НЕЛІНІЙНІ КОЛИВАННЯ т. 2 • № 3 • 1999

УДК 517 . 95

ПРО АНАЛІТИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І НЕЛІНІЙНИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТІВ

А. Г. Пелюх

Ін-т математики НАН України,
Україна, 252601, Київ, вул. Терещенківська, 3
e-mail: pel@imath.kiev.ua

We have established the sufficient conditions of existence and uniqueness of a analytical solution of the Caushy problem for one class of nonlinear differential-functional partial equations.

Одержані достатні умови існування і єдиності аналітичного розв'язку задачі Коші для одного класу нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з частинними похідними.

Розглянемо рівняння вигляду

$$u'_t(t,x) = \sum_{i=1}^{k} a_i u'_t(f_i(t), \tilde{f}_i(x)) + F(t, x, u(\varphi_1(t), \tilde{\varphi}_1(t)), \ldots$$

$$\ldots, u(\varphi_l(t), \tilde{\varphi}_l(x)), u'_x(\psi_1(t), \tilde{\psi}_1(x)), \ldots, u'_x(\psi_m(t), \tilde{\psi}_m(x))), \tag{1}$$

де a_i, $i = \overline{1,k}$, — дійсні сталі; $f_{i_1}(t)$, $\tilde{f}_{i_1}(x)$, $i_1 = \overline{1,k}$, $\varphi_{i_2}(t)$, $\tilde{\varphi}_{i_2}(x)$, $i_2 = \overline{1,l}$, $\psi_{i_3}(t)$, $\tilde{\psi}_{i_3}(x)$, $i_3 = \overline{1,m}$, — деякі дійсні функції дійсних змінних, що є аналітичними в деякому околі точки $t = 0$; функція $F(t, x, u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_m)$ є аналітичною в деякому околі точки $(0, 0, 0, \ldots, 0)$. Будемо вивчати питання про існування і єдиність розв'язку, який є аналітичним в околі точки $(0, 0)$ і задовольняє умову

$$u(0, x) = 0. \tag{2}$$

При різних припущеннях задача (1), (2) розглядалась багатьма математиками. Зокрема, в [1, 2] наведені достатні умови існування аналітичного в деякому околі точки $(0, 0)$ розв'язку задачі (1), (2) у випадку, коли $f_i(t) = t$, $\tilde{f}_i(x) = x$, $i = \overline{1,k}$, $\varphi_i(t) = t$, $\tilde{\varphi}_i(x) = x$, $i = \overline{1,l}$, $\psi_i(t) = t$, $\tilde{\psi}_i(x) = x$, $i = \overline{1,m}$. Аналогічні результати для деяких класів диференціально-функціональних рівнянь вигляду (1) одержані в [3, 4]. Метою даної роботи є одержання достатніх умов існування і єдиності аналітичного в деякому околі точки $(0, 0)$ розв'язку задачі (1), (2).

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) функції $f_{i_1}(t), \tilde{f}_{i_1}(x)$, $i_1 = \overline{1,k}$, $\varphi_{i_2}(t)$, $\tilde{\varphi}_{i_2}(x)$, $i_2 = \overline{1,l}$, $\psi_{i_3}(t)$, $\tilde{\psi}_{i_3}(x)$, $i_3 = \overline{1,m}$, $F(t,x,u_1,\ldots,u_l,v_1,\ldots,v_m)$ *розкладаються в степеневі ряди*

$$\begin{aligned}
&f_{i_1}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} f_{i_1 j} t^j, \tilde{f}_{i_1}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{f}_{i_1 j} x^j,\ i_1 = \overline{1,k},\\
&\varphi_{i_2}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{i_2 j} t^j,\ \tilde{\varphi}_{i_2}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_{i_2 j} x^j,\ i_2 = \overline{1,l},\\
&\psi_{i_3}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_{i_3 j} t^j,\ \tilde{\psi}_{i_3}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{i_3 j} x^j,\ i_3 = \overline{1,m},\\
&F(t,x,u_1,\ldots,u_l,v_1,\ldots,v_m) \ = \sum_{j_1+\cdots+j_{l+m+2}=0}^{\infty} F_{j_1 j_2 \cdots j_{l+m+2}} \times\\
&\qquad\qquad \times t^{j_1} x^{j_2} u_1^{j_3} \cdots v_m^{j_{l+m+2}},
\end{aligned} \tag{3}$$

які збігаються при $|t| < a$, $|x| < a$, $|u_{i_1}| < b$, $i_1 = \overline{1,l}$, $|v_{i_2}| < b$, $i_2 = \overline{1,m}$, *де* a, b — *деякі додатні сталі;*

2) $0 < f_{i_1 1} < 1$, $0 < \tilde{f}_{i_1 1} < 1$, $i_1 = \overline{1,k}$, $0 < \varphi_{i_2 1} < 1$, $0 < \tilde{\varphi}_{i_2 1} < 1$, $i_2 = \overline{1,l}$, $0 < \psi_{i_3 1} < 1$, $0 < \tilde{\psi}_{i_3 1} < 1$, $i_3 = \overline{1,m}$;

3) $\sum\limits_{i_1=1}^{k} |a_{i_1}| < 1$.

Тоді в деякому околі точки $(0,0)$ *існує єдиний аналітичний розв'язок задачі (1), (2).*

Доведення. Нехай в околі точки $(0,0)$ існує аналітичний розв'язок $u(t,x)$ задачі (1), (2). Тоді в деякому (достатньо малому) околі точки $(0,0)$ функція $u(t,x)$ розкладається в збіжний степеневий ряд

$$u(t,x) = \sum_{i+j=0}^{\infty} u_{ij} t^i x^j, \tag{4}$$

причому

$$u_{ij} = \frac{1}{i!\,j!} \frac{\partial^{i+j} u(t,x)}{\partial t^i \partial x^j}\bigg|_{\substack{t=0\\x=0}},\ i+j \geq 0. \tag{5}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1 – 3 теореми цей розв'язок єдиний. Для цього, очевидно, достатньо показати, що значення всіх похідних $\dfrac{\partial^{i+j} u(t,x)}{\partial t^i \partial x^j}$, $i+j = 0,1,\ldots$, в точці $(0,0)$ однозначно визначаються із тотожностей, в які перетворюються співвідношення (1), (2) після підстановки в них розв'язку (4).

Дійсно, нехай в (1),(2) підставлено розв'язок (4). Тоді послідовно диференціюючи тотожності (2), (1) по x, одержуємо

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} \ = \ 0,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t\partial x} &= \sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(f_{i_1}(t),\tilde f_{i_1}(x))\frac{d\tilde f_{i_1}(x)}{dx} + \frac{\partial F(\cdot)}{\partial x} + \\
&+ \sum_{i_1=1}^{l}\frac{\partial F(\cdot)}{\partial u_{i_1}}\frac{\partial u}{\partial x}(\varphi_{i_1}(t),\tilde\varphi_{i_1}(x))\frac{d\tilde\varphi_{i_1}(x)}{dx} + \\
&+ \sum_{i_1=1}^{m}\frac{\partial F(\cdot)}{\partial v_{i_1}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\psi_{i_1}(t),\tilde\psi_{i_1}(x))\frac{d\tilde\psi_{i_1}(x)}{dx}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\partial^j u(0,x)}{\partial x^j} &= 0,
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^{1+j} u(t,x)}{\partial t\partial x^j} = \sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}\frac{\partial^{1+j} u}{\partial t\partial x^j}(f_{i_1}(t),\tilde f_{i_1}(x))\left(\frac{d\tilde f_{i_1}(x)}{dx}\right)^j + P_{1j}(t,x),\ \ j>1,$$

де $F(\cdot) = F(t,x,u(\varphi_1(t),\tilde\varphi_1(x)),\ldots,u(\varphi_l(t),\tilde\varphi_l(x)),u'_x(\psi_1(t),\tilde\psi_1(x)),\ldots,u'_x(\psi_m(t),\tilde\psi_m(x))), P_{1j}(t,x),\ j > 1$, — деякі вирази відносно a_{i_1}, $\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}(f_{i_1}(t),\tilde f_{i_1}(x)),\ldots,\frac{\partial^j u}{\partial t\partial x^{j-1}}(f_{i_1}(t),\tilde f_{i_1}(x)),\ \frac{\partial u}{\partial x}(\varphi_{i_2}^{(t)},\tilde\varphi_{i_2}(x)),\ldots$ $\ldots,\frac{\partial^j u}{\partial x^j}(\varphi_{i_2}(t),\tilde\varphi_{i_2}(x)),\ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\psi_{i_3}(t),\tilde\psi_{i_3}(x)),\ldots,\frac{\partial^{j+1} u}{\partial x^{j+1}}(\psi_{i_3}^{(t)},\tilde\psi_{i_3}(x)),\ \ \frac{d\tilde\varphi_{i_2}(x)}{dx},\ldots,\frac{d^j\tilde\varphi_{i_2}(x)}{dx^j},\ \ \frac{d\tilde\psi_{i_3}(x)}{dx},\ldots$ $\ldots,\frac{d^j\tilde\psi_{i_3}(x)}{dx^j},\ \ \frac{\partial F(\cdot)}{\partial x^{j_0}\partial u_1^{j_1}\ldots\partial u_l^{j_l}\partial v_1^{p_1}\ldots\partial v_m^{p_m}},\ \ j_0+j_1+\cdots+j_l+p_1+\cdots+p_m = 1,\ldots$ $\ldots,\frac{\partial^j F(\cdot)}{\partial x^{j_0}\partial u_1^{j_1}\ldots\partial u_l^{j_l}\partial v_1^{p_1}\ldots\partial v_m^{p_m}},\ j_0+j_1+\cdots+j_l+p_1+\cdots+p_m = j$, над якими виконуються лише операції додавання і множення.

Останні тотожності і умова 3 теореми дають можливість послідовно визначити значення похідних $\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j},\ \frac{\partial^{1+j} u(t,x)}{\partial t\partial x^j},\ j=0,1,\ldots$, при $t=0,\ x=0$:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial x^j}\right|_{\substack{t=0\\x=0}} &= 0, \\
\left.\frac{\partial^{1+j} u(t,x)}{\partial t\partial x^j}\right|_{\substack{t=0\\x=0}} &= \left(1-\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}\tilde f_{i_1 1}^{\,j}\right)^{-1} P_{1j}(0,0),\ \ j\ge 0.
\end{aligned}\tag{6}$$

Зокрема, при $j=0$ маємо

$$\begin{aligned}
u(0,0) &= 0, \\
u'_t(0,0) &= \left(1-\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}\right)^{-1} F(0,0,0,\ldots,0).
\end{aligned}$$

Продиференціювавши тепер тотожність (1) один раз по t і j разів по x, одержимо

$$\frac{\partial^{2+j}u(t,x)}{\partial t^2\partial x^j} = \sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}\frac{\partial^{2+j}u(f_{i_1}(t),\tilde{f}_{i_1}(x))}{\partial t^2\partial x^j}\frac{df_{i_1}(t)}{dt}\left(\frac{d\tilde{f}_{i_1}(x)}{dx}\right)^j +$$

$$+ P_{2j}(t,x),\ j \ge 0, \tag{7}$$

де $P_{2j}(t,x)$, $j \ge 0$, — деякі вирази відносно a_{i_1}, $f'_{i_1}(t), \tilde{f}'_{i_1}(x), \ldots, \tilde{f}^{(j)}_{i_1}(x)$, $i_1 = \overline{1,k}$, $\varphi'_{i_2}(t)$, $\tilde{\varphi}'_{i_2}(x), \ldots, \tilde{\varphi}^{(j)}_{i_2}(x)$, $i_2 = \overline{1,l}$, $\psi'_{i_3}(t)$, $\tilde{\psi}'_{i_3}(x), \ldots, \tilde{\psi}^{(j)}_{i_3}(x)$, $i_3 = \overline{1,m}$, $\frac{\partial^{2+p}u}{\partial t^2\partial x^p}(f_{i_1}(t), \tilde{f}_{i_1}(x))$, $1 \le p \le j-1$, $i_1 = \overline{1,k}$, $\frac{\partial^{1+p}u}{\partial t\partial x^p}(\varphi_{i_2}(t),\tilde{\varphi}_{i_2}(x))$, $\frac{\partial^{1+p}u}{\partial t\partial x^p}(\psi_{i_3}(t),\tilde{\psi}_{i_3}(x))$, $0 \le p \le j+1$, $i_2 = \overline{1,l}, i_3 = \overline{1,m}$, $\frac{\partial^p F(\cdot)}{\partial t^{j_0}\partial x^{j_1}\partial u_1^{j_2}\ldots\partial u_l^{j_{l+1}}\partial v_1^{p_1}\ldots\partial v_m^{p_m}}$, $j_0 + j_1 + \cdots + j_{l+1} + p_1 + \cdots + p_m = p, 1 \le p \le j+1$, над якими виконуються лише операції додавання і множення. Зокрема, $P_{20}(t,x) = F'_t(\cdot) + F'_{u_1}(\cdot)u'_t(\varphi_1(t),\tilde{\varphi}_1(x))\varphi'_1(t) + \cdots + F'_{u_l}(\cdot)u'_t(\varphi_l(t),\varphi_l(x))\varphi'_l(t) + F'_{v_1}(\cdot)u''_{tx}(\psi_1(t),\tilde{\psi}_1(x))\psi'_1(t) + \cdots + F'_{v_m}(\cdot)u''_{tx}(\psi_m(t),\tilde{\psi}_m(x))\psi'_m(t)$, де $F(\cdot) = F(t,x,u(\varphi_1(t),\tilde{\varphi}_1(x)),\ldots,u(\varphi_l(t),\tilde{\varphi}_l(x)),u'_x(\psi_1(t),\tilde{\psi}_1(x)),\ldots,u'_x(\psi_m(t),\tilde{\psi}_m(x)))$.

Враховуючи (6) і умову 3, безпосередньо із (7) одержуємо

$$\left.\frac{\partial^{2+j}u(t,x)}{\partial t^2\partial x^j}\right|_{\substack{t=0\\x=0}} = \left(1 - \sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1} f_{i_1 1}\tilde{f}^j_{i_1 1}\right)^{-1} P_{2j}(0,0),\ j \ge 0. \tag{8}$$

Продовжуючи цей процес, аналогічно можна показати, що виконуються співвідношення

$$\frac{\partial^{i+j}u(t,x)}{\partial t^i\partial x^j} = \sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1}\frac{\partial^{i+j}u(f_{i_1}(t),\tilde{f}_{i_1}(x))}{\partial t^i\partial x^j}\left(\frac{df_{i_1}(t)}{dt}\right)^i \times$$

$$\times \left(\frac{d\tilde{f}_{i_1}(x)}{dx}\right)^j + P_{ij}(t,x),\ i > 2,\ j \ge 0, \tag{9}$$

де $P_{ij}(t,x)$, $i \ge 3$, $j \ge 0$, — деякі вирази відносно a_{i_1}, $f^{(r)}_{i_1}(t)$, $\tilde{f}^{(p)}_{i_1}(x), i_1 = \overline{1,k}$, $\varphi^{(r)}_{i_2}(t)$, $\tilde{\varphi}^{(p)}_{i_2}(x)$, $i_2 = \overline{1,l}$, $\psi^{(r)}_{i_3}(t)$, $\tilde{\psi}^{(p)}_{i_3}(x)$, $i_3 = \overline{1,m}, 1 \le r < i$, $1 \le p \le j$, $\frac{\partial^{r+p}u}{\partial t^r\partial x^p}(f_{i_1}(t),\tilde{f}_{i_1}(x))$, $i_1 = \overline{1,k}$, $\frac{\partial^{r+p}u}{\partial t^r\partial x^p}(\varphi_{i_2}(t),\tilde{\varphi}_{i_2}(x))$, $i_2 = \overline{1,l}$, $\frac{\partial^{r+p}u}{\partial t^r\partial x^p}(\psi_{i_3}(t),\tilde{\psi}_{i_3}(x))$, $i_3 = \overline{1,m}$, $0 \le r < i$, $0 \le p \le j+1, r+p \le i+j$, $\frac{\partial^p F(\cdot)}{\partial t^{j_0}\partial x^{j_1}\ldots\partial u_{l+1}^{j_{l+1}}\partial v_1^{p_1}\ldots\partial v_m^{p_m}}$, $j_0 + j_1 + \cdots + j_{l+1} + p_1 + \cdots + p_m = p, 1 \le p < i+j$, над якими виконуються лише операції додавання і множення. Звідси і з умови 3 випливає

$$\left.\frac{\partial^{i+j}u(t,x)}{\partial t^i\partial x^j}\right|_{\substack{t=0\\x=0}} = \left(1 - \sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1} f^i_{i_1 1}\tilde{f}^j_{i_1 1}\right)^{-1} P_{ij}(0,0),\ i > 2,\ j \ge 0. \tag{10}$$

Таким чином, ми показали, що значення всіх похідних $\frac{\partial^{i+j}u(t,x)}{\partial t^i\partial x^j}, i \ge 0,\ j \ge 0$ при $t = 0$, $x = 0$ однозначно визначаються формулами (2), (6), (8) і (10). Тоді, згідно з (5), однозначно визначаються також коефіцієнти ряду (4). Цим доведено, що розв'язок (4) є єдиним.

Для доведення існування аналітичного в деякому околі точки $(0,0)$ розв'язку задачі (1), (2) достатньо показати, що ряд (4), коефіцієнти $u_{ij},\ i+j=0,1,\ldots$, якого визначаються формулами (5), (6), (8) і (10), збігається в деякому околі точки $(0,0)$.

На підставі (3) існують додатні сталі $L_{i_1},\ i_1=\overline{1,k},\ M_{i_2},\ i_2=\overline{1,l},\ N_{i_3}, i_3=\overline{1,m},\ M$ такі, що виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}
|f_{i_1 j}| &\le \frac{L_{i_1}}{a_1^j},\ |\tilde{f}_{i_1 j}| \le \frac{L_{i_1}}{a_1^j},\ i_1=\overline{1,k},\\
|\varphi_{i_2 j}| &\le \frac{M_{i_2}}{a_1^j},\ |\tilde{\varphi}_{i_2 j}| \le \frac{M_{i_2}}{a_1^j},\ i_2=\overline{1,l},\\
|\psi_{i_3 j}| &\le \frac{N_{i_3}}{a_1^j},\ |\tilde{\psi}_{i_3 j}| \le \frac{N_{i_3}}{a_1^j},\ i_3=\overline{1,m},\ j=0,1,\ldots,\\
|F_{j_1 j_2\cdots j_{l+m+2}}| &\le \frac{M}{a_1^{j_1+j_2} b_1^{j_3\cdots j_{l+m+2}}},\ j_1+\cdots+j_{l+m+2}=0,1,\ldots,
\end{aligned} \tag{11}$$

де $0<a_1<a,\ 0<b_1<b$. Тоді функції

$$\begin{aligned}
&\hat{f}_{i_1}(t) = f_{i_1 1}t + \frac{L_{i_1}}{1-\dfrac{t}{a_1}} - L_{i_1} - \frac{L_{i_1}}{a_1}t,\\
&\hat{\tilde{f}}_{i_1}(x) = \tilde{f}_{i_1 1}x + \frac{L_{i_1}}{1-\dfrac{x}{a_1}} - L_{i_1} - \frac{L_{i_1}}{a_1}x,\ i_1=\overline{1,k},\\
&\hat{\varphi}_{i_2}(t) = \varphi_{i_2 1}t + \frac{M_{i_2}}{1-\dfrac{t}{a_1}} - M_{i_2} - \frac{M_{i_2}}{a_1}t,\\
&\hat{\tilde{\varphi}}_{i_2}(x) = \tilde{\varphi}_{i_2 1}x + \frac{M_{i_2}}{1-\dfrac{x}{a_1}} - M_{i_2} - \frac{M_{i_2}}{a_1}x,\ i_2=\overline{1,l},\\
&\hat{\psi}_{i_3}(t) = \psi_{i_3 1}t + \frac{N_{i_3}}{1-\dfrac{t}{a_1}} - N_{i_3} - \frac{N_{i_3}}{a_1}t,\\
&\hat{\tilde{\psi}}_{i_3}(x) = \tilde{\psi}_{i_3 1}x + \frac{N_{i_3}}{1-\dfrac{x}{a_1}} - N_{i_3} - \frac{N_{i_3}}{a_1}x,\ i_3=\overline{1,m},\\
&\hat{F}(t,x,u_1,\ldots,u_l,v_1,\ldots,v_m) =\\
&= \frac{M}{\left(1-\dfrac{t}{a_1}\right)\left(1-\dfrac{x}{a_1}\right)\left(1-\dfrac{u_1}{b_1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{u_l}{b_1}\right)\left(1-\dfrac{v_1}{b_1}\right)\cdots\left(1-\dfrac{v_m}{b_1}\right)}
\end{aligned}$$

є мажорантами, відповідно, для функцій $f_{i_1}(t), \tilde{f}_{i_1}(x), i_1=\overline{1,k},\ \varphi_{i_2}(t), \tilde{\varphi}_{i_2}(x), i_2 = \overline{1,l},\ \psi_{i_3}(t),\ \tilde{\psi}_{i_3}(x),\ i_3=\overline{1,m},\ F(t,x,u_1,\ldots,u_l,v_1,\ldots,v_m)$. Більше цього, якщо покласти $L=$

$= \max\left\{L_{i_1},\ i_1 = \overline{1,k},\ M_{i_2},\ i_2 = \overline{1,l},\ N_{i_3},\ i_3 = \overline{1,m}\right\}$ і $\hat{f}_1 = \max\left\{f_{i_1 1},\ \tilde{f}_{i_1 1},\ i_1 = \overline{1,k},\ \varphi_{i_2 1},\ \tilde{\varphi}_{i_2 1},\ i_2 = \overline{1,l},\right.$ $\left.\psi_{i_3 1},\ \tilde{\psi}_{i_3 1},\ i_3 = \overline{1,m}\right\}$, то функції

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \hat{f}_1 t + \frac{L}{1 - \dfrac{t}{a_1}} - L - \frac{L}{a_1} t, \\ \hat{f}(x) &= \hat{f}_1 x + \frac{L}{1 - \dfrac{x}{a_1}} - L - \frac{L}{a_1} x \end{aligned}$$

також будуть мажорантами для функцій $f_{i_1}(t),\ \varphi_{i_2}(t),\ \psi_{i_3}(t)$ і $\tilde{f}_{i_1}(x), \tilde{\varphi}_{i_2}(x),\ \tilde{\psi}_{i_3}(x),\ i_1 = \overline{1,k},\ i_2 = \overline{1,l},\ i_3 = \overline{1,m}$, відповідно.

Розглянемо допоміжну задачу

$$\begin{aligned} v'_t(t,x) &= a v'_t(\hat{f}(t), \hat{f}(x)) + \hat{F}(t, x, v(\hat{f}(t), \hat{f}(x)), \ldots \\ &\quad \ldots, v(\hat{f}(t), \hat{f}(x)), v'_x(\hat{f}(t), \hat{f}(x)), \ldots, v'_x(\hat{f}(t), \hat{f}(x))), \qquad (12) \\ v(0,x) &= 0, \end{aligned}$$

де $a = \sum\limits_{i=1}^{k} |a_i|$.

Як і у випадку задачі (1), (2) можна показати, що задача (12) має єдиний формальний розв'язок у вигляді ряду

$$v(t,x) = \sum_{i+j=0}^{\infty} v_{ij} t^i x^j. \qquad (13)$$

При цьому

$$v_{ij} = \frac{1}{i!\, j!} \left.\frac{\partial^{i+j} v(t,x)}{\partial t^i \partial x^j}\right|_{\substack{t=0\\x=0}},\ i + j = 0, 1, \ldots, \qquad (14)$$

і значення всіх похідних $\dfrac{\partial^{i+j} v(t,x)}{\partial t^i \partial x^j},\ i+j = 0, 1, \ldots,$ при $t = 0,\ x = 0$ однозначно визначаються формулами

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^j v(t,x)}{\partial x^j}\right|_{\substack{t=0\\x=0}} &= 0, \\ \left.\frac{\partial^{i+j} v(t,x)}{\partial t^i \partial x^j}\right|_{\substack{t=0\\x=0}} &= \left(1 - a\hat{f}_1^{\,i+j}\right)^{-1} \hat{P}_{ij}(0,0),\ i \geq 1,\ j \geq 0, \end{aligned} \qquad (15)$$

де $\hat{P}_{ij}(t,x),\ i \geq 1,\ j \geq 0,$ — вирази $P_{ij}(t,x)$ із (6), (7), (9), де замість $a_{i_1},\ f_{i_1}^{(r)}(t),\ \tilde{f}_{i_1}^{(p)}(x),$ $\varphi_{i_2}^{(r)}(t),\ \tilde{\varphi}_{i_2}^{(p)}(x),\ \psi_{i_3}^{(r)}(t),\ \tilde{\psi}_{i_3}^{(p)}(x),\ 1 \leq r < i,\ 1 \leq p \leq j,\ \dfrac{\partial^{r+p} u}{\partial t^r \partial x^p}(f_{i_1}(t), \tilde{f}_{i_1}(x)),\ \dfrac{\partial^{r+p} u}{\partial t^r \partial x^p}(\varphi_{i_2}(t), \tilde{\varphi}_{i_2}(x)),$ $\dfrac{\partial^{r+p} u}{\partial t^r \partial x^p}(\psi_{i_3}(t), \tilde{\psi}_{i_3}(x)), i_1 = \overline{1,k},\ i_2 = \overline{1,l},\ i_3 = \overline{1,m},\ \ 0 \leq r < i, 0 \leq p \leq j+1, r+p \leq i+j,$

$\frac{\partial^p F(\cdot)}{\partial t^{j_0}\partial x^{j_1}\cdots\partial u_{l+1}^{j_{l+1}}\partial v_1^{p_1}\cdots\partial v_m^{p_m}}$, $j_0 + j_1 + \cdots + j_{l+1} + p_1 + \cdots + p_m = p$, $0 \le p < i + j$, поставлені, відповідно, величини $|a_{i_1}|$, $\hat f^{(r)}(t)$, $\hat f^{(p)}(x)$, $\frac{\partial^{r+p} v}{\partial t^r \partial x^p}(\hat f(t), \hat f(x))$, $0 \le r < i$, $0 \le p \le j+1$, $r + p \le i + j$, $\frac{\partial^p \hat F(\cdot)}{\partial t^{j_0}\partial x^{j_1}\cdots\partial u_{l+1}^{j_{l+1}}\partial v_1^{p_1}\cdots\partial v_m^{p_m}}$, $j_0 + j_1 + \cdots + j_{l+1} + p_1 + \cdots + p_m = p$, $0 \le p < i + j$, $\hat F(\cdot) = \hat F(t, x, v(\hat f(t), \hat f(x)), \ldots, v(\hat f(t), \hat f(x)), v'_x(\hat f(t), \hat f(x)), \ldots, v'_x(\hat f(t), \hat f(x)))$. Оскільки

$$\left|1 - \sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1} f_{i_1 1}^{i} \tilde f_{i_1 1}^{j}\right| \ge 1 - \left|\sum_{i_1=1}^{k} a_{i_1} f_{i_1 1}^{i} \tilde f_{i_1 1}^{j}\right| \ge 1 - \sum_{i_1=1}^{k} |a_{i_1}| \hat f_1^{i+j} = 1 - a\hat f_1^{i+j},$$

то беручи до уваги (5), (6), (8), (10) і (11), (14), (15), послідовно можна показати, що виконуються співвідношення

$$|u_{ij}| \le v_{ij}, \; i + j = 0, 1, \ldots \,. \tag{16}$$

Отже, для доведення збіжності ряду (4) достатньо довести збіжність ряду (13), коефіцієнти v_{ij} якого визначаються формулами (14), (15). Оскільки на підставі результатів [5] рівняння

$$\gamma[\hat f(t)] = \hat f_1 \gamma(t)$$

має розв'язок у вигляді ряду

$$\gamma(t) = t + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i t^i, \tag{17}$$

який збігається при $|t| < a_2 < a_1$ (a_2 — деяка додатна стала), то виконуючи в (12) заміну змінних

$$v(t, x) = \tilde v(\gamma(t), \gamma(x)), \gamma(t) = \tau, \gamma(x) = y, t = \gamma^{-1}(\tau), x = \gamma^{-1}(y), \tag{18}$$

одержуємо рівняння

$$\begin{aligned} \tilde v'_\tau(\tau, y) = A(\tau)\tilde v'_\tau(\hat f_1\tau, \hat f_1 y) + B(\tau)\tilde v'_\tau(\tau, y) + \Phi(\tau, y, \tilde v(\hat f_1\tau, \hat f_1 y), \ldots \\ \ldots, \tilde v(\hat f_1\tau, \hat f_1 y), \tilde v'_y(\hat f_1\tau, \hat f_1 y), \ldots, \tilde v'_y(\hat f_1\tau, \hat f_1 y)), \end{aligned} \tag{19}$$

де

$$\begin{aligned} &A(\tau) = a\gamma'(\hat f(\gamma^{-1}(\tau))), \\ &B(\tau) = 1 - \gamma'(\gamma^{-1}(\tau)), \\ &\Phi(\tau, y, u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_m) = \hat F(\gamma^{-1}(\tau), \gamma^{-1}(y), u_1, \ldots, u_l, \\ &\qquad\qquad v_1\gamma'(\hat f(\gamma^{-1}(y))), \ldots, v_m\gamma'(\hat f(\gamma^{-1}(y)))). \end{aligned}$$

При цьому (враховуючи властивості функцій $\gamma(\tau)$ і $\hat{F}(\tau, y, u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_m)$) неважко показати, що функції $A(\tau),\ B(\tau),\ \Phi(\tau, y, u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_m)$ розкладаються в ряди

$$
\begin{aligned}
&A(\tau) = a + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \tau^i, \\
&B(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \tau^i, \\
&\Phi(\tau, y, u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_m) = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_{m+l+2}=0}^{\infty} \Phi_{j_1 j_2 \cdots j_{m+l+2}} \tau^{j_1} y^{j_2} u_1^{j_3} \cdots v_m^{j_{m+l+2}},
\end{aligned}
$$

які збігаються при $|\tau| < a_3 < a_2,\ |y| < a_3,\ |u_i| < b_2 < b_1,\ i = \overline{1, l}, |v_j| < b_2,\ j = \overline{1, m}$. Тоді існує додатна стала K така, що виконуються співвідношення

$$
\begin{aligned}
&|A_i| \le \frac{K}{a_4^i},\ i = 1, 2, \ldots, \quad |B_j| \le \frac{K}{a_4^j},\ j = 1, 2, \ldots, \\
&|\Phi_{j_1 j_2 \cdots j_{m+l+2}}| \le \frac{K}{a_4^{j_1+j_2} b_3^{j_3+\cdots+j_{m+l+2}}},\ j_1 + \cdots + j_{m+l+2} = 0, 1, \ldots,
\end{aligned}
\tag{20}
$$

де $0 < a_4 < a_3,\ 0 < b_3 < b_2$, і, таким чином, функції

$$
\begin{aligned}
&\hat{A}(\tau) = a + \frac{K}{1 - \dfrac{\tau}{a_4}} - K, \\
&\hat{B}(\tau) = \frac{K}{1 - \dfrac{\tau}{a_4}} - K, \\
&\Phi(\tau, y, u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_m) = \frac{K}{\left(1 - \dfrac{\tau}{a_4}\right)\left(1 - \dfrac{y}{a_4}\right)\left(1 - \dfrac{u_1}{b_3}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{v_m}{b_3}\right)}
\end{aligned}
$$

є мажорантами відповідно для функцій $A(\tau),\ B(\tau),\ \Phi(\tau, y, u_1, \ldots, u_l, v_1, \ldots, v_m)$.

Рівняння (19) має формальний розв'язок $\tilde{v}(\tau, y)$, який задовольняє умову $\tilde{v}(0, y) = 0$ і розкладається в ряд

$$
\tilde{v}(\tau, y) = \sum_{i+j=0}^{\infty} \tilde{v}_{ij} \tau^i y^j. \tag{21}
$$

При цьому маємо

$$
\tilde{v}_{ij} = \frac{1}{i!\,j!} \frac{\partial^{i+j} \tilde{v}(\tau, y)}{\partial \tau^i \partial y^j}\bigg|_{\substack{\tau=0 \\ y=0}},\ i + j = 0, 1, \ldots, \tag{22}
$$

і значення всіх частинних похідних $\dfrac{\partial^{i+j} \tilde{v}(\tau, y)}{\partial \tau^i \partial y^j},\ i + j = 0, 1, \ldots,$ при $\tau = 0,\ y = 0$ однозначно визначаються за формулами

$$
\left.\frac{\partial^j \tilde{v}(\tau, y)}{\partial y^j}\right|_{\substack{\tau=0\\ y=0}} = 0,
$$

$$
\left.\frac{\partial^{i+j} \tilde{v}(\tau, y)}{\partial \tau^i \partial y^j}\right|_{\substack{\tau=0\\ y=0}} = Q_{ij}(0,0), \ i \geq 1, \ j \geq 0, \tag{23}
$$

де $Q_{ij}(\tau, y)$, $i \geq 1$, $j \geq 0$, — деякі вирази відносно $A^{(r)}(\tau)$, $B^{(r)}(\tau), \hat{f}_1$, $\dfrac{\partial^{r+p}\tilde{v}(\tau,y)}{\partial\tau^r\partial y^p}$, $\dfrac{\partial^{r+p}\tilde{v}(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y)}{\partial\tau^r\partial y^p}$, $0 \leq r \leq i$, $0 \leq p \leq j$, $r+p < i+j$, $\dfrac{\partial^p\Phi(\cdot)}{\partial\tau^{j_0}\partial y^{j_1}\partial u_1^{j_2}\cdots\partial u_{l+1}^{j_{l+1}}\partial v_1^{p_1}\cdots\partial v_m^{p_m}}$, $j_0 + j_1 + \cdots + j_{l+1} + p_1 + \cdots + p_m = p, 0 \leq p < i+j$, $\Phi(\cdot) = \Phi(\tau, y, \tilde{v}(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y), \ldots, \tilde{v}(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y), \tilde{v}'_y(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y), \ldots, \tilde{v}'_y(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y))$, над якими виконуються лише операції додавання і множення. Зокрема, при $i=1$, $j=0$ маємо

$$
P_{10}(\tau,y) = \Phi\big(\tau, y, \tilde{v}(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y), \ldots, \tilde{v}(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y), \tilde{v}'_y(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y), \ldots, \tilde{v}'_y(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y)\big).
$$

Розглянемо тепер рівняння

$$
\begin{aligned}
\hat{v}'_\tau(\tau,y) \ = \ & \hat{A}(\tau)\hat{v}'_\tau(\tau,y) + \hat{B}(\tau)\hat{v}'_\tau(\tau,y) + \\
& + \hat{\Phi}(\tau, y, \hat{v}(\tau,y), \ldots, \hat{v}(\tau,y), \hat{v}'_y(\tau,y), \ldots, \hat{v}'_y(\tau,y)),
\end{aligned} \tag{24}
$$

яке одержується із (19), коли в останньому функції $A(\tau), B(\tau), \Phi(\tau, y, u_1, \ldots, v_m)$ замінити функціями $\hat{A}(\tau)$, $\hat{B}(\tau)$, $\hat{\Phi}(\tau, y, u_1, \ldots, v_m)$, а замість $\hat{f}_1$ поставити 1. Це рівняння має єдиний формальний розв'язок у вигляді ряду

$$
\hat{v}(\tau,y) = \sum_{i+j=0}^{\infty} \hat{v}_{ij}\tau^i y^j, \tag{25}
$$

де

$$
\hat{v}_{ij} = \frac{1}{i!j!}\left.\frac{\partial^{i+j}\hat{v}(\tau,y)}{\partial\tau^i\partial y^j}\right|_{\substack{\tau=0\\ y=0}}, \ i+j = 0,1,\ldots, \tag{26}
$$

який задовольняє умову $\hat{v}(0,y) = 0$ і значення всіх частинних похідних $\dfrac{\partial^{i+j}\hat{v}(\tau,y)}{\partial\tau^i\partial y^j}$, $i+j = 0,1,\ldots$, при $\tau = 0$, $y = 0$, визначаються за формулами

$$
\left.\frac{\partial^j \hat{v}(\tau, y)}{\partial y^j}\right|_{\substack{\tau=0\\ y=0}} = 0,
$$

$$
\left.\frac{\partial^{i+j} \hat{v}(\tau, y)}{\partial \tau^i \partial y^j}\right|_{\substack{\tau=0\\ y=0}} = \hat{Q}_{ij}(0,0), \ i \geq 1, \ j \geq 0, \tag{27}
$$

де $\hat{Q}_{ij}(\tau,y)$, $i \geq 1$, $j \geq 0$, — вирази $Q_{ij}(\tau,y)$ із (23), в яких $A^{(r)}(\tau)$, $B^{(r)}(\tau)$,

$\hat{f}_1, \dfrac{\partial^{r+p}\tilde{v}(\tau,y)}{\partial\tau^r\partial y^p}, \quad \dfrac{\partial^{r+p}\tilde{v}(\hat{f}_1\tau,\hat{f}_1 y)}{\partial\tau^r\partial y^p}, \ 0 \le r \le i, \ 0 \le p \le j, \ r+p < i+j,$ $\dfrac{\partial^p\Phi(\cdot)}{\partial\tau^{j_0}\partial y^{j_1}\partial u_1^{j_2}\cdots\partial v_m^{p_m}}$, $j_0 + j_1 + \cdots + j_{l+1} + p_1 + \cdots + p_m = p$, $0 \le p < i+j$, замінені на $\hat{A}^{(r)}(\tau)$, $\hat{B}^{(r)}(\tau), 1, \dfrac{\partial^{r+p}\hat{v}(\tau,y)}{\partial\tau^r\partial y^p}, \dfrac{\partial^{r+p}\hat{v}(\tau,y)}{\partial\tau^r\partial y^p}$, $0 \le r \le i$, $0 \le p \le j, r+p < i+j$, $\dfrac{\partial^p\hat{\Phi}(\cdot)}{\partial\tau^{j_0}\partial y^{j_1}\partial u_1^{j_2}\cdots\partial v_m^{p_m}}$, $j_0 + j_1 + \cdots + p_m = p$, $0 \le p < i+j$. Оскільки $\hat{f}_1 < 1$ і виконуються співвідношення (20), то беручи до уваги (22), (23) і (26), (27), можна послідовно показати, що

$$\begin{aligned} \hat{v}_{ij} &\ge 0, \\ |\tilde{v}_{ij}| &\le \hat{v}_{ij}, \qquad i+j = 0,1,\ldots . \end{aligned} \tag{28}$$

Звідси випливає, що для доведення збіжності ряду (21) достатньо довести збіжність ряду (25).

Згідно з [2], рівняння (24) має єдиний розв'язок $\hat{v}(\tau,y)$, що задовольняє умову $\hat{v}(0,y) = 0$ і розкладається в ряд

$$\hat{v}(\tau,y) = \sum_{i+j=0}^{\infty} v_{ij}\tau^i y^j, \tag{29}$$

який збігається при $|\tau| < a_5 < a_4$, $|y| < a_5$. Отже, ряд (25) співпадає з рядом (29). Звідси і з (28) випливає, що ряд (21) також збігається при $|\tau| < a_5$, $|y| < a_5$. Цим доведено (випливає із (18), (17)), що рівняння (12) має розв'язок $v(t,x) = \tilde{v}(\gamma(t),\gamma(t))$, який задовольняє умову $v(0,x) = 0$ і розкладається в ряд

$$v(t,x) = \sum_{i+j=0}^{\infty} v_{ij}t^i x^j, \tag{30}$$

який збігається при $|t| \le \rho < a_5$, $|x| \le \rho$. Оскільки рівняння (12) може мати не більше одного такого розв'язку, то ряд (30) співпадає із рядом (13), коефіцієнти v_{ij}, $i+j = 0,1,\ldots$, якого визначаються формулами (14), (15). Звідси і з (16) безпосередньо випливає, що ряд (4), коефіцієнти u_{ij}, $i+j = 0,1,\ldots$, якого визначаються формулами (5), (6), (8) і (10), також збігається при $|t| \le \rho$, $|x| \le \rho$. Теорему доведено.

1. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
2. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.
3. *Adams C.R.* On the linear partial q-difference equation of general type // Trans. Amer. Math. Soc. — 1929. — **31.** — P. 360 – 371.
4. *Пелюх Г.П.* Существование и единственность аналитического решения одного нелинейного функционального уравнения // Aequat. math. — 1977. — **16.** — P. 123 – 127.
5. *Szekeres G.* Regular iteration of real and complex functions // Acta math. — 1958. — **100.** — P. 203 – 258.

Одержано 09.01.99