УДК 517 . 948

СХЕМА ПОБУДОВИ АСИМПТОТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ДВОЧАСТОТНИХ РЕЖИМІВ КОЛИВАНЬ В СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ю. Б. Мосєєнков

Нац. ун-т ім. Т. Шевченка,
Україна, 252033, Київ, вул. Володимирська, 64

We consider a nonlinear oscillatory system with distributed parameters. In the presence of instantaneous perturbations at the initial time exciting in the system a mode of natural normal oscillations close to two-frequency oscillations as well as in the presence of distributed periodic perturbations whose resonance frequencies are close the frequencies of natural normal oscillations, it is necessary to study the two-frequency of oscillations with solution of the corresponding Cauchy problem. For this purpose, we use the asymptotic methods of Bogoliubov and Mitropolsky. As a result, for the properly posed Cauchy problem, we suggest the procedure of construction of the asymptotic solution in the first and second improved approximations.

При наявності в нелінійній коливній системі з розподіленими параметрами миттєвих збурень в початковий момент, які збуджують в ній близький до двочастотного режим власних нормальних коливань, а також розподілених періодичних збурень з резонансними частотами, близькими до частот власних нормальних коливань, виникає потреба дослідження двочастотного режиму коливань з необхідністю розв'язання задачі Коші. В цій статті для розв'язання останньої застосовуються асимптотичні методи Боголюбова – Митропольського. В результаті для поставленої відповідним чином задачі Коші розроблена схема побудови асимптотичного розв'язку в першому та першому покращеному наближеннях.

У тих випадках, коли в нелінійній коливній системі початкові збурення у вигляді функцій, що входять у праві частини початкових умов, апроксимуються з точністю до величин порядку малого параметра декількома власними функціями (наприклад, k) незбуреної системи (незбуреної крайової задачі), у збуреній нелінійній системі можливий близький до багаточастотного (k-частотного) режим коливань. Зокрема, при $k = 2$ режим нелінійних коливань близький до двочастотного.

Крім названих збурень миттєвого характеру в розглядуваній системі припускається наявність розподілених 2π-періодичних по θ_1 і θ_2 малих збурень, частоти яких $\dfrac{d\theta_i}{dt} = \nu_i(\tau)$, $i = 1, 2$, близькі до власних частот ω_i, $i = 1, 2$, незбуреної системи, що призводить у збуреній системі до розвинення (в більшості до зростання) досліджуваного двочастотного режиму коливань у відповідних формах динамічної рівноваги $X_i(x)$, $i = 1, 2$.

Перейдемо тепер до постановки нелінійної змішаної крайової задачі з урахуванням зазначених вище обох типів збурень для одного досить відомого [1] класу систем з розподіленими параметрами. Отже, розглянемо для цього класу змішану нелінійну крайову задачу, яка описується квазіхвильовим рівнянням з нелінійними крайовими умовами та відповідними початковими умовами.

Припустимо, що квазіхвильове рівняння має вигляд

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varepsilon f\left(x, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tau, \theta_1, \theta_2, \varepsilon\right) \tag{1}$$

при заданих квазілінійних крайових умовах

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial U}{\partial x} + hU\right]\Big|_{x=0} = \varepsilon\eta\Big[U(0,t)\Big], \\ &\left[\frac{\partial U}{\partial x} + h_1 U\right]\Big|_{x=1} = \varepsilon\omega\Big[U(l,t)\Big] \end{aligned} \tag{2}$$

та певних (відповідних дослідженням двочастотного режиму коливань) початкових умовах

$$U\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{2} p_i X_i(x) + \varepsilon Y(x), \qquad \frac{\partial U}{\partial t}\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{2} q_i X_i(x) + \varepsilon Z(x), \tag{3}$$

де p_i та q_i, $i = 1, 2$, — дійсні числа, а $X_i(x)$, $i = 1, 2$, — перші дві власні функції незбуреної системи (крайової задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$). Цим власним функціям $X_i(x)$ відповідають головні коливання незбуреної системи з частотами $\omega_i = b\lambda_i$, де λ_i — власні числа (див. [1]).

В розглядуваній задачі (1) – (3), яка називається збуреною, $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $\tau = \varepsilon t$ — повільний час, b, h, h_1 — дійсні числа, l — довжина (струни чи пружини).

Слід зауважити, що всі функції задачі (1) – (3) вважаємо достатньо гладкими, які задовольняють всі необхідні в подальшому вимоги. Сама ж задача, її рівняння та додаткові умови мають певний фізичний зміст.

Розглянемо тепер схему розв'язання сформульованої задачі Коші, згідно з (1) – (3), за допомогою асимптотичних методів Боголюбова – Митропольського. Поклавши в збуреній системі (1) – (3) $\varepsilon = 0$, одержимо незбурену лінійну змішану крайову задачу відносно $U_0(x,t)$. Тоді розглянемо незбурену крайову задачу відносно $U_0(x,t)$ ((1), (2) при $\varepsilon = 0$), застосовуючи метод Фур'є. Після відомих викладок [1] знаходимо власні попарно ортогональні на відрізку $[0,\ l]$ функції

$$X_n(x) = C_1^{(n)} \cos \lambda_n x + C_2^{(n)} \sin \lambda_n x, \tag{4}$$

де $C_i^{(n)}$, $i = 1, 2$, — відомі сталі, а λ_n — власні числа.

Після цього, записуючи загальний розв'язок незбуреної крайової задачі і використовуючи початкові умови відносно $U_0(x,t)$, знаходимо розв'язок задачі Коші для незбуреної системи

$$U_0(x,t) = \sum_{i=1}^{2} a_{0i} X_i(x)\, \cos(b\lambda_i + \varphi_{0i}), \tag{5}$$

де a_{0i} та φ_{0i} визначаються за формулами

$$a_{0i} = \sqrt{p_i + \frac{q_i^2}{b^2\lambda_i^2}}, \qquad \varphi_{0i} = -\mathrm{arctg}\, \frac{q_i}{p_i b \lambda_i}, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Виходячи із загальних ідей асимптотичних методів нелінійної механіки стосовно розгляду як одночастотних, так і k-частотних режимів нелінійних коливань [1 – 4], послідовно викладемо метод побудови асимптотичного розв'язку в першому наближенні розглядуваної збуреної змішаної крайової задачі (1) – (3) неавтономного типу при дослідженні двочастотних режимів нестаціонарних коливань. Враховуючи, що в розглядуваній нелінійній системі можливі головні резонанси $\left(\frac{d\theta_i}{dt} = \nu_i(\tau) \approx \omega_i = b\lambda_i,\ i = 1, 2\right)$, частинний чотирьохпараметричний розв'язок шукаємо у вигляді асимптотичного розвинення

$$U\left(x,t\right) = \sum_{i=1}^{2} a_i X_i(x)\cos(\theta_i + \psi_i) + \\ + \varepsilon U_1(x, a_1, a_2, \tau, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2, \theta_1, \theta_2) + \varepsilon^2 \ldots \,, \tag{7}$$

де $U_i(x, a_1, a_2, \tau, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2, \theta_1, \theta_2)$ — 2π-періодичні функції по $\theta_i + \psi_i$ та θ_i, $i = 1, 2$, а величини a_i та ψ_i, $i = 1, 2$, визначаються із системи амплітудно-фазових рівнянь 4-го порядку:

$$\frac{da_i}{dt} = \varepsilon A_1^{(i)}(a_1, a_2, \tau, \psi_i) + \varepsilon^2 \ldots \,, \\ \frac{d\psi_i}{dt} = b\lambda_i - \nu_i(\tau) + \varepsilon B_1^{(i)}(a_1, a_2, \tau, \psi_i) + \varepsilon^2 \ldots \,, \tag{8}$$

в якій $A_1^{(i)}(a_1, a_2, \tau, \psi_i)$, $B_1^{(i)}(a_1, a_2, \tau, \psi_i)$, $i = 1, 2$, — 2π-періодичні функції по ψ_1 та ψ_2.

Таким чином, для функцій U_1, $A_1^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, $i = 1, 2$, необхідно підібрати такі вирази, щоб розвинення (7) (перших два його члени), в яке замість a_i та ψ_i, $i = 1, 2$, будуть підставлені функції часу, що визначені з амплітудно-фазових рівнянь першого наближення (із системи (8) при $\varepsilon^k \approx 0$, $k = 2, 3, \ldots$), було розв'язком першого наближення розкладуваної нелінійної змішаної крайової задачі (1) – (3), тобто задовольняло останню з точністю до величин порядку ε. Як відомо, визначення коефіцієнтів вказаних асимптотичних розвинень (7) та (8) не викликає принципових труднощів.

Перейдемо до визначення коефіцієнтів розвинень (7) та (8), тобто U_1, $A_1^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, $i = 1, 2$, які необхідні для побудови першого і першого покращеного наближень розв'язку і відповідних амплітудно-фазових рівнянь першого наближення. Для цього підставимо шуканий розв'язок (7) з урахуванням розвинень (8) у вихідне рівняння (1) і додаткові умови (2) та (3) і проведемо ототожнення одержаних рівностей з точністю до величин першого степеня ε (з точністю першого наближення). Після ряду необхідних викладок та зрівнювання коефіцієнтів при ε в лівій і правій частинах рівняння (1) одержимо відносно невідомих коефіцієнтів розвинень U_1, $A_1^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, $i = 1, 2$, рівняння, записане в операторній формі:

$$\left[b\lambda_1 \frac{\partial}{\partial(\theta_1 + \psi_1)} + b\lambda_2 \frac{\partial}{\partial(\theta_2 + \psi_2)} + \nu_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \nu_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right]^2 U_1 - b^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \\ = f_0(x, a_1, a_2, \tau, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2, \theta_1, \theta_2) +$$

$$+\sum_{i=1}^{2} X_i(x)\left\{\left[(b\lambda_i-\nu_1(\tau))\frac{\partial B_1^{(i)}}{\partial\psi_i}+2b\lambda_i A_1^{(i)}\right]\,\sin(\theta_i+\psi_i)-\right.$$

$$\left.-\left[(b\lambda_i-\nu_2(\tau))\frac{\partial A_1^{(i)}}{\partial\psi_i}-2b\lambda_i a_i B_1^{(i)}\right]\,\cos(\theta_i+\psi_i)\right\}, \qquad (9)$$

де

$$f_0(x,a_1,a_2,\tau,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2,\theta_1,\theta_2)=$$

$$=f\left(x,\sum_{i=1}^{2} a_i\cos(\theta_i+\psi_i)\frac{dX_i(x)}{dx},\sum_{i=1}^{2} a_i\cos(\theta_i+\psi_i)\frac{d^2X_i(x)}{dx^2},\tau,\theta_1,\theta_2,0\right). \qquad (10)$$

Слід зауважити, що рівняння (9) має основну невідому функцію U_1, відносно якої і складене. Разом з тим в це рівняння входять і допоміжні функції $A_1^{(i)}$, $B_1^{(i)}$, $i=1,2$, які відповідним чином визначаються.

Далі, зрівнюючи коефіцієнти при ε в крайових умовах (2), останні запишемо відносно U_1 у вигляді

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial U_1}{\partial x}+hU_1\right]\Big|_{x=0}=\eta^*(a_1,a_2,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2)\,,\\&\left[\frac{\partial U_1}{\partial x}+h_1U_1\right]\Big|_{x=l}=\omega^*(a_1,a_2,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2)\,,\end{aligned} \qquad (11)$$

$$\eta^*(a_1,a_2,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2)=\eta\,\left[\sum_{i=1}^{2} a_iX_i(0)\cos(\theta_i+\psi_i)\right], \qquad (12)$$

$$\omega^*(a_1,a_2,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2)=\omega\,\left[\sum_{i=1}^{2} a_iX_i(l)\cos(\theta_i+\psi_i)\right]. \qquad (13)$$

Нарешті, при визначенні початкових умов відносно U_1 початкові значення невідомих величин a_i та ψ_i, $i=1,2$, в розвиненнях (7) та (8) візьмемо рівними a_{0i} та φ_{0i}, $i=1,2$, тобто рівними початковим значенням цих величин (6) незбуреної системи (отже, при $t=0$ величини $\tau=\nu_1(\tau)=\nu_2(\tau)=\theta_1=\theta_2=0$). Тоді, після проведення необхідних викладок, зрівнявши коефіцієнти при ε в лівих і правих частинах умов (3), дістанемо початкові умови відносно U_1:

$$\begin{aligned}&U_1(x,a_{10},a_{20},0,\varphi_{10},\varphi_{20},0,0)=Y(x)\,,\\&\sum_{i=1}^{2} b\lambda_i\frac{\partial^2U_1(x,a_{10},a_{20},0,\varphi_{10},\varphi_{20},0,0)}{\partial(\theta_i+\psi_i)}=\\&\qquad=Z(x)-\sum_{i=1}^{2}X_i(x)\left[A_1^{(i)}(0,a_{10},a_{20},\varphi_{i0})\frac{p_i}{a_{0i}}+B_1^{(i)}(0,a_{10},a_{20},\varphi_{i0})\frac{q_i}{b\lambda_i}\right].\end{aligned} \qquad (14)$$

Далі припускаємо, що нелінійності в збуреній змішаній крайовій задачі (1) – (3) мають поліноміальний характер і періодичні збурення зображені скінченними сумами Фур'є. Крім того, позбавимось нелінійностей в крайових умовах (11) і разом з тим забезпечимо широке використання відомої системи ортогональних власних функцій незбуреної крайової задачі (задачі (1), (2) при $\varepsilon = 0$) вигляду (4). З цією метою шукаємо U_1 у вигляді суми

$$U_1 = V_1 + W_1 \,, \tag{15}$$

де V_1 — нова шукана функція, а W_1 підбираємо так, щоб крайові умови відносно V_1 були такими, як і для функції U_0 (тобто мали вигляд (2) при $\varepsilon = 0$).

Підставляючи (15) у крайові умови (11) і вибираючи W_1 із умов

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial W_1}{\partial x} + hW_1\right]\bigg|_{x=0} &= \eta^*(a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2) \,, \\ \left[\frac{\partial W_1}{\partial x} + hW_1\right]\bigg|_{x=1} &= \omega^*(a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2) \,, \end{aligned} \tag{16}$$

дістаємо крайові умови потрібного вигляду

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial V_1}{\partial x} + hV_1\right]\bigg|_{x=0} &= 0 \,, \\ \left[\frac{\partial V_1}{\partial x} + h_1V_1\right]\bigg|_{x=1} &= 0 \,. \end{aligned} \tag{17}$$

Функція W_1 однозначно і просто визначається [1] як частинний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = 0 \,, \tag{18}$$

що задовольняє умови (16). Дійсно, як видно із правих частин умов (16), шукана функція має вигляд $W_1(x, a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2)$ і задовольняє рівняння (18). Отже, загальний розв'язок останнього визначається виразом

$$\begin{aligned} W_1(x, a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2) = C_1(a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2)\, x + \\ + C_2(a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2) \,. \end{aligned} \tag{19}$$

Довільні функції C_1, $i = 1, 2$, розв'язку (19) визначаються однозначно із умов (16). Вони, як легко пересвідчитись, мають вигляд

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{1}{h_1 - h(1 + h_1 l)} \Big[h_1 \eta^*(a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2) - \\ - h\omega^*(a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2) \Big] \,, \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} C_2 = \frac{1}{h_1 - h(1 + h_1 l)} \Big[\omega^*(a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2) - \\ - (1 + h_1 l)\eta^*(a_1, a_2, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2) \Big] \end{aligned} \tag{21}$$

і є 2π-періодичними функціями по $(\theta_i + \psi_i)$, $i = 1, 2$.

Тепер підставимо вираз (15) в диференціальне рівняння (9) і врахуємо при цьому (18). В результаті одержимо наступне рівняння:

$$\left[b\lambda_1\frac{\partial}{\partial(\theta_1+\psi_1)}+b\lambda_2\frac{\partial}{\partial(\theta_2+\psi_2)}+\nu_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\nu_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right]^2 V_1-b^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}=$$
$$=f_0^*(x,a_1,a_2,\tau,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2,\theta_1,\theta_2)+$$
$$+\sum_{i=1}^{2}X_i(x)\left\{\left[(b\lambda_i-\nu_i(\tau))\,a_i\frac{\partial B_1^{(i)}}{\partial\psi_i}+2b\lambda_i A_1^{(i)}\right]\sin(\theta_i+\psi_i)-\right.$$
$$\left.-\left[(b\lambda_i-\nu_i(\tau))\,\frac{\partial A_1^{(i)}}{\partial\psi_i}-2b\lambda_i a_i B_1^{(i)}\right]\cos(\theta_i+\psi_i)\right\}, \qquad (22)$$

де

$$f_0^*=f_0-b^2\lambda_1^2\frac{\partial^2 W_1}{\partial(\theta_1+\psi_1)^2}-2b\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 W_1}{\partial(\theta_1+\psi_1)\partial(\theta_2+\psi_2)}-b^2\lambda_2^2\frac{\partial^2 W_1}{\partial(\theta_2+\psi_2)^2} \qquad (23)$$

і є 2π-періодичною функцією по $(\theta_i+\psi_i)$ і θ_i, $i=1,2$.

З урахуванням виразу (15) початкові умови (14) відносно шуканої функції $V_1(x,a_1,a_2,\tau,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2,\theta_1,\theta_2)$ набирають вигляду

$$V_1(x,a_{10},a_{20},0,\varphi_{10},\varphi_{20},0,0)=Y(x)-W_1(x,a_{10},a_{20},\varphi_{10},\varphi_{20})\equiv Y^*(x)\,,$$
$$\sum_{i=1}^{2}b\lambda_i\frac{\partial V_1(x,a_{10},a_{20},0,\varphi_{10},\varphi_{20},0,0)}{\partial(\theta_i+\psi_i)}=$$
$$=Z(x)-\sum_{i=1}^{2}X_i(x)\left[A_1^{(i)}(0,a_{10},a_{20},\varphi_{i0})\frac{p_i}{a_{0i}}+B_1^{(i)}(0,a_{10},a_{20},\varphi_{i0})\frac{q_i}{b\lambda_i}\right]-$$
$$-\sum_{i=1}^{2}b\lambda_i\frac{\partial W_1(x,a_{10},a_{20},\varphi_{10},\varphi_{20})}{\partial(\theta_i+\psi_i)}\equiv Z^*(x)\,, \qquad (24)$$

де через $Y^*(x)$ і $Z^*(x)$ позначені відомі праві частини вказаних умов при відповідному визначенні функцій $A_1^{(i)}(a_1,a_2,\tau,\psi_i)$, $B_1^{(i)}(a_1,a_2,\tau,\psi_i)$, $i=1,2$.

Переходячи до знаходження V_1, використаємо рівняння (22), крайові умови (17) і початкові умови (24). Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (22) відносно V_1 шукаємо у вигляді суми

$$V_1(x,a_1,a_2,\tau,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2,\theta_1,\theta_2)=V_1^*(x,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2)+$$
$$+V_1^{**}(x,a_1,a_2,\tau,\theta_1+\psi_1,\theta_2+\psi_2,\theta_1,\theta_2)\,, \qquad (25)$$

де V_1^* — загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$\left[b\lambda_1 \frac{\partial}{\partial(\theta_1+\psi_1)} + b\lambda_2 \frac{\partial}{\partial(\theta_2+\psi_2)}\right]^2 V_1^* - b^2 \frac{\partial^2 V_1^*}{\partial x^2} = 0\,, \tag{26}$$

а V_1^{**} — частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (22).

Для розв'язання рівняння (26) з початковими умовами вигляду (17) застосуємо метод Фур'є. В результаті одержимо загальний розв'язок

$$V_1^*(x, \theta_1+\psi_1, \theta_2+\psi_2) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\, b_k \cos\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_k}{\lambda_i(\theta_i+\psi_i)} + d_k\right]\,, \tag{27}$$

де b_k і d_k — довільні сталі, λ_k і X_k — власні числа і власні функції незбуреної крайової задачі ((1), (2) при $\varepsilon = 0$).

Після цього перейдемо до знаходження частинного розв'язку V_1^{**} рівняння (22) і при вимозі скінченності його прийдемо до відповідних рівнянь визначення невідомих функцій $A_1^{(i)}, B_1^{(i)}, i = 1, 2$. Як відомо, умовами скінченності V_1^{**} є відсутність в його складі перших гармонік по $(\theta_k + \psi_k)$ (у відповідних формах коливань $X_k(x)$, $k = 1, 2$.

Для цього розвинемо відому функцію f_0^* в ряд за власними функціями $X_n(x)$ вигляду (4)

$$f_0^* = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(0)}(a_1, a_2, \tau, \theta_1+\psi_1, \theta_2+\psi_2, \theta_1, \theta_2)\, X_k(x) \tag{28}$$

і шуканий розв'язок V_1^{**} зобразимо рядом за власними функціями $X_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots$:

$$V_1^{**} = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^{(1)}(a_1, a_2, \tau, \theta_1+\psi_1, \theta_2+\psi_2, \theta_1, \theta_2)\, X_k(x) \tag{29}$$

з невідомими коефіцієнтами $V_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, що забезпечує виконання крайових умов (17).

Підставляючи вирази (28) і (29) в рівняння (22) і прирівнюючи коефіцієнти при власних (фундаментальних) функціях $X_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, одержуємо такі рівняння відносно коефіцієнтів розвинень $V_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\left[b\lambda_1 \frac{\partial}{\partial(\theta_1+\psi_1)} + b\lambda_2 \frac{\partial}{\partial(\theta_2+\psi_2)} + \nu_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \nu_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right]^2 V_k^{(1)} - b^2\lambda_k^2 V_k^{(1)} =$$
$$= f_k^{(0)} + \left[\left[\Big(b\lambda_k - \nu_k(\tau)\Big)\, a_k \frac{\partial B_1^{(k)}}{\partial\psi_k} + 2b\lambda_k A_1^{(k)}\right] \sin(\theta_k+\psi_k) - \right.$$
$$\left. - \left[\Big(b\lambda_k - \nu_k(\tau)\Big)\, \frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial\psi_k} - 2b\lambda_k a_k B_1^{(k)}\right] \cos(\theta_k+\psi_k)\right]\,, \quad k = 1, 2, \tag{30}$$

$$\left[b\lambda_1 \frac{\partial}{\partial(\theta_1+\psi_1)} + b\lambda_2 \frac{\partial}{\partial(\theta_2+\psi_2)} + \nu_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \nu_2(\tau)\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right]^2 V_k^{(1)} -$$
$$- b^2\lambda_k^2 V_k^{(1)} = f_k^{(0)}\,, \quad k = 3, 4, 5, \ldots\,. \tag{31}$$

В правих частинах рівнянь (30) і (31) знаходяться відомі 2π-періодичні функції по $(\theta_k + +\psi_k)$ та θ_k, $k = 1, 2$, які визначаються рівностями

$$f_k^{(0)} = \frac{\int\limits_0^1 f_0^* X_k(x)\, dx}{\int\limits_0^1 X_k^2(x)\, dx} \,. \tag{32}$$

Розв'язки рівнянь (30) і (31) будемо шукати відомим прийомом методу невизначених коефіцієнтів. Для цього скористаємось розвиненнями 2π-періодичних функцій по $(\theta_i + \psi_i)$ та θ_i, $i = 1, 2$, в кратні суми Фур'є. Отже, відомі функції $f_k^{(0)}$ і шукані $V_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots$, запишемо у вигляді кратних сум Фур'є в комплексній формі:

$$V_k^{(1)} = \sum_{\substack{n_j, m_j \\ (j=1,2)}} V_{pqrs}^{(1k)}(a_1, a_2, \tau) \, \exp\left(i \sum_{j=1}^{2} \Big[n_j\theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j) \Big] \right) \,, \tag{33}$$

$$f_k^{(0)} = \sum_{\substack{n_j, m_j \\ (j=1,2)}} f_{pqrs}^{(0k)}(a_1, a_2, \tau) \, \exp\left(i \sum_{j=1}^{2} \Big[n_j\theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j) \Big] \right) \,, \tag{34}$$

$$p = n_1, \quad q = n_2, \quad r = m_1, \quad s = m_2,$$

де

$$f_{pqrs}^{(0k)}(a_1, a_2, \tau) = \frac{1}{16\pi^4} \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_k^{(0)}(a_1, a_2, \tau, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2, \theta_1, \theta_2) \times$$

$$\times \exp\left(-i \sum_{j=1}^{2} \Big[n_j\theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j) \Big] \right) \, d(\theta_1 + \psi_1)\, d(\theta_2 + \psi_2)\, d\theta_1 d\theta_2 \,. \tag{35}$$

Підставивши вирази (33) і (34) в рівняння (30) і (31), одержимо

$$\sum_{\substack{n_j, m_j \\ (j=1,2)}} \Big\{ b^2\lambda_k^2 - \Big[m_1 b\lambda_1 + m_2 b\lambda_2 + n_1\nu_1(\tau) + n_2\nu_2(\tau) \Big]^2 \Big\} V_{pqrs}^{(1k)}(a_1, a_2, \tau) \times$$

$$\times \exp\left(i \sum_{j=1}^{2} \Big[n_j\theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j) \Big] \right) = \sum_{\substack{n_j, m_j \\ (j=1,2)}} f_{pqrs}^{(0k)}(a_1, a_2, \tau) \times$$

$$\times \exp\left(i \sum_{j=1}^{2} \Big[n_j\theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j) \Big] \right) + f_k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{36}$$

$$p = n_1, \quad q = n_2, \quad r = m_1, \quad s = m_2,$$

де

$$f_k = \left[\Big(b\lambda_k - \nu_k(\tau)\Big)\, a_k \frac{\partial B_1^{(k)}}{\partial \psi_k} + 2b\lambda_k A_1^{(k)}\right] \sin(\theta_k + \psi_k) -$$

$$- \left[\Big(b\lambda_k - \nu_k(\tau)\Big) \frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial \psi_k} - 2b\lambda_k a_k B_1^{(k)}\right] \cos(\theta_k + \psi_k), \quad k = 1, 2, \tag{37}$$

$$f_k \equiv 0\,, \quad k = 3, 4, 5, \dots\,. \tag{38}$$

Для забезпечення скінченності V_1^{**}, як зазначалось вище, потрібно, щоб в умовах резонансів ($\nu_i(\tau) \approx b\lambda_i$, $i = 1, 2$) в складі цієї функції не було перших гармонік, тобто

$$\sum_{j=1}^{2} \Big[n_j\theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j)\Big] \neq \pm(\theta_k + \psi_k) + p_k\psi_k\,, \quad k = 1, 2\,. \tag{39}$$

Умови (39) будуть виконані, якщо $V_{ijlp}^{(lk)} = 0$, $i = n_1$, $j = n_2$, $l = m_1$, $p = m_2$, при таких співвідношеннях:

$$\begin{aligned} &n_1 + m_1 \pm 1 = 0, \quad n_2 = m_2 = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \\ &n_2 + m_2 \pm 1 = 0, \quad n_1 = m_1 = 0 \quad \text{при} \quad k = 2\,. \end{aligned} \tag{40}$$

А це, в свою чергу, забезпечується вибором $A_1^{(k)}$, $B_1^{(k)}$, $k = 1, 2$, в рівняннях (36). Маємо

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{n_j, m_j \in \,(40) \\ (j=1,2)}} f_{pqrs}^{(0k)}(a_1, a_2, \tau) \exp\left(i \sum_{j=1}^{2} \Big[n_j\theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j)\Big]\right) + \\ &+ \left[\Big(b\lambda_k - \nu_k(\tau)\Big)\, a_k \frac{\partial B_1^{(k)}}{\partial \psi_k} + 2b\lambda_k A_1^{(k)}\right] \sin(\theta_k + \psi_k) - \\ &- \left[\Big(b\lambda_k - \nu_k(\tau)\Big) \frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial \psi_k} - 2b\lambda_k a_k B_1^{(k)}\right] \cos(\theta_k + \psi_k) = 0\,, \\ &k = 1, 2; \quad p = n_1, \quad q = n_2, \quad r = m_1, \quad s = m_2\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Звідси, з урахуванням виразів $f_{ijlp}^{(0k)}$, $i = n_1$, $j = n_2$, $l = m_1$, $p = m_2$, $k = 1, 2$, порівняно легко дістаємо системи рівнянь відносно $A_1^{(k)}$, $B_1^{(k)}$, $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} &\Big(b\lambda_k - \nu_k(\tau)\Big) \frac{\partial A_1^{(k)}}{\partial \psi_k} - 2b\lambda_k a_k B_1^{(k)} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma_k} \exp(i\sigma_k\psi_k) \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} f_k^{(0)} \exp(-i\sigma_k\psi_k^*) \cos(\theta_k + \psi_k)\, d(\theta_k + \psi_k)\, d\theta_k\,, \\ &\Big(b\lambda_k - \nu_k(\tau)\Big)\, a_k \frac{\partial B_1^{(k)}}{\partial \psi_k} + 2b\lambda_k A_1^{(k)} = \end{aligned} \tag{42}$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma_k} \exp(i\sigma_k \psi_k) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k^{(0)} \exp(-i\sigma_k \psi_k^*) \sin(\theta_k + \psi_k)\, d(\theta_k + \psi_k)\, d\theta_k \;,$$

$$\psi_k^* = [(\theta_k + \psi_k) - \theta_k]\;, \quad k = 1, 2\;.$$

Для правих частин систем (42) підсумовування ведеться для всіх σ_k, $k = 1, 2$ (як додатних, так і від'ємних), для яких інтеграли будуть відмінні від нуля. Після цього, враховуючи (20) і (33) та визначаючи $V_{ijlp}^{(lk)}(\tau, a_1, a_2)$ із рівнянь (36), знаходимо вираз скінченного частинного розв'язку V_1^{**} :

$$V_1^{**} = \frac{1}{16\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \sum_{\substack{n_j, m_j \\ (n_k + m_k \pm 1 \neq 0, \\ k=1,2)}} \frac{\exp\left(i \sum\limits_{j=1}^{2} [n_j \theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j)] \right)}{b^2 \lambda_k^2 - [m_1 b\lambda_1 + m_2 b\lambda_2 + n_1 \nu_1(\tau) + n_2 \nu_2(\tau)]^2} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k^{(0)} \exp\left(-i \sum_{j=1}^{2} \Big[n_j \theta_j + m_j(\theta_j + \psi_j) \Big] \right) d(\theta_1 + \psi_1)\, d(\theta_2 + \psi_2)\, d\theta_1 d\theta_2\;. \quad (43)$$

Далі, визначаючи із системи (42) для $k = 1, 2$ частинний періодичний розв'язок методом невизначених коефіцієнтів, після елементарних викладок знаходимо

$$A_1^{(k)}(a_1, a_2, \tau, \psi_k) =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma_k} \exp(i\sigma_k \psi_k) \frac{i\sigma_k (b\lambda_k - \nu_k(\tau)) \Phi_k(a_1, a_2, \tau) - 2b\lambda_k F_k(a_1, a_2, \tau)}{4b^2 \lambda_k^2 - (b\lambda_k - \nu_k(\tau))^2 \sigma_k^2}\;, \quad (44)$$

$$B_1^{(k)}(a_1, a_2, \tau, \psi_k) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \sum_{\sigma_k} \exp(i\sigma_k \psi_k) \frac{i\sigma_k (b\lambda_k - \nu_k(\tau)) F_k(a_1, a_2, \tau) + 2b\lambda_k \Phi_k(a_1, a_2, \tau)}{a_k \left[4b^2 \lambda_k^2 - (b\lambda_k - \nu_k(\tau))^2 \sigma_k^2 \right]}\;, \quad (45)$$

де

$$\Phi_k(a_1, a_2, \tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k^{(0)} \exp(-i\sigma_k \psi_k^*) \cos(\theta_k + \psi_k)\, d(\theta_k + \psi_k)\, d\theta_k\;, \quad (46)$$

$$F_k(a_1, a_2, \tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f_k^{(0)} \exp(-i\sigma_k \psi_k^*) \sin(\theta_k + \psi_k)\, d(\theta_k + \psi_k)\, d\theta_k\;, \quad (47)$$

$$\psi_k^* = (\theta_k + \psi_k) - \theta_k\;, \quad k = 1, 2\;.$$

Тоді перше наближення збуреної змішаної крайової задачі $U_{\mathrm{I}}(x,t)$, згідно з асимптотичними розвиненнями (7) та (8), береться у вигляді

$$U_{\mathrm{I}}(x,t) = \sum_{k=1}^{2} a_k X_k(x) \cos(\theta_k + \psi_k) , \tag{48}$$

де величини a_k і ψ_k визначаються із системи рівнянь першого наближення:

$$\begin{aligned} \frac{da_k}{dt} &= \varepsilon A_1^{(k)}(a_1, a_2, \tau, \psi_k) , \quad k = 1, 2, \\ \frac{d\psi_k}{dt} &= b\lambda_k - \nu_k(\tau) + \varepsilon B_1^{(k)}(a_1, a_2, \tau, \psi_k) , \end{aligned} \tag{49}$$

праві частини яких виражаються формулами (44) – (47).

Інтегруючи систему рівнянь (49), одержуємо систему перших інтегралів або ж загальний розв'язок вигляду

$$a_k = p_k(t, C_1, C_2, C_3, C_4) , \qquad \psi_k = q_k(t, C_1, C_2, C_3, C_4) , \quad k = 1, 2 ,$$

де C_i, $i = 1, 2, 3, 4$, — довільні сталі. Останні визначаються із початкових умов збуреної змішаної крайової задачі, тобто при $t = 0$, $a_k = a_{0k}$, $\psi_k = \varphi_{0k}$, $k = 1, 2$. Таким чином, у першому наближенні задача Коші розв'язана.

Можна далі продовжити розгляд розв'язання задачі Коші при побудові асимптотичного розв'язку в першому покращеному наближенні. З цією метою запишемо функцію V_1, враховуючи формули (25), (27) та (29), у вигляді

$$\begin{aligned} V_1 = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \Bigg\{ & b_k \cos\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_k(\theta_i + \psi_i)}{\lambda_i} + d_k\right] + \\ & + V_k^{(1)}(a_1, a_2, \tau, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2, \theta_1, \theta_2) \Bigg\} . \end{aligned} \tag{50}$$

Для остаточного визначення функції V_1, а отже, і для визначення U_1, знайдемо довільні сталі b_k та d_k. Для цього підставимо вираз (50) в початкові умови (24), попередньо розвинувши функції $Y^*(x)$ і $Z^*(x)$ в ряди за власними функціями $X_n(x)$ „незбуреної" системи, і в одержаних рівностях зрівняємо коефіцієнти при них. В результаті знайдемо такі рівності:

$$\begin{aligned} b_k \cos\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_k \varphi_{0i}}{\lambda_i} + d_k\right] &= Y_k^* - V_k^{(1)}(a_1, a_2, 0, \varphi_{01}, \varphi_{02}, 0, 0) , \\ b_k \sin\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\lambda_k \varphi_{0i}}{\lambda_i} + d_k\right] &= \sum_{i=1}^{2} b\lambda_i \frac{\partial V_k^{(1)}(a_{10}, a_{20}, 0, \varphi_{01}, \varphi_{02}, 0, 0)}{\partial(\theta_i + \psi_i)} - Z_k^* , \end{aligned} \tag{51}$$

де

$$Y_k^* = \frac{\int_0^l Y^*(x) X_k(x)\, dx}{\int_0^l X_k^2(x)\, dx} , \qquad Z_k^* = \frac{\int_0^l Z^*(x) X_k(x)\, dx}{\int_0^l X_k^2(x)\, dx} . \tag{52}$$

Позначивши праві частини рівностей (51) відповідно через γ_k і δ_k, із останнього одержимо

$$b_k = \sqrt{\gamma_k^2 + \delta_k^2}\,, \quad d_k = \operatorname{arctg}\frac{\delta_k}{\gamma_k} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\lambda_k \varphi_{0i}}{\lambda_i}\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,. \tag{53}$$

Отже, шукана функція V_1 повністю визначається виразом (50), де довільні сталі b_k та d_k, $k = 1, 2$, знаходяться за формулами (53).

Функція U_1, яка визначається виразами (15), (50) і (19) – (21), дозволяє побудувати покращене перше наближення асимптотичного розв'язку:

$$U_{\mathrm{I\,покр}}(x,t) = \sum_{k=1}^{2} a_k X_k(x)\,\cos(\theta_k + \psi_k) + \\ + \varepsilon U_1(x, a_1, a_2, \tau, \theta_1 + \psi_1, \theta_2 + \psi_2, \theta_1, \theta_2)\,, \tag{54}$$

де a_k та ψ_k, $k = 1, 2$, визначаються, як відомо, із амплітудно-фазових рівнянь першого наближення (49).

Інтегруючи останні і використовуючи вказані вище початкові значення a_{0k} та φ_{0k}, $k = 1, 2$, завершуємо розв'язання поставленої задачі Коші.

1. *Митропольский Ю.А., Мосеенков Б.И.* Асимптотические решения уравнений в частных призводных. — Киев: Выща шк., 1976. — 592 с.
2. *Боголюбов Н.Н.* Одночастотные свободные колебания в нелинейных системах со многими степенями свободы // Сб. тр. Ин-та строит. механики АН УССР. — 1949. — № 10. — С. 9 – 21.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 501 с.
4. *Митропольский Ю.А.* Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. — М.: Наука, 1964. — 431 с.

Одержано 25.05.98