УДК 517.929

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ ТА ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We obtain conditions for existence of almost periodic and periodic solutions of almost periodic difference equations with discrete argument in metric space without using the $\mathcal{H}$-classes of these equations.

Получены условия существования почти периодических и периодических решений почти периодических разностных уравнений с дискретным аргументом в метрическом пространстве, в которых не используются $\mathcal{H}$-классы этих уравнений.

1. Основні позначення та об'єкт досліджень. Нехай M — метричний простір із метрикою ρ_M, $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел і $\mathbb{N}$ — множина всіх натуральних чисел. Зафіксуємо довільний елемент $a \in M$. Позначимо через $\mathfrak{M}$ метричний простір усіх відображень $\mathbf{x} : \mathbb{Z} \to M$, для кожного з яких

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \rho_M(\mathbf{x}(n), a) < \infty,$$

з метрикою

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \rho_M(\mathbf{x}_1(n), \mathbf{x}_2(n)).$$

У просторі $\mathfrak{M}$ визначимо оператор зсуву S_m, $m \in \mathbb{Z}$, за допомогою формули

$$(S_m\mathbf{x})(n) = \mathbf{x}(n+m), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Означення 1. *Елемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ називається майже періодичним (за Бохнером) (див. [1, 2]), якщо замикання множини $\{S_m\mathbf{y} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактною підмножиною цього простору.*

Множина $\mathfrak{B}$ майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є підпростором цього простору з метрикою $\rho_{\mathfrak{M}}$.

Нехай $B[\mathbf{a}, r]$ — замкнена куля у просторі $\mathfrak{M}$ із центром у точці $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$ та радіусом r, тобто множина $\{\mathbf{x} \in \mathfrak{M} : \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \le r\}$.

Означення 2. *Оператор $\mathbf{H} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ називається майже періодичним, якщо для кожних $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$, $r > 0$ і послідовності $(m_k)_{k\ge1}$ натуральних чисел існує така підпослідовність $(m_{k_l})_{l\ge1}$, що*

$$\lim_{\substack{l_1\to\infty\\ l_2\to\infty}} \sup_{\mathbf{x}\in B[\mathbf{a},r]} \rho_{\mathfrak{M}}\left(S_{m_{l_1}}\mathbf{H}S_{-m_{l_1}}\mathbf{x}, S_{m_{l_2}}\mathbf{H}S_{-m_{l_2}}\mathbf{x}\right) = 0.$$

Це означення у випадку лінійного майже періодичного оператора $\mathbf{H}$ рівносильне означенню, що використовувалось Е. Мухамадієвим при дослідженні оборотності лінійних функціональних операторів у просторі обмежених на осі функцій [3, 4].

Нехай $\mathcal{K}$ — множина всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset M$ і $R(\mathbf{x})$ — множина значень відображення $\mathbf{x}$, тобто множина $\{\mathbf{x}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Для компактної множини $K \subset \mathcal{K}$ позначимо через $\mathfrak{D}_K$ множину всіх елементів $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких $R(\mathbf{x}) \subset K$.

У подальшому ми будемо використовувати наступне означення майже періодичного оператора.

Означення 3. *Оператор* $\mathbf{H} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ *називається майже періодичним, якщо для кожних множини* $K \in \mathcal{K}$ *і послідовності* $(m_k)_{k\geqslant 1}$ *цілих чисел існує така підпослідовність* $(m_{k_l})_{l\geqslant 1}$, *що*

$$\lim_{\substack{l_1\to\infty \\ l_2\to\infty}} \sup_{x\in\mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}\left(S_{m_{l_1}}\mathbf{H}S_{-m_{l_1}}x, S_{m_{l_2}}\mathbf{H}S_{-m_{l_2}}x\right) = 0.$$

Зазначимо, що майже періодичний за означенням 3 оператор $\mathbf{H}$ може не бути майже періодичним за означенням 2 (відповідний приклад наведено в пункті 2). Однак майже періодичний за означенням 2 оператор $\mathbf{H}$ є майже періодичним і за означенням 3.

Розглянемо майже періодичний у сенсі означення 3 різницевий оператор $\mathbf{F} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, що визначається за допомогою формули

$$(\mathbf{F}\mathbf{x})(n) = F(n, \mathbf{x}(n), \mathbf{x}(n+m_1), \ldots, \mathbf{x}(n+m_k)), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, $k \in \mathbb{N}$, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{Z}$ і $F : \mathbb{Z} \times M^{k+1} \to M$ — відображення, для якого множина $F(\mathbb{Z}\times M_1\times\ldots\times M_{k+1})$ є обмеженою для всіх обмежених множин $M_1, \ldots, M_{k+1} \subset \subset M$. Оператору $\mathbf{F}$ поставимо у відповідність різницеве рівняння

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{h}, \tag{2}$$

де $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$.

Метою статті є встановлення умов, при виконанні яких обмежені розв'язки рівняння (2) є майже періодичними. При дослідженні рівняння (2) будемо використовувати один функціонал, визначений на множині розв'язків цього рівняння, множини значень яких є підмножинами компактних множин.

2. Приклад майже періодичного за означенням 3 оператора, що не є майже періодичним за означенням 2. Нехай метричний простір M є таким, що існують елемент $\mathbf{y} = \mathbf{y}(n)$ простору $\mathfrak{M}$ і число $\mu > 0$, для яких:

1) $\mathbf{y}(n) = \mathbf{y}(1)$ для всіх $n < 1$;

2) $\rho_M(\mathbf{y}(n_1), \mathbf{y}(n_2)) \geq \mu$, якщо $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ і $n_1 \neq n_2$.

Таким простором є кожний нескінченновимірний банаховий простір, якщо метрику ρ визначити за допомогою рівності (див. [5, с. 203])

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

Розглянемо множину $\mathfrak{S}$ усіх елементів $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, замикання множин значень яких є компактними підмножинами простору M.

Зафіксуємо довільний елемент b простору M і розглянемо елемент $\mathbf{b} = \mathbf{b}(n)$ простору $\mathfrak{M}$, для якого $\mathbf{b}(n) = b$ для всіх $n \in \mathbb{Z}$.

Визначимо оператор $\mathbf{G} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ за допомогою рівності

$$\mathbf{Gx} = \begin{cases} \mathbf{b}, & \text{якщо} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{S}, \\ \mathbf{y}, & \text{якщо} \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Очевидно, що для кожної компактної множини $K \subset M$

$$\{S_m \mathbf{G} S_{-m}\mathbf{x} : m \in \mathbb{Z}, \mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K\} = \{S_m \mathbf{G} S_{-m}\mathbf{x} : m \in \mathbb{Z}, \mathbf{x} \in \mathfrak{S}\} = \{\mathbf{b}\}.$$

Тому оператор $\mathbf{G} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є майже періодичним у сенсі означення 3. Однак цей оператор не є майже періодичним у сенсі означення 2. Справді, зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{z} \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{S}$. Очевидно, що

$$S_m \mathbf{G} S_{-m}\mathbf{z} = S_m \mathbf{y} \tag{3}$$

для кожного $m \in \mathbb{Z}$. Тому

$$\rho_{\mathfrak{M}}(S_{m_1}\mathbf{y}, S_{m_2}\mathbf{y}) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \rho_M(\mathbf{y}(n+m_1), \mathbf{y}(n+m_2)) = \lim_{n\to+\infty} \rho_M(\mathbf{y}(n+m_1), \mathbf{y}(n+m_2)) \geq \mu,$$

якщо $m_1 \neq m_2$.

Отже, якщо $m_1 \neq m_2$ і $\{S_m\mathbf{z} : m \in \mathbb{Z}\} \subset B[\mathbf{b}, r]$ (r — деяке додатне число), то

$$\sup_{\mathbf{x}\in B[\mathbf{b},r]} \rho_{\mathfrak{M}}\left(S_{m_1}\mathbf{H}S_{-m_1}\mathbf{x}, S_{m_2}\mathbf{H}S_{-m_2}\mathbf{x}\right) \geq \mu > 0.$$

Звідси, із співвідношення (3) та означення 2 випливає, що оператор $\mathbf{G}$ не є майже періодичним у сенсі означення 2.

3. Функціонал δ. Нехай Λ — обмежена підмножина простору M. Визначимо діаметр множини Λ рівністю

$$\operatorname{diam} \Lambda = \sup\{\rho_M(x, y) : x, y \in \Lambda\}.$$

Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$. Позначимо через $N(\mathbf{F}, K)$ множину всіх розв'язків рівняння (2), для кожного з яких $R(\mathbf{x}) \subset K$. Вважатимемо, що

$$N(\mathbf{F}, K) \neq \varnothing.$$

Розглянемо елемент $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$, для якого

$$\operatorname{diam} \overline{R(\mathbf{x}^*)} \neq 0,$$

і додатне число

$$r(\mathbf{x}^*, K) = \sup\left\{\rho_M(x, y) : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)}, y \in K\right\}.$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in [0, r(\mathbf{x}^*, K)]$. Позначимо через $\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких

$$R(\mathbf{y}) \subset K \quad \text{і} \quad \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{y}, \mathbf{x}^*) \geq \varepsilon.$$

Розглянемо функціонал

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{y}, \mathbf{F}\mathbf{x}^*). \tag{4}$$

Цей функціонал будемо використовувати для дослідження рівняння (2).

4. Основний результат. За допомогою розглянутого функціонала δ отримаємо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (2), в яких на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [6, 7]) не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (2) та відокремленість розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Теорема 1. *Нехай $K \in \mathcal{K}$. Якщо для розв'язку $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ різницевого рівняння (2) $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*) \neq 0$ і виконується співвідношення*

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) > 0 \tag{5}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{x}^*, K))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауваження 1. Розв'язок $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ рівняння (2), для якого $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ рівняння (2) не є елементом простору $\mathfrak{B}$. Тоді існує послідовність $\left(S_{m_p}\mathbf{x}^*\right)_{p\geq 1}$, для якої кожна підпослідовність $\left(S_{k_p}\mathbf{x}^*\right)_{p\geq 1}$ буде розбіжною. Отже, для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geq 1}$, $(q_r)_{r\geq 1}$ натуральних чисел і числа $\gamma \in (0, \operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*))$

$$\rho_{\mathfrak{M}}(S_{k_{p_r}}\mathbf{x}^*, S_{k_{q_r}}\mathbf{x}^*) \geq \gamma, \quad r \geq 1.$$

Тому

$$\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{x}^*, S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}}\mathbf{x}^*) \geq \gamma, \;\; r \geq 1,$$

і, отже,

$$S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}}\mathbf{x}^* \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \gamma), \quad r \geq 1. \tag{6}$$

Не обмежуючи загальності доведення можна на підставі включення $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$ вважати, що

$$\lim_{r\to\infty} \rho_{\mathfrak{M}}\left(S_{-k_{p_r}}\mathbf{h}, S_{-k_{q_r}}\mathbf{h}\right) = 0. \tag{7}$$

Зазначимо, що $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*)) \leq r(\mathbf{x}^*, K))$. Не зменшуючи загальності можна вважати, що послідовність $(S_{k_p}\mathbf{F}S_{-k_p}\mathbf{x})_{p\geq 1}$ збігається рівномірно на $\mathfrak{D}_K$. Тому

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in\mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}}(S_{k_p}\mathbf{F}S_{-k_p}\mathbf{x}, S_{k_q}\mathbf{F}S_{-k_q}\mathbf{x}) = 0. \tag{8}$$

Покажемо, що

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \gamma) = 0. \tag{9}$$

Очевидно, що завдяки (4) і (8)

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \gamma) = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{x}^*, K, \gamma)} \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}\mathbf{y}, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) \leq \rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*), \quad r \geq 1. \tag{10}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathfrak{M}}(\mathbf{F}S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, \mathbf{F}\mathbf{x}^*) = \\
&= \rho_{\mathfrak{M}} \left(S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{p_r}} \mathbf{F} S_{-k_{p_r}} \right) S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, S_{-k_{q_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathbf{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^* \right) \leq \\
&\leq \rho_{\mathfrak{M}} \left(S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{p_r}} \mathbf{F} S_{-k_{p_r}} \right) S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathbf{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^* \right) + \\
&\quad + \rho_{\mathfrak{M}} \left(S_{-k_{p_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathbf{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, S_{-k_{q_r}} \left(S_{k_{q_r}} \mathbf{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^* \right) = \\
&= \rho_{\mathfrak{M}} \left(\left(S_{k_{p_r}} \mathbf{F} S_{-k_{p_r}} \right) S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^*, \left(S_{k_{q_r}} \mathbf{F} S_{-k_{q_r}} \right) S_{k_{q_r}} \mathbf{x}^* \right) + \\
&\quad + \rho_{\mathfrak{M}} \left(S_{-k_{p_r}} S_{k_{q_r}} \mathbf{h}, S_{-k_{q_r}} S_{k_{q_r}} \mathbf{h} \right) \leq \\
&\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K} \rho_{\mathfrak{M}} \left(S_{k_{p_r}} \mathbf{F} S_{-k_{p_r}} \mathbf{x}, S_{k_{q_r}} \mathbf{F} S_{-k_{q_r}} \mathbf{x} \right) + \\
&\quad + \rho_{\mathfrak{M}} \left(S_{-k_{p_r}} \mathbf{h}, S_{-k_{q_r}} \mathbf{h} \right), \quad r \geq 1,
\end{aligned}$$

то на підставі (7), (8) і (10) справджується рівність (9). Це суперечить (5). Отже, припущення, що розв'язок $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ рівняння (2) не є елементом простору $\mathfrak{B}$, є хибним.

Теорему 1 доведено.

5. Умови періодичності розв'язків рівняння (2). Дослідимо рівняння (2) у випадку, коли множина значень розв'язку цього рівняння є скінченною, а отже, і компактною множиною.

Теорема 2. *Нехай K — довільна скінченна підмножина простору M. Якщо для розв'язку $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ рівняння (2), для якого $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*) \neq 0$, виконується співвідношення*

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) > 0 \tag{11}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{x}^*, K))$, то цей розв'язок є періодичним.

Зауваження 2. Розв'язок $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ рівняння (2), для якого $\operatorname{diam} R(\mathbf{x}^*) = 0$, є сталим і, отже, періодичним.

Доведення. Розглянемо число

$$\mu = \inf_{x, y \in K,\ x \neq y} \rho_M(x, y),$$

що завдяки умовам теореми є додатним. Оскільки за теоремою 1 розв'язок $\mathbf{x}^*$ рівняння (2) є майже періодичним, то

$$\rho_{\mathfrak{M}}(S_m \mathbf{x}^*, \mathbf{x}^*) < \mu$$

для деякого числа $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тому

$$S_m \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*,$$

що означає періодичність розв'язку $\mathbf{x}^*$.

Теорему 2 доведено.

Зауваження 3. Розв'язок $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{F}, K)$ рівняння (2) з нескінченною множиною значень, що задовольняє умови теореми 1, не може бути періодичним.

6. Додаткові зауваження. Функціонали, аналогічні до функціонала δ, вперше були застосовані автором у статтях [8–12] при дослідженні нелінійних майже періодичних рівнянь

$$x(t+1) = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$f(t, x(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

і

$$G(t, x(t), x(t - \Delta_1), \ldots, x(t - \Delta_m)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

відповідно. Тут $f : \mathbb{R} \times E \to E$ і $G : \mathbb{R} \times E^{m+1} \to E$ — неперервні оператори, $\mathbb{R}$ — множина всіх дійсних чисел, E — банаховий простір і $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ — довільні дійсні числа. Аналогічний функціонал при дослідженні нелінійного різницевого рівняння

$$x(n+1) = g(n, x(n)), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

та не розв'язаного відносно похідної нелінійного диференціального рівняння

$$F\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

використовувався відповідно у [13] і [14].

Наведені в пунктах 4 і 5 умови існування майже періодичних і періодичних розв'язків рівняння (2), що використовують функціонал δ, є новими. На відміну від згадуваної теореми Амеріо в теоремі 1 не використовуються $\mathcal{H}$-клас рівняння (2) та умова відокремлення розв'язків рівнянь $\mathcal{H}$-класу цього рівняння.

Дослідженню розв'язків майже періодичних рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо лише частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [15], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [6]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а в [6] використовується також вимога відокремленості обмежених розв'язків рівнянь. Результати Фавара були покращені Е. Мухамадієвим [3, 4]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [16–18]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [2], Амеріо [19] та В. В. Жикову [20]. Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних рівнянь (12) – (17) без використання $\mathcal{H}$-класів цих рівнянь отримано автором у [8 – 14].

Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь (вимога існування таких розв'язків у теоремах 1 і 2 є суттєвою) отримано у [21 – 24].

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen // Math. Ann. — 1927. — **96**, I Teil. — S. 119 – 147; II Teil. — S. 383 – 409.
2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953. — 396 с.
3. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.
4. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1981. — **30**, № 3. — С. 443 – 460.
5. *Колмогоров А. М., Фомін С. В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. — Київ: Вища шк., 1974. — 456 с.
6. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. — 1955. — **39**. — P. 97 – 119.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 1. — С. 118 – 124.
9. *Slyusarchuk V. Yu.* Conditions of almost periodicity for bounded solutions of nonlinear difference equations with continuous argument // J. Math. Sci. — 2014. — **197**, № 1. — P. 122 – 128.
10. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 2. — С. 307 – 312.
11. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь // Буков. мат. журн. — 2013. — **1**, № 1 – 2. — С. 136 – 138.
12. *Слюсарчук В. Ю.* Дослідження майже періодичних різницевих рівнянь з неперервним аргументом, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь // Буков. мат. журн. — 2013. — **1**, № 3 – 4. — С. 137 – 143.
13. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 416 – 425.
14. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2014. — **66**, № 3. — С. 384 – 393.
15. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. — 1927. — **51**. — P. 31 – 81.
16. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. – 1981. — **116(158)**, № 4(12). — С. 483 – 501.
17. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130(172)**, № 1(5). — С. 86 – 104.
18. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262 – 267.
19. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. — 1960. — **30**. — P. 288 – 301.
20. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 1. — С. 121 – 126.
21. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. — 2009. — Вип. 454. — С. 88 – 94.
22. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 3. — С. 368 – 378.

23. *Слюсарчук В. Ю.* Метод локального лінійного наближення нелінійних різницевих операторів слабко регулярними операторами // Нелінійні коливання. — 2012. — **15**, № 4. — С. 112 – 126.

24. *Slyusarchuk V. Yu.* Method of locally linear approximation of nonlinear difference operators by weakly regular operators // J. Math. Sci. — 2012. — **187**, № 4. — P. 494 – 510.

Одержано 10.03.14,
після доопрацювання — 25.09.14