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} W_{\nu\mu\tau}^{(j)}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2}, \\
\widetilde{x}_p = x_p + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} X_{\nu\mu\tau}^{(p)}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2}, \\
\widetilde{y}_q = y_q + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} Y_{\nu\mu\tau}^{(q)}(t) z^{\nu_1}(z^*)^{\mu_1} w^{\nu_2}(w^*)^{\mu_2} x^{\tau_1} y^{\tau_2},
\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $Z_{\nu\mu\tau}^{(s)}$, $W_{\nu\mu\tau}^{(j)}$, $X_{\nu\mu\tau}^{(p)}$, $Y_{\nu\mu\tau}^{(q)} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $2 \leq N \leq m$. При этом коэффициенты $X_{\nu\mu\tau}^{(p)}(t)$,

$Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t)$ преобразования (1.5) удовлетворяют условиям

$$(X^{(p)}_{\nu\mu\tau}(t))^* = X^{(p)}_{\mu\nu\tau}(t), \quad (Y^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t))^* = Y^{(q)}_{\mu\nu\tau}(t).$$

Преобразование (1.5) обозначим через $\mathfrak{G}$ и отметим, что это преобразование обратимо в окрестности точки $z = 0,\, w = 0,\, x = 0,\, y = 0$.

Использовав условия (1.3), можно показать, что существуют функции

$$Z_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C}^{n_1}), \quad W_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C}^{n_2}), \quad X_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C}^{n_3}),$$

$$Y_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda; \mathbb{C}^{n_4}), \quad |\nu| + |\mu| + |\tau| = N,$$

такие, что в новых переменных $(\widetilde{z}, \widetilde{w}, \widetilde{x}, \widetilde{y})$ система (1.1) имеет такой же вид, как и система (1.2), причем для соответствующих коэффициентов этой системы (они обозначаются „тильдой”) при всех $(\nu_2^T, \mu_2^T, \tau_2^T)^T \in \mathbb{Z}_+^{n_2} \times \mathbb{Z}_+^{n_2} \times \mathbb{Z}_+^{n_4}$, $k \in \mathbb{N}$, таких, что $2 \le |\nu_2| + |\mu_2| + |\tau_2| \le N$, выполняются равенства

$$\widetilde{f}^{(s)}_{0\nu_2 0\mu_2 0\tau_2}(t) = 0, \quad \widetilde{F}^{(sk)}_{0\nu_2 0\mu_2 0\tau_2} = 0,$$

$$\widetilde{r}^{(p)}_{0\nu_2 0\mu_2 0\tau_2}(t) = 0, \quad \widetilde{R}^{(pk)}_{0\nu_2 0\mu_2 0\tau_2} = 0,$$

а при всех $(\nu^T, \mu^T, \tau^T)^T \in \mathbb{Z}_+^{n_1+n_2} \times \mathbb{Z}_+^{n_1+n_2} \times \mathbb{Z}_+^{n_3+n_4}$ таких, что $|\nu_1| + |\mu_1| + |\tau_1| \neq 0$, $2 \le |\nu| + |\mu| + |\tau| \le N$, выполняются равенства

$$\widetilde{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) = 0, \quad \widetilde{G}^{(jk)}_{\nu\mu\tau} = 0,$$

$$\widetilde{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) = 0, \quad \widetilde{S}^{(qk)}_{\nu\mu\tau} = 0.$$

Тогда систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.5) можно представить в виде

$$\frac{dz_s}{dt} = \lambda_s z_s + \mathfrak{f}_s(t, z, w, x, y) + O_{N+1}, \quad t \neq \tau_k,$$

$$\frac{dw_j}{dt} = i\omega_j w_j + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{g}^{(j)}_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau + O_{N+1}, \quad t \neq \tau_k,$$

$$\frac{dx_p}{dt} = \varkappa_p x_p + \mathfrak{r}_p(t, z, w, y) + O_{N+1}, \quad t \neq \tau_k,$$

$$\frac{dy_q}{dt} = \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{s}^{(q)}_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau + O_{N+1}, \quad t \neq \tau_k, \tag{1.6}$$

$$z_s(t+0) = \varrho_s z_s(t) + \mathfrak{F}_{sk}(z(t), w(t), x(t), y(t)) + O_{N+1}, \quad t = \tau_k,$$

$$w_j(t+0) = e^{i\beta_j} w_j(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{G}_{\nu\mu\tau}^{(jk)} w^\nu(t)(w^*(t))^\mu y^\tau(t) + O_{N+1}, \quad t = \tau_k,$$

$$x_p(t+0) = \rho_p x_p(t) + \mathfrak{R}_{pk}(z(t), w(t), x(t), y(t)) + O_{N+1}, \quad t = \tau_k,$$

$$y_q(t+0) = \sigma_q y_q(t) + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{S}_{\nu\mu\tau}^{(qk)} w^\nu(t)(w^*(t))^\mu y^\tau(t) + O_{N+1}, \quad t = \tau_k.$$

При этом функции $\mathfrak{f}_s$, $\mathfrak{r}_p$, $\mathfrak{F}_{sk}$, $\mathfrak{R}_{pk}$ в достаточно малой окрестности состояния равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$ удовлетворяют равномерно по $t \in [a, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$ асимптотической оценке

$$O(\|z\|^2 + \|x\|^2 + \sqrt{\|z\|^2 + \|x\|^2}\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2}).$$

Отметим, что преобразование $\mathfrak{G}$ не изменяет сути задачи об устойчивости, т. е. задача об устойчивости состояния равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$ исходной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1) и задача об устойчивости состояния равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.6) являются эквивалентными.

В следующем пункте мы установим условия, при которых последняя задача сводится к исследованию устойчивости критического положения равновесия модельной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.4).

2. Теоремы о сведении. Введем класс вспомогательных функций, которые далее будут применяться для исследования устойчивости критического положения равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ системы (1.6). Рассмотрим функцию вида

$$v(t, w, w^*, y) = \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{L} p_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau,$$

где $\nu \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+^{n_2}$, $\tau \in \mathbb{Z}_+^{n_4}$, $p_{\nu\mu\tau} \in PC(\Lambda, \mathbb{C})$, $p_{\nu\mu\tau}(t) = p_{\mu\nu\tau}^*(t)$ при $2 \le |\nu| + |\mu| + {}+|\tau| \le L$, L — натуральное число, $L \ge 2$. Индуктивно определим функции $v_l(t, w, w^*, y)$, $l = 0, 1, \ldots, \chi + 1$, $t \in \Lambda$, χ — натуральное число. Положим $v_0(t, w, w^*, y) = v(t, w, w^*, y)$ и по индукции определим

$$v_l(t, w, w^*, y) = \left.\frac{dv_{l-1}}{dt}\right|_{(1.4)} = \frac{\partial v_{l-1}}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_{l-1}}{\partial w}\right)^T \left(i\Omega w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{g}_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau\right) +$$
$$+ \left(\frac{\partial v_{l-1}}{\partial w^*}\right)^T \left(i\Omega w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{g}_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau\right)^* +$$
$$+ \left(\frac{\partial v_{l-1}}{\partial y}\right)^T \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{s}_{\nu\mu\tau}(t) w^\nu (w^*)^\mu y^\tau.$$

Полная разность функции $v(t,w,w^*,y)$ вдоль решений системы (1.4) при $t=\tau_k$ имеет вид

$$\Delta v|_{(1.4)}(\tau_k,w,w^*,y) = v\left(\tau_k+0, e^{iB}w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{G}^{(k)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu}y^{\tau},\right.$$
$$\left(e^{iB}w + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{G}^{(k)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu}y^{\tau}\right)^*, \Xi y +$$
$$\left. + \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} \overline{S}^{(k)}_{\nu\mu\tau} w^{\nu}(w^*)^{\mu}y^{\tau}\right) - v(\tau_k,w,w^*,y).$$

Здесь $\Omega = \operatorname{diag}(\omega_1,\ldots,\omega_{n_2})$, $B = \operatorname{diag}(\beta_1,\ldots,\beta_{n_2})$, $\Xi = \operatorname{diag}(\sigma_1,\ldots,\sigma_{n_4})$.

Для заданных натуральных чисел k, χ определим выражение

$$\mathcal{V}^{(v)}_{k,\chi}(w,w^*,y) = -\sum_{l=1}^{\chi}(-1)^l \frac{(\tau_k-\tau_{k-1})^l}{l!} v_l(\tau_k,w,w^*,y) + \Delta v|_{(1.4)}(\tau_k,w,w^*,y).$$

Относительно функции $v(t,w,w^*,y)$ и системы (1.1) сделаем следующее предположение.

Предположение 2.1. *Существуют связные окрестности $D\subset\mathbb{C}^{n_2}$ точки $w=0$ и $N\subset\mathbb{R}^{n_4}$ точки $y=0$ такие, что модельная система дифференциальных уравнений (1.4) удовлетворяет условиям:*

1) существуют функции класса Хана $a_1(.)$, $b_1(.)$ такие, что при всех $(t,w,w^*,y)\in$ $\in\Lambda\times D\times D^*\times N$ выполняются неравенства

$$a_1(\sqrt{\|w\|^2+\|y\|^2}) \le v(t,w,w^*,y) \le b_1(\sqrt{\|w\|^2+\|y\|^2});$$

2) существует функция класса Хана $c(.)$ такая, что при всех $(k,w,w^*,y)\in\mathbb{N}\times D\times$ $\times D^*\times N$ выполняется неравенство

$$\mathcal{V}^{(v)}_{k,\chi}(w,w^*,y) \le -c(\sqrt{\|w\|^2+\|y\|^2});$$

3) существует функция класса Хана $d(.)$, для которой существует производная Дини $D^+d(.)$ и при всех $(t,w,w^*,y)\in\Lambda\times D\times D^*\times N$ выполняется неравенство

$$|v_{\chi+1}(t,w,w^*,y)| \le d(\sqrt{\|w\|^2+\|y\|^2});$$

4) существует положительная постоянная $c_1>0$ такая, что при всех $\gamma>0$ функции $c(\cdot)$ и $d(\cdot)$ удовлетворяют при достаточно малых r соотношениям

$$|D^+d(r)| \le c_1 r, \quad \lim_{r\to 0+0}\frac{r^{N+2}}{\sqrt{c(r)}} = 0, \quad \lim_{r\to 0+0}\frac{d(\gamma r)}{c(r)} = 0,$$

где D^+ — верхняя производная Дини.

Для доказательства теорем о сведении предварительно рассмотрим вопрос о построении вспомогательной функции Ляпунова для линейной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{gathered}\frac{dz_s}{dt} = \lambda_s z_s, \quad \frac{dx_p}{dt} = \varkappa_p x_p, \quad t \neq \tau_k, \\ z_s(t+0) = \varrho_s z_s(t), \quad x_p(t+0) = \rho_p x_p(t), \quad t = \tau_k.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\widetilde{v}(t,z,z^*,x) = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}\psi_s(t)|z_s|^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_3}\varphi_p(t)x_p^2,$$

где функции $\psi_s \in PC(\Lambda,\mathbb{R}_+)$, $\varphi_p \in PC(\Lambda,\mathbb{R}_+)$ будут выбраны ниже.

Полная производная функции $\widetilde{v}(t,z,z^*,y)$ вдоль решений системы (2.1) при $t \neq \tau_k$ имеет вид

$$\left.\frac{d\widetilde{v}}{dt}\right|_{(2.1)} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}\left(\frac{d\psi_s}{dt} + 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_s\psi_s(t)\right)|z_s|^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_3}\left(\frac{d\varphi_p}{dt} + 2\varkappa_p\varphi_p(t)\right)x_p^2.$$

Функции $\psi_s(t)$, $\varphi_p(t)$, выберем так, чтобы при всех $t \in \Lambda$ выполнялись равенства

$$\frac{d\psi_s}{dt} + 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_s\psi_s = 0, \quad \frac{d\varphi_p}{dt} + 2\varkappa_p\varphi_p = 0.$$

Тогда $\psi_s(t) = \psi_s(\tau_k+0)e^{-2\,\mathrm{Re}\,\lambda_s(t-\tau_k)}$, $\varphi_p(t) = \varphi_p(\tau_k+0)e^{-2\varkappa_p(t-\tau_k)}$ при всех $t \in (\tau_k,\tau_{k+1}]$. Выберем $\psi_s(\tau_k+0) = 1$, $\varphi_p(\tau_k+0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, тогда

$$\left.\frac{d\widetilde{v}}{dt}\right|_{(2.1)} = 0, \quad t \in \Lambda,$$

и

$$\begin{aligned}\Delta\widetilde{v}|_{(2.1)}(\tau_k, z(\tau_k), z^*(\tau_k), x(\tau_k)) = {} & \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}\left(|\varrho_s|^2 - e^{-2\,\mathrm{Re}\,\lambda_s(\tau_k-\tau_{k-1})}\right)|z_s|^2 + \\ & + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_3}(\rho_p^2 - e^{-2\varkappa_p(\tau_k-\tau_{k-1})})x_p^2.\end{aligned}$$

Из условий (1.3) следует, что

$$q_1 = \max_s\sup_k e^{\mathrm{Re}\,\lambda_s(\tau_k-\tau_{k-1})}|\varrho_s| < 1, \quad q_2 = \max_p\sup_k e^{\varkappa_p(\tau_k-\tau_{k-1})}|\rho_p| < 1,$$

поэтому

$$\Delta\widetilde{v}|_{(2.1)}(\tau_k, z(\tau_k), z^*(\tau_k), x(\tau_k)) \le \frac{1-q_1^{-2}}{2}\sum_{s=1}^{n_1}|\varrho_s|^2|z_s(\tau_k)|^2 + \\ + \frac{1-q_2^{-2}}{2}\sum_{p=1}^{n_2}\rho_p^2 x_p^2(\tau_k) \le -M^2(\|z(\tau_k)\|^2 + \|x(\tau_k)\|^2), \tag{2.2}$$

где $M^2 = \min\left(\frac{q_1^{-2}-1}{2}\,\varrho_{\min}, \frac{q_2^{-2}-1}{2}\,\rho_{\min}\right)$, $\varrho_{\min} = \min_{s=\overline{1,n_1}}|\varrho_s|$, $\rho_{\min} = \min_{p=\overline{1,n_3}}|\rho_p|$.

Очевидно также, что существуют положительные постоянные a_m, a_M, для которых выполняются неравенства

$$a_m(\|z\|^2 + \|x\|^2) \le \widetilde{v}(t, z, z^*, x) \le a_M(\|z\|^2 + \|x\|^2). \tag{2.3}$$

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 2.1. *Предположим, что для модельной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.4) существует функция Ляпунова $v(t, w, w^*, y)$, удовлетворяющая условиям предположения 2.1.*

Тогда критическое положение равновесия $\zeta = 0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательству этой теоремы предпошлем некоторые вспомогательные утверждения, касающиеся оценок решений импульсной системы (1.6). Предварительно введем обозначения: если $H > 0$, то

$$K_H = \{(z, w, x, y) \in \mathbb{C}^{n_1} \times \mathbb{C}^{n_2} \times \mathbb{R}^{n_3} \times \mathbb{R}^{n_4} \mid \|z\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 < H^2\}.$$

Лемма 2.1. *Пусть H — положительная постоянная, $(z_0, w_0, x_0, y_0) \in K_H$, число $T > t_0$ такое, что выполняется включение $(z(t), w(t), x(t), y(t)) \in \overline{K}_H$ при всех $t \in [t_0, T]$.*

Тогда существуют постоянные $L = L(H) > 0$, $C_1 = C_1(H) > 0$ и $C_2 = C_2(H) > 0$ такие, что:

1) при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k] \subset [t_0, T]$ выполняется неравенство

$$\left(\|z(t)\|^2 + \|w(t)\|^2 + \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2\right)^{1/2} \le \\ \le \left(\|z(\tau_k)\|^2 + \|w(\tau_k)\|^2 + \|x(\tau_k)\|^2 + \|y(\tau_k)\|^2\right)^{1/2} e^{L\theta}; \tag{2.4}$$

2) при всех $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}] \cap [t_0, T]$ выполняется неравенство

$$\left(\|z(t)\|^2 + \|w(t)\|^2 + \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2\right)^{1/2} \le \\ \le \left(\|z(\tau_k+0)\|^2 + \|w(\tau_k+0)\|^2 + \|x(\tau_k+0)\|^2 + \|y(\tau_k+0)\|^2\right)^{1/2} e^{L\theta}; \tag{2.5}$$

3) при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k] \subset [t_0, T]$ *выполняется неравенство*

$$\left(\|w(t)\|^2 + \|y(t)\|^2\right)^{1/2} \leq \left(\|w(\tau_k)\|^2 + \|y(\tau_k)\|^2\right)^{1/2} e^{L\theta} + \\ + C_1 \left(\|z(\tau_k)\|^2 + \|w(\tau_k)\|^2 + \|x(\tau_k)\|^2 + \|y(\tau_k)\|^2\right)^{(N+1)/2}; \quad (2.6)$$

4) при всех $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k] \subset [t_0, T]$ *выполняется неравенство*

$$\sqrt{\|z(t)\|^2 + \|x(t)\|^2} \leq \sqrt{\|z(\tau_k)\|^2 + \|x(\tau_k)\|^2} e^{L\theta} + \\ + C_2 \left(\|z(\tau_k)\|^2 + \|w(\tau_k)\|^2 + \|x(\tau_k)\|^2 + \|y(\tau_k)\|^2\right)^{(N+1)/2}. \quad (2.7)$$

Здесь $\theta = \max\{\theta_2, \tau_1 - t_0\}$.

Доказательство. Утверждения 1–3 леммы являются непосредственным следствием утверждения теоремы 4 из монографии [21]. Докажем утверждение 4. Учитывая уравнения (1.6), получаем

$$\left|\frac{d(\|z\|^2 + \|x\|^2)}{dt}\right| = \left|\sum_{s=1}^{n_1}\left(z_s^*\frac{dz_s}{dt} + z_s\frac{dz_s^*}{dt}\right) + \sum_{p=1}^{n_3} 2x_p\frac{dx_p}{dt}\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{s=1}^{n_1} 2\operatorname{Re}\lambda_s|z_s|^2 + \sum_{p=1}^{n_3} 2\rho_p x_p^2\right| + 2\sum_{s=1}^{n_1}|z_s||\mathfrak{f}_s| +$$

$$+ 2\sum_{p=1}^{n_3}|x_p||\mathfrak{r}_p| + 2\sum_{s=1}^{n_1}|z_s||O_{N+1}| + 2\sum_{p=1}^{n_3}|x_p||O_{N+1}|.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\left|\frac{d(\|z\|^2 + \|x\|^2)}{dt}\right| \leq 2\gamma(\|z\|^2 + \|x\|^2) + 2\sqrt{\|z\|^2 + \|x\|^2}\left(\sqrt{\sum_{s=1}^{n_1}|\mathfrak{f}_s|^2 + \sum_{p=1}^{n_3}\mathfrak{r}_p^2} + |O_{N+1}|\right),$$

где $\gamma = \max_{s=\overline{1,n_1}, p=\overline{1,n_3}}\{|\operatorname{Re}\lambda_s|, |\rho_p|\}$.

Обозначим $\omega(t) = \sqrt{\|z\|^2 + \|x\|^2}$, тогда с учетом очевидного равенства

$$\frac{d(\|z\|^2 + \|x\|^2)}{dt} = 2\omega(t)\,\frac{d\omega}{dt}$$

получим

$$\frac{d\omega(t)}{dt} \leq \gamma\omega(t) + \sqrt{\sum_{s=1}^{n_1}|\mathfrak{f}_s|^2 + \sum_{p=1}^{n_3}\mathfrak{r}_p^2} + |O_{N+1}|.$$

Учитывая свойства функций $\mathfrak{f}_s$, $\mathfrak{r}_p$, находим асимптотическое представление, справедливое в достаточно малой окрестности K_H состояния равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$ системы (1.6):

$$\sum_{s=1}^{n_1} |\mathfrak{f}_s|^2 + \sum_{p=1}^{n_3} \mathfrak{r}_p^2 = O\left(\omega^2(t)\left(\|z\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right)\right).$$

Таким образом,

$$\left|\frac{d\omega(t)}{dt}\right| \leq \left(\gamma + O\left(\left(\|z\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{1/2}\right)\right)\omega(t) + |O_{N+1}|.$$

В окрестности K_H состояния равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ системы (1.6) выполняются неравенство

$$O((\|z\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2})) \leq C_1 H$$

и асимптотическое равенство

$$O((\|z(t)\|^2 + \|w(t)\|^2 + \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2)^{(N+1)/2})) =$$

$$= O((\|z(\tau_k)\|^2 + \|w(\tau_k)\|^2 + \|x(\tau_k)\|^2 + \|y(\tau_k)\|^2)^{(N+1)/2}) \stackrel{\text{df}}{=} K$$

при $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$.

Обозначим $\gamma_1 = \gamma + C_1 H$, тогда

$$\frac{d\omega}{dt} \geq -\gamma_1 \omega(t) - K.$$

Пусть $\omega(t) = e^{-\gamma_1(t-\tau_k)}\eta(t)$, тогда

$$\frac{d\eta}{dt} \geq -K e^{\gamma_1(t-\tau_k)}.$$

Интегрируя последнее неравенство в пределах от t до τ_k, имеем

$$\eta(t) \leq \eta(\tau_k) + \frac{K}{\gamma_1}(1 - e^{\gamma_1(t-\tau_k)}), \quad t \in (\tau_{k-1}, \tau_k].$$

Учитывая начальное условие $\eta(\tau_k) = \omega(\tau_k)$, получаем оценку

$$\omega(t) \leq e^{-\gamma_1(t-\tau_k)}\omega(\tau_k) + \frac{K}{\gamma_1}(e^{-\gamma_1(t-\tau_k)} - 1)$$

при $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$.

Из последнего неравенства утверждение 4 леммы 2.1 следует очевидным образом.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Для доказательства теоремы используем вспомогательную функцию $V(t,z,z^*,w,w^*,x,y)$, определенную равенством

$$V(t,z,z^*,w,w^*,x,y) = \widetilde{v}(t,z,z^*,x) + v(t,w,w^*,y).$$

Условие 1 предположения 2.1 и предварительные оценки (2.3) для функции $\widetilde{v}(t,z,z^*,x)$ гарантируют существование функций $a(.)$ и $b(.)$, принадлежащих классу Хана, таких, что в некоторой достаточно малой окрестности K_{R_1}, $R_1 > 0$, состояния равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ системы (1.6) выполняются неравенства

$$a(\sqrt{\|z\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2}) \le V(t,z,z^*,w,w^*,x,y) \le$$
$$\le b(\sqrt{\|z\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2}). \tag{2.8}$$

Рассмотрим некоторое решение $(z(t),w(t),x(t),y(t))$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.6) с начальными условиями $(z_0,w_0,x_0,y_0) \in K_{R_1}$. Обозначим

$$\psi(t) = V(t,z(t),z^*(t),w(t),w^*(t),x(t),y(t)).$$

Пусть T, $T > t_0$, — момент времени такой, что $(z(t),w(t),x(t),y(t)) \in \overline{K}_{R_1}$ при всех $t \in [t_0,T]$ и k — наибольшее натуральное число такое, что $T > \tau_k$. Предположим, что $k \ge 2$, и оценим $\psi(\tau_k+0)$ в достаточно малой окрестности K_{R_1} состояния равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ системы (1.6). Справедливо представление

$$\psi(\tau_k+0) = \psi(\tau_1+0) + \sum_{l=2}^{k}[\widetilde{v}(\tau_l+0,z(\tau_l+0),z^*(\tau_l+0),x(\tau_l+0)) -$$
$$- \widetilde{v}(\tau_l,z(\tau_l),z^*(\tau_l),x(\tau_l)) + \widetilde{v}(\tau_l,z(\tau_l),z^*(\tau_l),x(\tau_l)) -$$
$$- \widetilde{v}(\tau_{l-1}+0,z(\tau_{l-1}+0),z^*(\tau_{l-1}+0),x(\tau_{l-1}+0))] +$$
$$+ \sum_{l=2}^{k}[v(\tau_l+0,w(\tau_l+0),w^*(\tau_l+0),y(\tau_l+0)) -$$
$$- v(\tau_l,w(\tau_l),w^*(\tau_l),y(\tau_l)) + v(\tau_l,w(\tau_l),w^*(\tau_l),y(\tau_l)) -$$
$$- v(\tau_{l-1}+0,w(\tau_{l-1}+0),w^*(\tau_{l-1}+0),y(\tau_{l-1}+0))]. \tag{2.9}$$

Для разности

$$\widetilde{v}(\tau_{l-1}+0,z(\tau_{l-1}+0),z^*(\tau_{l-1}+0),x(\tau_{l-1}+0)) - v(\tau_l,z(\tau_l),z^*(\tau_l),x(\tau_l))$$

рассмотрим представление по формуле конечных приращений

$$\widetilde{v}(\tau_{l-1}+0,z(\tau_{l-1}+0),z^*(\tau_{l-1}+0),x(\tau_{l-1}+0)) - v(\tau_l,z(\tau_l),z^*(\tau_l),x(\tau_l)) =$$
$$= \left.\frac{d\widetilde{v}}{dt}\right|_{(1.6)}(c_l,z(c_l),z^*(c_l),x(c_l))(\tau_{l-1}-\tau_l),$$

где $c_l \in (\tau_{l-1}, \tau_l)$. Как следствие, справедлива оценка

$$\widetilde{v}(\tau_l, z(\tau_l), z^*(\tau_l), x(\tau_l)) \le \widetilde{v}(\tau_{l-1}+0, z(\tau_{l-1}+0), z^*(\tau_{l-1}+0), x(\tau_{l-1}+0)) + \\ + \left|\frac{d\widetilde{v}}{dt}\right|_{(1.6)}(c_l, z(c_l), z^*(c_l), x(c_l))\Bigg|\theta_2.$$

В окрестности K_{R_1} состояния равновесия $z=0$, $w=0$, $x=0$, $y=0$ системы (1.6) справедливы оценки

$$\left|\left.\frac{d\widetilde{v}}{dt}\right|_{(1.6)}(c_l, z(c_l), x(c_l))\right| \le \Bigg|\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}\psi_s(c_l)(z_s(c_l)\mathfrak{f}_s^*(c_l, z(c_l), w(c_l), x(c_l), y(c_l)) + \\ + z_s^*(c_l)\mathfrak{f}_s(c_l, z(c_l), z^*(c_l), w(c_l), x(c_l), y(c_l))) + \\ + \sum_{p=1}^{n_3}\varphi_p(c_l)x_p(c_l)\mathfrak{r}_p(c_l, z(c_l), z^*(c_l), w(c_l), x(c_l), y(c_l)) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}\psi_s(c_l)(z_s(c_l)O_{N+1}^* + z_s^*(c_l)O_{N+1}) + \sum_{p=1}^{n_3}\varphi_p(c_l)x_p(c_l)O_{N+1}\Bigg| \le \\ \le O((\|z(c_l)\|^2 + \|x(c_l)\|^2)\sqrt{\|z(c_l)\|^2 + \|w(c_l)\|^2 + \|x(c_l)\|^2 + \|y(c_l)\|^2}) + \\ + O((\|z(c_l)\|^2 + \|w(c_l)\|^2 + \|x(c_l)\|^2 + \|y(c_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}).$$

Вследствие утверждения 1 леммы 2.1 получаем

$$O((\|z(c_l)\|^2 + \|w(c_l)\|^2 + \|x(c_l)\|^2 + \|y(c_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}) = \\ = O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}).$$

Утверждения 1 и 4 леммы 2.1 позволяют установить равенство

$$O((\|z(c_l)\|^2 + \|x(c_l)\|^2)\sqrt{\|z(c_l)\|^2 + \|w(c_l)\|^2 + \|x(c_l)\|^2 + \|y(c_l)\|^2}) = \\ = O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2)(\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{1}{2}}) + \\ + O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}).$$

Поэтому в окрестности K_{R_1} состояния равновесия $z=0$, $w=0$, $x=0$, $y=0$ системы (1.6) справедлива оценка

$$\widetilde{v}(\tau_l, z(\tau_l), z^*(\tau_l), x(\tau_l)) \le \widetilde{v}(\tau_{l-1}+0, z(\tau_{l-1}+0), z^*(\tau_{l-1}+0), x(\tau_{l-1}+0)) + \\ + O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2)(\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{1}{2}}) + \\ + O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}).$$

Рассмотрим разность

$$\widetilde{v}(\tau_l+0, z(\tau_l+0), z^*(\tau_l+0), x(\tau_l+0)) - \widetilde{v}(\tau_l, z(\tau_l), z^*(\tau_l), x(\tau_l)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}[\psi_s(\tau_l+0)(\varrho_s^* z_s^*(\tau_l) + \mathfrak{F}_{sl}^*(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l)) + O_{N+1}^*)\times$$

$$\times(\varrho_s z_s(\tau_l) + \mathfrak{F}_{sl}(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l)) + O_{N+1}) - \psi_s(\tau_l)|z_s(\tau_l)|^2]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_3}[\varphi_p(\tau_l+0)(\rho_p x_p(\tau_l) + \mathfrak{R}_{pl}(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l)))^2 - \varphi_p(\tau_l)x_p^2(\tau_l)] =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}(\psi_s(\tau_l+0)|\varrho_s|^2 - \psi_s(\tau_l))|z_s(\tau_l)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_3}(\varphi_p(\tau_l+0)\rho_p^2 - \varphi_p(\tau_l))x_p^2(\tau_l)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}(2\,\mathrm{Re}(\varrho_s z_s(\tau_l)\mathfrak{F}_{sl}^*(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l)))+|\mathfrak{F}_{sl}(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l))|)|^2+$$

$$+2\,\mathrm{Re}((\varrho_s z_s(\tau_l) + \mathfrak{F}_{sl}(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l)))O_{N+1}^*) + |O_{N+1}|^2)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_3}[2\rho_p x_p(\tau_l)\mathfrak{R}_{pl}(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l)) + 2\rho_p x_p(\tau_l)O_{N+1}+$$

$$+2\mathfrak{R}_{pl}(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l))O_{N+1} + \mathfrak{R}_{pl}^2(z(\tau_l), w(\tau_l), x(\tau_l), y(\tau_l)) + O_{N+1}^2].$$

Из построения функции $\widetilde{v}(t, z, z^*, x)$ следует неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n_1}(\psi_s(\tau_l+0)|\varrho_s|^2 - \psi_s(\tau_l))|z_s(\tau_l)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n_3}(\varphi_p(\tau_l+0)\rho_p^2 - \varphi_p(\tau_l))x_p^2(\tau_l) \leq$$

$$\leq -M^2(\|z(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2).$$

С учетом свойств функций $\mathfrak{F}_{sk}$ и $\mathfrak{R}_{pk}$ получим оценку полной разности функции $\widetilde{v}(t, z, z^*, x)$ вдоль решений системы (1.6), которая выполняется в достаточно малой окрестности K_{R_1} состояния равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ системы (1.6) (число R_1, если это необходимо, можно уменьшить):

$$\widetilde{v}(\tau_l+0, z(\tau_l+0), z^*(\tau_l+0), x(\tau_l+0)) - \widetilde{v}(\tau_l, z(\tau_l), z^*(\tau_l), x(\tau_l)) \leq -M^2(\|z(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2)+$$

$$+O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2)(\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{1/2})+$$

$$+O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|z(\tau_l)\|\|w(\tau_l)\|)^2 + (\|x(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|\|y(\tau_l)\|)^2)+$$

$$+O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}). \tag{2.10}$$

Для разности

$$v(\tau_{l-1}+0, w(\tau_{l-1}+0), w^*(\tau_{l-1}+0), y(\tau_{l-1}+0)) - v(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l))$$

рассмотрим разложение в ряд Тейлора

$$
\begin{aligned}
&v(\tau_{l-1}+0, w(\tau_{l-1}+0), w^*(\tau_{l-1}+0), y(\tau_{l-1}+0)) - v(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l)) = \\
&= v_1(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l))(\tau_{l-1}-\tau_l) + \ldots \\
&\quad \ldots + \frac{v_\chi(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l))}{\chi!}(\tau_{l-1}-\tau_l)^\chi + \\
&\quad + \frac{v_{\chi+1}(\widetilde{c}_l, w(\widetilde{c}_l), w^*(\widetilde{c}_l), y(\widetilde{c}_l))}{(\chi+1)!}(\tau_{l-1}-\tau_l)^{\chi+1} + \\
&\quad + O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}) \geq \\
&\geq \sum_{\eta=1}^{\chi}(-1)^\eta \frac{v_\eta(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l))}{\eta!}(\tau_l-\tau_{l-1})^\eta - \\
&\quad - \frac{\theta_2^{\chi+1} d(\sqrt{\|w(\widetilde{c}_l)\|^2 + \|y(\widetilde{c}_l)\|^2})}{(\chi+1)!} + \\
&\quad + O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}).
\end{aligned}
$$

Здесь $\widetilde{c}_l \in (\tau_{l-1}, \tau_l)$.

Используя утверждение 3 леммы 2.1 и свойства функции $d(.)$, получаем цепочку неравенств

$$
\begin{aligned}
&d(\sqrt{\|w(\widetilde{c}_l)\|^2 + \|y(\widetilde{c}_l)\|^2}) \leq d((\|w(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{1/2} e^{L\theta} + \\
&\quad + O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+1}{2}})) \leq d((\|w(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{1/2} e^{L\theta}) + \\
&\quad + O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}).
\end{aligned}
$$

Окончательно получим оценку

$$
\begin{aligned}
&v(\tau_{l-1}+0, w(\tau_{l-1}+0), w^*(\tau_{l-1}+0), y(\tau_{l-1}+0)) - v(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l)) \geq \\
&\geq \sum_{\eta=1}^{\chi}(-1)^\eta \frac{v_\eta(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l))}{\eta!}(\tau_l-\tau_{l-1})^\eta - \\
&\quad - \frac{\theta_2^{\chi+1} d(e^{L\theta}\sqrt{\|w(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2})}{(\chi+1)!} + \\
&\quad + O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}). \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Если это необходимо, уменьшая число R_1, приходим к выводу, что в окрестности K_{R_1}

состояния равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$ системы (1.6) справедлива оценка

$$v(\tau_l + 0, w(\tau_l + 0), w^*(\tau_l + 0), y(\tau_l + 0)) - v(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l)) \le \Delta v|_{(1.5)} +$$

$$+ \int\limits_0^1 \left(\left\| \frac{\partial v}{\partial w} (\tau_l + 0, w^\eta, (w^*)^\eta, y^\eta) \right\| \|O_{N+1}\| + \left\| \frac{\partial v}{\partial w^*} (\tau_l + 0, w^\eta, (w^*)^\eta, y^\eta) \right\| \|O_{N+1}\| + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial v}{\partial y} (\tau_l + 0, (w^*)^\eta, y^\eta) \right\| \|O_{N+1}\| \right) d\eta,$$

где $\eta \in (0, 1)$ и

$$w_j^\eta = e^{i\beta_j} w_j + \eta \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} G_{\nu\mu\tau}^{(jk)} w^\nu (w^*)^\mu v^\tau,$$

$$y_q^\eta = \sigma_q y_q + \eta \sum_{|\nu|+|\mu|+|\tau|=2}^{N} S_{\nu\mu\tau}^{(qk)} w^\nu (w^*)^\mu v^\tau.$$

Как следствие, получим неравенство, которое выполняется в окрестности K_{R_1} состояния равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$ системы (1.6):

$$v(\tau_l + 0, w(\tau_l + 0), w^*(\tau_l + 0), y(\tau_l + 0)) - v(\tau_l, w(\tau_l), w^*(\tau_l), y(\tau_l)) \le \Delta v|_{(1.4)} +$$

$$+ O\left((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}} \right). \tag{2.12}$$

Подставляя в формулу (2.9) оценки (2.10) – (2.12), получаем неравенство

$$\psi(\tau_k + 0) \le \psi(\tau_1 + 0) + \sum_{l=2}^{k} \Bigg[- M^2(\|z(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2) +$$

$$+ O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2)\sqrt{\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2}) -$$

$$- c(\sqrt{\|w(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2}) + \frac{\theta_2^{\chi+1} d(e^{L\theta}\sqrt{\|w(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2})}{(\chi+1)!} +$$

$$+ O((\|z(\tau_l)\|^2 + \|w(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2)^{\frac{N+2}{2}}) \Bigg]. \tag{2.13}$$

Выберем положительное число R, $0 < R < R_1$, так, чтобы при всех $(z, w, x, y) \in K_R$ выполнялись неравенства

$$\frac{\theta_2^{\chi+1} d(e^{L\theta}\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2})}{c(\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2})(\chi+1)!} < \frac{1}{2},$$

$$|O((\|z\|^2+\|x\|^2)(\|z\|^2+\|w\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2)^{1/2})| <$$
$$< \frac{M^2}{2}(\|z\|^2+\|x\|^2)|O((\|z\|^2+\|w\|^2+\|x\|^2+\|y\|^2)^{\frac{N+2}{2}})| \leq$$
$$\leq \frac{1}{4}(M^2(\|z\|^2+\|x\|^2)+c(\sqrt{\|w\|^2+\|y\|^2})).$$

Последнее неравенство является следствием условий 4 предположения 2.1 относительно функции $c(.)$.

Выберем число T_1, $t_0 < T_1 < T$, так, чтобы при всех $t \in [t_0, T_1]$ выполнялось включение $(z(t), w(t), x(t), y(t)) \in \overline{K}_R$. Тогда при всех k таких, что $[t_0, \tau_k] \subset [t_0, T_1)$, имеет место неравенство

$$\psi(\tau_k+0) \leq \psi(\tau_1+0) - \frac{1}{4}\sum_{l=2}^{k}\left[M^2(\|z(\tau_l)\|^2+\|x(\tau_l)\|^2)+c(\sqrt{\|w(\tau_l)\|^2+\|y(\tau_l)\|^2})\right]. \quad (2.14)$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем положительное число

$$\delta(\varepsilon, t_0) = \min\left\{e^{-L_1\theta}b^{-1}(a(Re^{-L\theta})), e^{-L_1\theta}b^{-1}(a(\varepsilon e^{-L\theta}))\right\}.$$

Рассмотрим решение $(z(t), w(t), x(t), y(t))$ задачи Коши для системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.6) с начальными условиями $(z_0, w_0, x_0, y_0) \in K_\delta$. Докажем, что в этом случае при всех $t \geq t_0$ выполняется неравенство (2.14). Действительно, предположим от противного, что существует момент времени $t^* > t_0$ такой, что

$$(z(t), w(t), x(t), y(t)) \in K_R, \quad t \in [t_0, t^*),$$
$$\|z(t^*)\|^2+\|w(t^*)\|^2+\|x(t^*)\|^2+\|y(t^*)\|^2 \geq R^2.$$

Если $t^* < \tau_1$, то применение леммы Гронуолла – Беллмана приводит к противоречию с выбором $\delta(\varepsilon, t_0)$.

Обозначим через k_0 наибольшее натуральное число, для которого выполняется неравенство $t^* > \tau_{k_0}$. Тогда из неравенства (2.14) следует, что

$$\psi(\tau_{k_0}+0) \leq \psi(\tau_1+0). \quad (2.15)$$

Как следствие последнего неравенства, с учетом утверждения 1 леммы 2.1 получаем

$$a(Re^{-L\theta}) \leq a((\|z(t^*)\|^2+\|w(t^*)\|^2+\|x(t^*)\|^2+\|y(t^*)\|^2)^{1/2}e^{-L\theta}) \leq$$
$$\leq a((\|z(\tau_{k_0}+0)\|^2+\|w(\tau_{k_0}+0)\|^2+\|x(\tau_{k_0}+0)\|^2+\|y(\tau_{k_0}+0)\|^2)^{1/2}) \leq$$
$$\leq \psi(\tau_{k_0}+0) \leq \psi(\tau_1+0) \leq$$
$$\leq b((\|z(\tau_1+0)\|^2+\|w(\tau_1+0)\|^2+\|x(\tau_1+0)\|^2+\|y(\tau_1+0)\|^2)^{1/2}) \leq$$
$$\leq b(e^{L_1\theta}\|z_0\|^2+\|w_0\|^2+\|x_0\|^2+\|y_0\|^2)^{1/2}) < a(Re^{-L\theta}).$$

Полученное противоречие доказывает, что неравенство (2.14) выполняется при всех натуральных числах k, поэтому неравенство (2.15) также выполняется при всех натуральных числах k.

Особо отметим, что поскольку $(z(t), w(t), x(t), y(t)) \in K_R$ при всех $t \geq t_0$, из утверждения теоремы 2.1 из монографии [12] следует, что любое решение с начальными условиями $(z_0, w_0, x_0, y_0) \in K_\delta$ является бесконечно продолжимым.

Докажем устойчивость состояния равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$. Предположим, что существует момент времени t^{**}, $t^{**} > t_0$, такой, что

$$\|z(t^{**})\|^2 + \|w(t^{**})\|^2 + \|x(t^{**})\|^2 + \|y(t^{**})\|^2 \geq \varepsilon^2.$$

Если $t^{**} < \tau_1$, то, используя утверждение 1 леммы 2.1, можно прийти к противоречию, поэтому можно считать, что $t^{**} > \tau_1$. Обозначим через k_1 наибольшее натуральное число такое, что $t^{**} > \tau_{k_1}$, тогда

$$\begin{aligned} a(\varepsilon e^{-L\theta}) &\leq a((\|z(t^{**})\|^2 + \|w(t^{**})\|^2 + \|x(t^{**})\|^2 + \|y(t^{**})\|^2)^{1/2} e^{-L\theta}) \leq \\ &\leq a((\|z(\tau_{k_1}+0)\|^2 + \|w(\tau_{k_1}+0)\|^2 + \|x(\tau_{k_1}+0)\|^2 + \|y(\tau_{k_1}+0)\|^2)^{1/2}) \leq \\ &\leq \psi(\tau_{k_1}+0) \leq \psi(\tau_1+0) \leq \\ &\leq b((\|z(\tau_1+0)\|^2 + \|w(\tau_1+0)\|^2 + \|x(\tau_1+0)\|^2 + \|y(\tau_1+0)\|^2)^{1/2}) \leq \\ &\leq b(e^{L_1\theta}(\|z_0\|^2 + \|w_0\|^2 + \|x_0\|^2 + \|y_0\|^2)^{1/2}) < a(\varepsilon e^{-L\theta}). \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает устойчивость состояния равновесия $z = 0, w = 0,$ $x = 0, y = 0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.6).

Рассмотрим далее вопрос об асимптотической устойчивости состояния равновесия $z = 0, w = 0, x = 0, y = 0$ системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (1.6). Выберем $\rho(t_0) = a(Re^{-L\theta})$ и покажем, что неравенство $\|z_0\|^2 + \|w_0\|^2 + \|x_0\|^2 + \|y_0\|^2 < \rho^2(t_0)$ влечет за собой выполнение предельного соотношения

$$\lim_{t\to\infty}(\|z(t)\|^2 + \|w(t)\|^2 + \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2) = 0.$$

Последовательность $\{\psi(\tau_k+0)\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает, поэтому существует постоянная $\alpha, \alpha \geq 0$, такая, что

$$\alpha = \lim_{k\to\infty}\psi(\tau_k+0) = \inf_k \psi(\tau_k+0).$$

Предположим сначала, что $\alpha > 0$. Покажем, что в этом случае

$$\inf_k(\|z(\tau_k+0)\|^2 + \|w(\tau_k+0)\|^2 + \|x(\tau_k+0)\|^2 + \|y(\tau_k+0)\|^2) = \beta^2 > 0.$$

Действительно, если $\beta = 0$, то существует подпоследовательность $\{(z(\tau_{n_k}+0), w(\tau_{n_k}+0), x(\tau_{n_k}+0), y(\tau_{n_k}+0))\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{(z(\tau_k+0), w(\tau_k+0), x(\tau_k+0), y(\tau_k+0))\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к нулю при $k \to \infty$. В этом случае из теоремы следует, что

$$0 < \alpha \leq \psi(\tau_{n_k}+0) \leq b((\|z(\tau_{n_k}+0)\|^2 + \|w(\tau_{n_k}+0)\|^2 + \|x(\tau_{n_k}+0)\|^2 + \|y(\tau_{n_k}+0)\|^2)^{1/2}).$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в последнем неравенстве, приходим к противоречию, из которого заключаем, что

$$\|z(\tau_k+0)\|^2 + \|w(\tau_k+0)\|^2 + \|x(\tau_k+0)\|^2 + \|y(\tau_k+0)\|^2 \geq \beta^2 > 0$$

при всех $k \in \mathbb{N}$. Отметим, что для заданного числа $\beta > 0$ существует положительное число $\kappa = \kappa(\beta) > 0$ такое, что из неравенства

$$\|z\|^2 + \|w\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \geq \beta^2 > 0$$

следует неравенство

$$M^2(\|z\|^2 + \|x\|^2) + c(\sqrt{\|w\|^2 + \|y\|^2}) \geq \kappa.$$

Поэтому из неравенства (2.14) следует, что

$$\psi(\tau_k+0) = \psi(\tau_1+0) - \frac{1}{4}\sum_{l=2}^{k}\Big[M^2(\|z(\tau_l)\|^2 + \|x(\tau_l)\|^2) + c(\sqrt{\|w(\tau_l)\|^2 + \|y(\tau_l)\|^2})\Big] \leq$$

$$\leq \psi(\tau_1+0) - \frac{\kappa(k-1)}{4}. \tag{2.16}$$

При достаточно больших натуральных числах k из неравенства (2.16) получим противоречие. Таким образом, $\alpha = 0$. Обозначим

$$\gamma_1 = \limsup_{k\to\infty}\sqrt{\|z(\tau_k+0)\|^2 + \|w(\tau_k+0)\|^2 + \|x(\tau_k+0)\|^2 + \|y(\tau_k+0)\|^2}.$$

Из оценки

$$a(\sqrt{\|z(\tau_k+0)\|^2 + \|w(\tau_k+0)\|^2 + \|x(\tau_k+0)\|^2 + \|y(\tau_k+0)\|^2}) \leq \psi(\tau_k+0)$$

следует, что $a(\gamma_1) = 0$, откуда $\gamma_1 = 0$. Применение утверждения 1 леммы 2.1 завершает доказательство асимптотической устойчивости состояния равновесия $z = 0$, $w = 0$, $x = 0$, $y = 0$ системы (1.6).

Теорема доказана.

Заключение. Теорема 2.1 позволяет свести задачу об устойчивости критического положения равновесия нелинейной системы к исследованию модельной системы. Порядок этой системы зависит от числа условий вырождения (коразмерности) критического случая. Поэтому для наиболее типичных критических случаев порядок модельной системы невысокий [7] и построение вспомогательной функции Ляпунова не представляет значительных технических трудностей. Теорема 2.1 обобщает известные теоремы прямого метода Ляпунова для дифференциальных уравнений с импульсным воздействием [12–14] и позволяет упростить построение вспомогательных функций Ляпунова. Отметим также, что существенным предположением, принятым в настоящей работе, является требование коммутирования матриц линейного приближения, что связано с необходимостью приведения системы к нормальной форме А. Пуанкаре. Изучение общего случая требует дальнейших исследований и развития новых подходов.

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. — М.; Л.: Гостехиздат, 1950. — 473 с.
2. *Каменков Г. В.* Избранные труды. — М.: Наука, 1971. — Т. I, II.
3. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.
4. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 211 с.
5. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
6. *Савченко А. Я., Игнатьев А. О.* Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем. — Киев: Наук. думка, 1989. — 208 с.
7. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия. — Пущино: Изд-во НЦБИ АН СССР, 1985. — 216 с.
8. *Шиманов С. Н.* Об устойчивости в критическом случае одного нулевого корня для систем с последействием // Прикл. математика и механика. — 1960. — **24**, № 3. — С. 447–457.
9. *Осипов Ю. С.* О принципе сведения в критических случаях устойчивости движения систем с запаздыванием времени // Прикл. математика и механика. — 1965. — **29**, № 5. — С. 810–820.
10. *Колесов Ю. С.* Исследование устойчивости решений параболических уравнений второго порядка в критическом случае// Изв. РАН. Сер., мат. — 1969. — **33**. — С. 1356–1372.
11. *Сергеев В. С.* Об устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений в критических случаях // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. — Новосибирск: Наука, 1991. — С. 110–115.
12. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 288 с.
13. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1989.
14. *Liu X., Willms A. R.* Stability analysis and applications to large scale impulsive systems: a new approach // Can. Appli. Math. Quart. — 1995. — **3**, № 4 — P. 419–444.
15. *Ignat'ev A. O., Ignat'ev O. A.* Stability of solutions of systems with impulse effect // Progress in Nonlinear Anal. Res. — Nova Sci. Publ., Inc., 2009. — P. 363–389.
16. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Об устойчивости решений нестационарных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в одном критическом случае // Нелінійні коливання. — 2011. — **14**, № 4. — С. 445–467.
17. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Динамические системы-1. — М.: ВИНИТИ, 1985. — С. 7–149.
18. *Черникова О. С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием // Укр. мат. журн. — 1982. — **34**, № 6. — С. 601–607.
19. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. — М.: Наука, 1973. — 512 с.
20. *Двирный А. И., Слынько В. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях // Сиб. мат. журн. — 2011. — **52**, № 1. — С. 70–80.
21. *Зубов В. И.* Теория колебаний. — М.: Высш. шк., 1979. — 400 с.

Получено 20.02.13