УДК 517.9

ПРО ПОБУДОВУ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКУ БАГАТОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ ВИРОДЖЕНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

М. Б. Віра

Ніжин. держ. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2
e-mail: VyraMaryna@mail.ru

We consider a possibility of constructing an asymptotic solution to a multipoint boundary-value problem for a linear singularly perturbed differential system with identically degenerate derivative matrix in the case where the main operator has multiple spectrum. The study is carried out with a use of asymptotic analysis results for a general solution of linear degenerate singularly perturbed differential system. We find conditions for existence and uniqueness of a solution of the problem under consideration.

Рассматривается возможность построения асимптотического решения многоточечной краевой задачи для линейной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей при производных в случае кратного спектра главного оператора. С этой целью использованы результаты асимптотического анализа общего решения линейной вырожденной сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений. Получены условия существования и единственности решения этой краевой задачи.

1. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу вигляду

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{p} M_i x(t_i,\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{1.2}$$

в якій $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $t \in [t_1;t_p]$, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ — малий параметр, $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — $(n\times n)$-матриці, $d(\varepsilon)$ і $f(t,\varepsilon)$ — $(n-1)$- та n-вимірний вектори-стовпці відповідно; $M_i, i=\overline{1,p}$, — $(n-1)\times n$-матриці зі сталими елементами, $t_i < t_{i+1}, i=\overline{1,p-1}$.

Нехай виконуються такі умови:

1°) матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[t_1;t_p]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε, тобто

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k A_k(t), \quad f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(t); \tag{1.3}$$

2°) матриці $A_k(t)$, $B(t)$ і вектори $f_k(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[t_1;t_p]$;

3°) вектор $d(\varepsilon)$ зображується у вигляді асимптотичного розвинення $d(\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k d_k$ при $\varepsilon\to 0$;

4°) $\det B(t) = 0 \ \forall t \in [t_1;t_p]$;

5°) $\det A_0(t) \neq 0 \, \forall t \in [t_1; t_p]$;

6°) гранична в'язка матриць $L(t, \varepsilon) = A_0(t) - \lambda B(t)$ є регулярною при всіх $t \in [t_1; t_p]$ і зберігає на цьому відрізку сталу кронекерову структуру.

Крайову задачу вигляду (1.1), (1.2) розглянуто в роботі [1] за умови $B(t) = E$, де E — одинична матриця. При цьому для побудови асимптотики було використано метод примежових функцій [2]. На основі асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1.1), виконаного у [3, 4], у роботах [5, 6] розглянуто двоточкову крайову задачу для системи вигляду (1.1) за умови, що гранична в'язка матриць має кратний спектр.

У даній статті ми узагальнимо результати, описані у [5], на випадок багатоточкової крайової задачі. Знову ж таки будемо припускати, що гранична в'язка матриць $L(t, \lambda)$ має на відрізку $[t_1; t_p]$ кратний спектр, а саме: один скінченний елементарний дільник кратності $n - 1$ і один простий нескінченний елементарний дільник.

Тоді, як показано у [3], з цієї умови випливає, що власному значенню $\lambda_0(t)$ граничної в'язки відповідає жорданів ланцюжок векторів $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, матриці $A_0(t)$ відносно $B(t)$, які визначаються за формулами

$$\varphi_i(t) = [H(t)B(t)]^{i-1}\varphi(t), \quad i = \overline{1, n-1},$$

де $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0(t) - \lambda_0 B(t)$, а $\varphi(t)$ — власний вектор в'язки $L(t, \lambda)$. Нульовому власному значенню матриці $B(t)$ відповідає лише один власний вектор, який позначимо через $\widetilde{\varphi}(t)$.

Позначимо через $\psi(t)$ та $\widetilde{\psi}(t)$ нулі матриць $(A_0(t) - \lambda_0(t)B(t))^*$ та $B^*(t)$ відповідно і визначимо їх так, щоб виконувалися співвідношення

$$(B(HB)^{i-1}\varphi, \psi) = \delta_{i,n-1}, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (A_0\widetilde{\varphi}, \widetilde{\psi}) = 1,$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

2. Асимптотика розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь. Згідно з теорією асимптотичного інтегрування вироджених лінійних систем диференціальних рівнянь, розробленою в [3], асимптотичні розвинення лінійно незалежних розв'язків однорідної системи

$$\varepsilon B(t) \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x, \tag{2.1}$$

що відповідають скінченному елементарному дільнику, можна побудувати у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = u(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda(\tau, \varepsilon))d\tau\right), \tag{2.2}$$

де $u(t, \varepsilon)$ — n-вимірна вектор-функція, $\lambda(t, \varepsilon)$ — скалярна функція, які зображуються формальними розвиненнями за дробовими степенями малого параметра. При цьому, як показано у [3], функція $\lambda(t, \varepsilon)$ повинна задовольняти рівняння розгалуження

$$\lambda^{n-1} + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks}[\lambda^k] = 0, \tag{2.3}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j (P_j^s(H\Gamma)\varphi, \psi), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

$$L_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{s-i} (-1)^j D^i[\lambda^k](P_{i+k,j}^{s-i}(HB, H\Gamma)\varphi, \psi), \quad k, s = 1, 2, \ldots.$$

Відповідний вектор $u(t, \varepsilon)$ зображується у вигляді

$$u(t, \varepsilon) = \varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H \widetilde{L}_{0s} \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H \widetilde{L}_{ks}[\lambda^k]\varphi, \tag{2.4}$$

де

$$\begin{gathered} \widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j P_j^s(H\Gamma), \quad s = 1, 2, \ldots, \\ \widetilde{L}_{ks}[\lambda^k] = \sum_{i=0}^{s} \sum_{j=0}^{s-i} (-1)^j D^i[\lambda^k] P_{i+k,j}^{s-i}(HB, H\Gamma), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Символом $P_{s,k}^m(HB, H\Gamma)$ тут позначено суму всеможливих „добутків” s множників матриць HB і k операторів $H\Gamma_{j_1}, H\Gamma_{j_2}, \ldots, H\Gamma_{j_k}$ з натуральними індексами, сума яких $j_1 + {} + j_2 + j_k = m$, де $\Gamma_k = A_k(t) - \delta_{k,1} B(t) \dfrac{d}{dt}$, $k = 1, 2, \ldots$. При цьому перший множник H у всіх доданках цього виразу „відбирається”. Символом $D^i[\lambda^k]$ позначають диференціальний вираз, що є сумою всеможливих добутків k „множників” λ та i „множників” $D = \dfrac{d}{dt}$. При цьому оператор D діє на весь вираз, який міститься праворуч від нього, наприклад,

$$D^2[\lambda^2] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2 \lambda = 3(\lambda')^2 + 4\lambda\lambda''.$$

Доведено, що за відсутності точок повороту рівняння розгалуження (2.3) завжди має $n-1$ розв’язок $\lambda_i(t, \varepsilon)$, які можна знайти у вигляді формальних розвинень за дробовими степенями малого параметра, показники яких залежать від поведінки коефіцієнтів $L_{ks}[\lambda^k]$ і визначаються за допомогою діаграм Ньютона.

Як і в роботі [5], припустимо, що виконується умова

7°) $L_{01} = -(\Gamma_1 \varphi, \psi) = -(A_1 \varphi, \psi) + (B\varphi', \psi) \neq 0 \; \forall t \in [t_1; t_p]$.

Тоді відповідні розвинення для функцій $\lambda_i(t, \varepsilon)$ можна побудувати за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{n-1}}$:

$$\lambda_j(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, n-1}, \tag{2.6}$$

причому перший коефіцієнт задовольняє визначальне рівняння

$$(\lambda_1^{(j)}(t))^{n-1} + L_{01} = 0. \tag{2.7}$$

Звідси отримуємо

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[n-1]{|(\Gamma_1\varphi, \psi)|} \exp\left(i\,\frac{\arg(\Gamma_1\varphi,\psi) + 2\pi(j-1)}{n-1}\right), \quad j = \overline{1, n-1}.$$

Підставляючи ряд (2.6) у рівняння розгалуження (2.3), дістаємо

$$\sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k P_{n-1}^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k L_{0,\frac{k}{n-1}} + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n-1}]} \sum_{j=1}^{k-s(n-1)} \mu^k L_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(i)})] = 0, \qquad (2.8)$$

де $L_{0,\frac{k}{n-1}} = 0$, якщо число k не ділиться на $n-1$. Прирівнюючи в (2.8) вирази при однакових степенях μ, отримуємо нескінченну систему рівнянь

$$P_{n-1}^k(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k}{n-1}} + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n-1}]} \sum_{j=1}^{k-s(n-1)} L_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(i)})] = 0, \quad k = n-1, n, \ldots. \qquad (2.9)$$

Перше рівняння цієї системи (при $k = n-1$) збігається із визначальним рівнянням (2.7). Покладаючи в ньому $n+k-1$ замість k і беручи до уваги, що

$$P_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)}) = (n-1)(\lambda_1^{(i)})^n \lambda_{k+1}^{(i)} + \widetilde{P}_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)}),$$

де $\widetilde{P}_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)})$ — частина виразу $P_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)})$, яка містить тільки ті $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких $j < k+1$, а третій доданок у (2.9) не містить $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких перевищують k, маємо таку рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів розвинення (2.6):

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{(n-1)(\lambda_1^{((i))})^n}\left(\widetilde{P}_{n-1}^{n+k-1}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{n+k-1}{n-1}} + \sum_{s=1}^{[\frac{n+k-2}{n-1}]} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{j=1}^{n+k-s(n-1)-1} L_{js}[P_j^{\overline{n+k-s(n-1)-1}}(\lambda^{(i)})]\right). \qquad (2.10)$$

Щоб одержати відповідні розвинення для векторів $u_i(t,\varepsilon)$, підставимо (2.6) у (2.3). Перегрупувавши доданки, дістанемо розвинення

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n-1},$$

коефіцієнти яких визначаються формулами

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{s=0}^{[\frac{k-1}{n-1}]} \sum_{j=1}^{k-s(n-1)} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(i)})]\,\varphi +$$
$$+ H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{n-1}}\varphi, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad i = \overline{1, n-1}. \qquad (2.11)$$

3. Побудова частинного розв'язку неоднорідної системи. Як показано у [3], частинний розв'язок неоднорідної системи (1.1) можна побудувати у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = \widetilde{v}(t,\varepsilon), \tag{3.1}$$

де $v(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, який зображується формальним розвиненням

$$\widetilde{v}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(t). \tag{3.2}$$

Для визначення коефіцієнтів $\widetilde{v}_k(t)$ підставимо ряд (3.2) у систему (1.1) і, прирівнявши вирази при однакових степенях ε, дістанемо рівняння

$$A_0(t)\widetilde{v}_0(t) = -f_0(t),$$

$$A_0(t)\widetilde{v}_k(t) = B(t)\widetilde{v}'_{k-1}(t) - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Звідси, завдяки виконанню умови 5°, однозначно визначаються вектори $\widetilde{v}_0(t)$, $\widetilde{v}_k(t)$:

$$\widetilde{v}_0(t) = -A_0^{-1}(t) f_0(t), \tag{3.3}$$

$$\widetilde{v}_k(t) = A_0^{-1}(t) \left[B(t)\widetilde{v}'_{k-1}(t) - \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\widetilde{v}_{k-i}(t) - f_k(t) \right], \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.4}$$

4. Побудова формального розв'язку крайової задачі. Перейдемо до побудови розв'язку крайової задачі (1.1), (1.2). Припустимо, що виконується умова

8°) $\operatorname{Re}\lambda_0(t) < 0 \; \forall t \in [t_1; t_p]$.

Тоді розв'язок крайової задачі (1.1), (1.2) будемо будувати у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = \mu^{-(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} u_i(t,\mu) c_i(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_{t_1}^{t} \lambda_i(\tau,\mu) d\tau \right) + \widetilde{v}(t,\varepsilon), \tag{4.1}$$

де $c_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, — скалярні множники, які розкладаються у формальні степеневі ряди

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c_k^{(i)}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

коефіцієнти яких $c_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \ldots$, підлягають визначенню із крайової умови (1.2).

Підставивши вектор (4.1) у крайову умову (1.2), дістанемо

$$M_1 \sum_{j=1}^{n-1} u_j(t_1,\mu) c_j(\varepsilon) + \sum_{i=2}^{p} \sum_{j=1}^{n-1} M_i u_j(t_i,\mu) c_j(\varepsilon) \times$$

$$\times \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_{t_1}^{t_i} \lambda_j(\tau,\mu) d\tau \right) = \mu^{n-2} (d(\varepsilon) - \sum_{i=1}^{p} M_i \widetilde{v}(t_i,\varepsilon)).$$

Беручи до уваги умову 8°, можемо стверджувати, що доданки, які містять експоненти, є експоненціально малими. Знехтувавши ними, будемо розглядати рівняння

$$\sum_{j=1}^{n-1} M_1 u_j(t_1,\mu)c_j(\varepsilon) = \mu^{n-2}(d(\varepsilon) - \sum_{i=1}^{p} M_i \widetilde{v}(t_i,\varepsilon)).$$

Прирівнявши в ньому коефіцієнти при однакових степенях μ, дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} M_1 u_i^{(j)}(t_1)c_{k-i}^{(j)} = d_{\frac{k-n+2}{n-1}} - \sum_{i=1}^{p} M_i \widetilde{v}_{\frac{k-n+2}{n-1}}(t_i), \tag{4.2}$$

де вектори $d_{\frac{k-n+2}{n-1}}$ та $\widetilde{v}_{\frac{k-n+2}{n-1}}$ дорівнюють 0, якщо $k-n+2$ не ділиться на $n-1$ або $\dfrac{k-n+2}{n-1} < 0$.

Розглянемо рівняння (4.2) при $k < n-2$:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=0}^{k} M_1 u_i^{(j)}(t_1)c_{k-i}^{(j)} = 0. \tag{4.3}$$

Оскільки $u_j^{(i)}(t) = \sum_{s=1}^{j} P_s^j(\lambda^{(i)})(HB)^s\varphi$ при $j < n-2$, останні рівняння набирають вигляду

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(t_1))c_j^{(i)} M_1(H(t_1)B(t_1))^s\varphi(t_1) = 0, \quad k = \overline{0,n-3}. \tag{4.4}$$

Припустимо, що виконується умова

9°) $\det M_1U_0 \neq 0$, де

$$U_0 = [\varphi(t_1), H(t_1)B(t_1)\varphi(t_1), \ldots, (H(t_1)B(t_1))^{n-2}\varphi(t_1)].$$

Тоді, враховуючи лінійну незалежність векторів $M_1(H(t_1)B(t_1))^i\varphi(t_1)$, $i = \overline{0,n-3}$, отримуємо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(t_1))c_j^{(i)} = 0, \quad s = \overline{0,k}, \quad k = \overline{0,n-3}. \tag{4.5}$$

Поклавши в (4.2) $k = n-2$ і підставивши відповідні вирази для коефіцієнтів $u_k^{(i)}(t)$, дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{j} P_s^j(\lambda^{(i)}(t_1))c_{n-2-j}^{(i)} M_1(H(t_1)B(t_1))^s\varphi(t_1) = d_0 - \sum_{i=1}^{p} M_i\widetilde{v}_0(t_i). \tag{4.6}$$

Позначимо вектор у правій частині через l_{n-2} і розкладемо його за базисом $M_1(H(t_1)\times$ $\times B(t_1))^i\varphi(t_1)$, $i=\overline{0,n-2}$:

$$l_{n-2}=\sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i^{(n-2)}M_1(H(t_1)B(t_1))^i\varphi(t_1).$$

Враховуючи цей розклад і лінійну незалежність векторів, що утворюють матрицю M_1U_0, із рівняння (4.6) знаходимо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-s-2}P_s^{n-j-2}(\lambda^{(i)}(t_1))c_j^{(i)}=\alpha_s^{(n-2)},\quad s=\overline{0,n-2}. \tag{4.7}$$

Взявши $n-2$ рівняння із системи (4.5) при $s=k$, $k=\overline{0,n-3}$, і останнє рівняння із системи (4.7) при $s=n-2$, одержимо лінійну алгебраїчну систему

$$\sum_{i=1}^{n-1}c_0^{(i)}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_1^{(i)}(t_1)c_0^{(i)}=0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}[\lambda_1^{(i)}(t_1)]^{n-3}c_0^{(i)}=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}[\lambda_1^{(i)}(t_1)]^{n-2}c_0^{(i)}=\alpha_{n-2}^{(n-2)},$$

яку можна записати у вигляді

$$Wc_0=m_0,$$

де

$$W=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ \lambda_1^{(1)}(t_1) & \lambda_1^{(2)}(t_1) & \dots & \lambda_1^{(n-1)}(t_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (\lambda_1^{(1)}(t_1))^{n-2} & (\lambda_1^{(2)}(t_1))^{n-2} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)}(t_1))^{n-2}\end{pmatrix},$$

$c_0=\operatorname{col}(c_0^{(1)},c_0^{(2)},\dots,c_0^{(n-1)})$, $m_0=\operatorname{col}(0,\dots,0,\alpha_{n-2}^{(n-2)})$. Визначник матриці W є визначником Вандермонда і завдяки виконанню умови 7° не дорівнює нулю. Тоді з останнього рівняння дістанемо

$$c_0=W^{-1}m_0.$$

Розглянемо рівняння (4.2) у загальному вигляді. Беручи до уваги формули коефіцієнтів $u_k^{(i)}(t)$, маємо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{s=0}^{j} M_1 H(t_i)\widetilde{L}_{s0}[P_s^j(\lambda^{(i)}(t_1))]\varphi(t_1)c_{k-j}^{(i)} = d_{\frac{k-n+2}{n-1}} - \sum_{i=1}^{p} M_i \widetilde{v}_{\frac{k-n+2}{n-1}}(t_i) -$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k} M_1 H \widetilde{L}_{0\frac{j}{n-1}}\varphi(t_1)c_{k-j}^{(i)} -$$
$$-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k}\sum_{s=1}^{[\frac{j-1}{n-1}]}\sum_{r=1}^{j-(n-1)s} M_1 H \widetilde{L}_{rs}[P_r^{j-(n-1)s}(\lambda^{(i)}(t_1))]c_{k-j}^{(i)}\varphi(t_1). \tag{4.8}$$

Позначивши через l_k вектор у правій частині цього рівняння, розкладемо його за базисом

$$l_k = \sum_{i=0}^{n-2}\alpha_i^{(k)} M_1 (H(t_1)B(t_1))^i \varphi(t_1).$$

Врахувавши цей розклад і лінійну незалежність векторів базиса, від рівняння (4.8) перейдемо до системи рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-s} P_s^{k-j}(\lambda^{(i)}(t_1))c_j^{(i)} = \alpha_s^{(k)}, \quad s = \overline{0,k}, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{4.9}$$

Визначивши на попередніх кроках рівняння системи (4.9), що містять сталі $c_0^{(i)}, \ldots, c_{k-1}^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$, отримаємо системи для визначення $c_k^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$:

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_k^{(i)} = \alpha_0^{(k)},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_1^{(i)}(t_1)c_k^{(i)} = \alpha_1^{(k+1)} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} P_1^{k+1-j}(\lambda^{(i)}(t_1))c_j^{(i)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}[\lambda_1^{(i)}(t_1)]^{n-2}c_k^{(i)} = \alpha_{n-2}^{(k+n-2)} - \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} P_{n-2}^{k+n-2-j}(\lambda^{(i)}(t_1))c_j^{(i)}.$$

Тоді цю систему можна записати у вигляді

$$Wc_k = m_k,$$

де $c_k = \operatorname{col}(c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \ldots, c_k^{(n-1)})$, m_k — вектор у правій частині одержаної системи. Звідси однозначно визначається вектор c_k, $k = 1, 2, \ldots$:

$$c_k = W^{-1} m_k.$$

Визначення цих сталих і завершує побудову формального розв'язку крайової задачі (1.1), (1.2).

5. Доведення асимптотичного характеру побудованого формального розв'язку. Покажемо, що побудований формальний розв'язок має асимптотичний характер. Для цього розглянемо m-те наближення

$$x_m(t,\varepsilon) = \mu^{-(n-2)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \mu^k \left(\sum_{j=0}^{k} c_j^{(i)} u_{k-j}^{(i)} \right) \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_{t_1}^{t} \lambda_m^{(i)}(\tau,\varepsilon) d\tau \right) + \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^k \widetilde{v}_k(t), \tag{5.1}$$

де

$$\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{m} \mu^k \lambda_k^{(i)}(t).$$

Запишемо точний розв'язок крайової задачі (1.1), (1.2) у вигляді

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + y_m(t,\varepsilon),$$

де $y_m(t,\varepsilon)$ — вектор відхилу.

Виходячи із способу побудови вектора $x_m(t,\varepsilon)$, можна переконатися, що вектор $y_m(t,\varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі

$$\varepsilon B(t) \frac{dy_m}{dt} = A(t,\varepsilon) y_m + \mu^{m-n+3} a(t,\varepsilon), \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{p} M_i y_m(t_i,\varepsilon) = \mu^{m-n+3} b(\varepsilon), \tag{5.3}$$

в якій $a(t,\varepsilon)$ — вектор-функція, рівномірно обмежена на $[t_1; t_p]$ при $\varepsilon \to 0$; $b(\varepsilon)$ — деякий обмежений n-вимірний вектор.

Згідно з [3], фундаментальна матриця однорідної системи (2.1) виражається асимптотичною формулою

$$X(t,\mu) = [U_m(t,\varepsilon) + O(\mu^\alpha)] \exp\left(\varepsilon^{-1} \int_{t_1}^{t} \Lambda_m(\tau,\varepsilon) d\tau \right),$$

де $\alpha = m - n + 3$, $U_m(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \mu^k U_k(t)$, а $U_k(t)$, $k = \overline{0,m}$, — матриці, що утворюються із векторів-стовпців $u_k^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\Lambda_m(t,\varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)\}$. Подібну структуру має і фундаментальна матриця спряженої системи

$$\varepsilon \frac{d}{dt} B^*(t) x = -A^*(t,\varepsilon) x :$$

$$Y(t,\varepsilon) = [\widehat{U}_m(t,\varepsilon) + O(\mu^\alpha)] \exp\left(-\varepsilon^{-1}\int\limits_{t_1}^{t} \Lambda_m^\star(\tau,\varepsilon)d\tau\right).$$

Тоді за формулою [3, с. 61] загальний розв'язок системи (5.2) запишемо у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon) + O(\mu^\alpha)] \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_{t_1}^{t} \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right) c(\varepsilon) +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} [U_m(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^\alpha)] \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_{\tau}^{t} \Lambda_m(s,\varepsilon)ds\right) \times$$

$$\times [\widehat{U}_m^\star(\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^\alpha)] q(\tau,\varepsilon)d\tau - \widetilde{\varphi}(t)[\widetilde{\psi}^*(t)L\widetilde{\varphi}(t)]^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon), \tag{5.4}$$

де $q(t,\varepsilon) = \mu^{m-2n+4}a(t,\varepsilon)$, $L = A(t,\varepsilon) - \varepsilon B(t)\dfrac{d}{dt}$, $c(\varepsilon)$ — довільний $(n-1)$-вимірний вектор.

Визначимо вектор $c(\varepsilon)$ із крайової умови (5.3) і підставимо його у вираз (5.4). Тоді розв'язок крайової задачі (5.2), (5.3) запишемо у вигляді

$$y_m(t,\varepsilon) = s(t,\varepsilon) + k(t,\varepsilon) + \int\limits_{t_1}^{t_p} G(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau, \tag{5.5}$$

де

$$s(t,\varepsilon) = \mu^\alpha [U_m(t,\varepsilon) + O(\mu^\alpha)] \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_{t_1}^{t} \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right) \times$$

$$\times ([M_1 U_m(t_1,\varepsilon)]^{-1} + O(\mu^\alpha)) b(\varepsilon),$$

$$k(t,\varepsilon) = [U_m(t,\varepsilon) + O(\mu^\alpha)] \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_{t_1}^{t} \Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right) \times$$

$$\times ([M_1 U_m(t_1,\varepsilon)]^{-1} + O(\mu^\alpha)) \sum_{i=1}^{p} M_i \widetilde{\varphi}(t_i)[\widetilde{\psi}^*(t_i)L\widetilde{\varphi}(t_i)]^{-1}\widetilde{\psi}^*(t_i)q(t_i,\varepsilon) -$$

$$- \widetilde{\varphi}(t)[\widetilde{\psi}^*(t)L\widetilde{\varphi}(t)]^{-1}\widetilde{\psi}^*(t)q(t,\varepsilon),$$

а матриця Гріна $G(t,\tau,\varepsilon)$ має вигляд

$$G(t,\tau,\varepsilon) = \begin{cases} -(U_m(t,\varepsilon)+O(\mu^\alpha))\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\times \\ \times([M_1U_m(t_1,\varepsilon)]^{-1}+O(\mu^\alpha))\sum_{i=2}^{p}\chi_{[t_1;t_i]}(\tau)\times \\ \times(M_iU_m(t_i,\varepsilon)+O(\mu^\alpha))\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{\tau}^{t_i}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds\right)\times \\ \times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\mu^\alpha)), \\ \text{якщо}\quad t_1\le t<\tau\le t_2\le\ldots\le t_p, \\ (U_m(t,\varepsilon)+O(\mu^\alpha))\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{\tau}^{t}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds\right)\times \\ \times(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\mu^\alpha))-(U_m(t,\varepsilon)+O(\mu^\alpha))\times \\ \times\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right)([M_1U_m(t_1,\varepsilon)]^{-1}+O(\mu^\alpha))\times \\ \times\sum_{i=2}^{p}\chi_{[t_1;t_i]}(\tau)(M_iU_m(t_i,\varepsilon)+O(\mu^\alpha))\times \\ \times\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{\tau}^{t_i}\Lambda_m(s,\varepsilon)ds\right)(\widehat{U}_m^*(\tau,\varepsilon)+O(\mu^\alpha)), \\ \text{якщо}\quad t_1\le\tau\le t\le t_2\le\ldots\le t_p, \end{cases},$$

де $\chi_{[t_1;t_i]}(\tau)$ — характеристична функція відрізка $[t_1;t_i]$,

$$\chi_{[t_1;t_i]}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{якщо}\quad \tau\in[t_1;t_i], \\ 0, & \text{якщо}\quad \tau\notin[t_1;t_i]. \end{cases}$$

Оцінивши вираз (5.5) за нормою, дістанемо

$$\|y_m(t,\varepsilon)\| \le \|s(t,\varepsilon)\| + \int_{t_1}^{t_p}\|G(t,\tau,\varepsilon)\|\,\|q(\tau,\varepsilon)\|d\tau + \|k(t,\varepsilon)\|.$$

З неособливості матриці $M_1U_0(t_1)$ випливає існування та обмеженість матриці $[M_1U_m(t_1,\varepsilon)]^{-1}$ при досить малих $\varepsilon>0$. Крім того, матриця $[M_1U_m(t,\varepsilon)]$ неособлива при $m\ge n-2$, а обернена до неї має полюс $(n-2)$-го порядку в точці $\mu=0$, і її можна подати у вигляді

$$[M_1U_m(t,\varepsilon)]^{-1} = \mu^{-(n-2)}R(t,\varepsilon),$$

де $R(t,\varepsilon)$ — деяка матриця $(n-1)$-го порядку, рівномірно обмежена на $[t_1;t_p]$.

Враховуючи цей факт, а також умову 8°, з якої випливає обмеженість експоненціальних матриць, що входять у вираз (5.5), дістанемо таку асимптотичну оцінку вектора відхилу $y_m(t,\varepsilon)$:

$$\|y_m(t,\varepsilon)\| \le \mu^{m-3n+6}c,$$

де c — деяка стала, що не залежить від ε.

Підсумком наведених міркувань є наступна теорема.

Теорема. *Якщо гранична в'язка матриць $A_0(t)-\lambda_0 B(t)$ має на відрізку $[t_1;t_p]$ один скінченний елементарний дільник кратності $n-1$ і один простий нескінченний, M_i, $i=\overline{1,p}$, — прямокутні матриці розмірності $(n-1)\times n$ і виконуються умови 1° – 9°, то при досить малих ε існує єдиний розв'язок крайової задачі (1.1), (1.2), що виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) + O(\mu^{m-3n+6}),$$

де вектор $x_m(t,\varepsilon)$ зображується у вигляді розвинення

$$x_m(t,\varepsilon) = \mu^{-(n-2)} \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=1}^{n-1}\mu^k\left(\sum_{j=0}^{k} c_j^{(i)} u_{k-j}^{(i)}(t)\right)\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_1}^{t}\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{m}\mu^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right) + \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{n-1}\right]}\mu^{k(n-1)}\widetilde{v}_k(t),$$

а вектор-функції $u_k^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, $\widetilde{v}(t)$, скалярні функції $\lambda_k^{(i)}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, коефіцієнти $c_k^{(i)}$, $i=\overline{1,n-1}$, визначаються за описаним вище алгоритмом.

1. *Каранджулов Л. И.* Линейные краевые задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных систем // Докл. АН Украины. — 1996. — № 7. — С. 1 – 5.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990.
3. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000.
4. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — Киев: Вища шк., 1989.
5. *Віра М. Б.* Двоточкова крайова задача для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра головного оператора // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. — 2009. — **18**. — С. 19 – 28.
6. *Віра М. Б.* Про побудову асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної диференціально-алгебраїчної системи // Динам. системы: межведом. науч. сб. — 2009. — **1(29)**, № 1. — С. 15 – 30.

Одержано 17.09.14,
після доопрацювання — 08.11.14