УДК 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Ин-т прикл. математики и информатики Актюб. гос. ун-та им. К. Жубанова
Казахстан, 030000, Актобе, ул. Бр. Жубановых, 263
e-mail: aldash51@mail.ru

We show that the Dirichlet problem in a cylindric domain for one class of multidimensional hyperbolic-elliptic equations is uniquely solvable. We also find a criterion for uniqueness of the regular solution.

Показано, що задача Діріхле в циліндричній області одного класу багатовимірних гіперболо-еліптичних рівнянь є однозначно розв'язною. Отримано також критерій єдиності регулярного розв'язку.

Проблема корректности задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в специальных областях была объектом многих исследований на плоскости [1 – 5] и в пространстве [5, 6]. В данной работе показано, что задача Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных гиперболо-эллиптических уравнений однозначно разрешима, а также получен критерий единственности регулярного решения.

1. Постановка задачи и основные результаты. Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1, \ldots, x_m, t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α и Γ_β части поверхности Γ, лежащие соответственно в полупространствах $t > 0$ и $t < 0$; σ_α —верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$. Пусть, далее, S — общая часть границ областей Ω_α, Ω_β, представляющая множество $\{t = 0, 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим взаимно сопряженные многомерные смешанные гиперболо-эллиптические уравнения

$$\Delta_x u - \operatorname{sgn} t u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u = 0, \qquad (1)$$

$$\Delta_x v - \operatorname{sgn} t v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} - b v_t + d v = 0,$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq 2$, $d(x,t) = c - \sum_{i=1}^{m} a_{ix_i} - b_t$.

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1, \ldots, x_m, t$ к сферическим $r, \theta_1, \ldots, \theta_{m-1}, t$, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_1 < 2\pi$, $0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 2, 3, \ldots, m-1$.

В качестве многомерной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу.

Задача *D*. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\big|_{\sigma_\alpha} = \varphi_1(r,\theta), \quad u\big|_{\Gamma_\alpha} = \phi_1(t,\theta), \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma_\beta} = \phi_2(t,\theta), \quad u\big|_{\sigma_\beta} = \varphi_2(r,\theta). \tag{3}$$

Пусть $\{Y^k_{n,m}(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leq k \leq k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{m-1})$, $W^l_2(S)$, $l = 0, 1, \ldots,$ — пространства Соболева.

Имеют место следующие леммы [7].

Лемма 1. *Пусть $f(r,\theta)$ принадлежит $W^l_2(S)$. Если $l \geq m-1$, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} f^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \tag{4}$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно, при этом

$$f^k_n(r) = \int\limits_H f(r,\theta) Y^k_{n,m}(\theta)\, dH,$$

где H — единичная сфера в E_m.

Лемма 2. *Для того чтобы $f(r,\theta)$ принадлежала $W^l_2(S)$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты ряда (4) удовлетворяли неравенствам*

$$|f^1_0(r)| \leq c_1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} n^{2l} |f^k_n(r)|^2 \leq c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}.$$

Через $\tilde{a}^k_{in}(r,t)$, $a^k_{in}(r,t)$, $\tilde{b}^k_n(r,t)$, $\tilde{c}^k_n(r,t)$, $\tilde{d}^k_n(r,t)$, ρ^k_n, $\bar{\varphi}^k_{1n}(r)$, $\bar{\varphi}^k_{2n}(r)$, $\phi^k_{1n}(t)$, $\phi^k_{2n}(t)$ обозначим коэффициенты разложения ряда (4) соответственно функций $a_i(r,\theta,t)\rho(\theta)$, $a_i \dfrac{x_i}{r}\rho$, $b(r,\theta,t)\rho$, $c(r,\theta,t)\rho$, $d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1, \ldots, m$, $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\phi_1(t,\theta)$, $\phi_2(t,\theta)$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$.

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t) \in W^l_2(\Omega_{\alpha\beta}) \subset C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta})$, $l \geq m+1$, $i = 1, \ldots, m$, $c(x,t) \leq 0$ $\forall (x,t) \in \Omega_\beta$.

Тогда справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$ принадлежат $W^p_2(S)$, $\phi_1(t,\theta)$ принадлежит $W^p_2(\Gamma_\alpha)$, а $\phi_2(t,\theta)$ — $W^p_2(\Gamma_\beta)$, $p \geq \dfrac{3m}{2}$, и имеет место*

$$\sin\mu_{s,n}\alpha \operatorname{ch}\mu_{s,n}\beta \neq \cos\mu_{s,n}\alpha \operatorname{sh}\mu_{s,n}\beta, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

то задача D однозначно разрешима, причем $\mu_{s,n}$ — положительные нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{m-2}{2}}(z)$, расположенные в порядке возрастания их величины.

Теорема 2. *Решение задачи D единственно тогда и только тогда, когда выполняется условие (5).*

2. Разрешимость задачи D. В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_α имеет вид

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r}\, u_r - \frac{1}{r^2}\,\delta u - u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0, \qquad (6)$$

где $\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \dfrac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \dfrac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\theta_j \dfrac{\partial}{\partial\theta_j}\right)$, $g_1 = 1$, $g_j = (\sin\theta_1 \ldots \sin\theta_{j-1})^2$, $j > 1$.

Известно [7], что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-2)$, $n = 0, 1, \ldots$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Решение задачи D в области Ω_α будем искать в виде

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \qquad (7)$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (7) в (6), умножив затем полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H, для $\bar{u}_n^k$ получим [8–10]

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\,\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1 +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \left(\frac{m-1}{r}\,\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \widetilde{b}_n^k \bar{u}_{nt}^k + \right.$$
$$\left. + \left[\widetilde{c}_n^k - \lambda_n \frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-1}^k - n a_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\} = 0. \qquad (8)$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1 \bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1 \bar{u}_{0tt}^1 + \frac{m-1}{r}\,\rho_0^1 \bar{u}_{0r}^1 = 0, \qquad (9)$$

$$\rho_1^k \bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k \bar{u}_{1tt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k \bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}\,\rho_1^k \bar{u}_1^k =$$
$$= -\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i0}^1 \bar{u}_{0r}^1 + \widetilde{b}_0^1 \bar{u}_{0t}^1 + \widetilde{c}_0^1 \bar{u}_0^1\right), \quad n = 1, \quad k = \overline{1, k_1}, \qquad (10)$$

$$\rho_n^k \bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\,\rho_n^k \bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\,\rho_n^k \bar{u}_n^k = -\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} a_{in-1}^k \bar{u}_{n-1r}^k + \widetilde{b}_{n-1}^k \bar{u}_{n-1t}^k + \right.$$

$$\left. + \left[\widetilde{c}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-2}^k - (n-1)a_{in-1}^k)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\}, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 2, 3, \ldots. \tag{11}$$

Просуммировав уравнение (10) от 1 до k_1, а уравнение (11) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения с (9), получим уравнение (8).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, — решение системы (9) – (11), то оно является решением уравнения (8).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (9) – (11) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\,\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\,\bar{u}_n^k = \overline{f}_n^k(r,t), \tag{12}$$

где $\overline{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\overline{f}_0^1(r,t) \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (2) в силу (7) будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\alpha) = \overline{\varphi}_{1n}^k(r), \quad \bar{u}_n^k(1,t) = \phi_{1n}^k(t), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{13}$$

Выполнив в (12), (13) замену $\bar{v}_n^k(r,t) = \bar{u}_n^k(r,t) - \phi_{1n}^k(t)$, получим

$$\bar{v}_{nrr}^k - \bar{v}_{ntt}^k + \frac{m-1}{r}\,\bar{v}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\,\bar{v}_n^k = f_n^k(r,t), \tag{14}$$

$$\bar{v}_n^k(r,\alpha) = \varphi_{1n}^k(r), \quad \bar{v}_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{15}$$

$$f_n^k(r,t) = \bar{f}_n^k(r,t) + \phi_{1ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\,\phi_{1n}^k, \quad \varphi_{1n}^k(r) = \bar{\varphi}_{1n}^k(r) - \phi_{1n}^k(\alpha).$$

Выполнив замену $\bar{v}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} v_n^k(r,t)$, задачу (14), (15) сведем к следующей задаче:

$$L v_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{ntt}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,v_n^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{16}$$

$$v_n^k(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad v_n^k(1,t) = 0, \tag{17}$$

$$\overline{\lambda}_n = \frac{[(m-1)(3-m) - 4\lambda_n]}{4}, \quad \widetilde{f}_n^k(r,t) = r^{\frac{m-1}{2}} f_n^k(r,t), \quad \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}}\varphi_{1n}^k(r).$$

Решение задачи (16), (17) ищем в виде

$$v_n^k(r,t) = v_{1n}^k(r,t) + v_{2n}^k(r,t), \tag{18}$$

где $v_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$Lv_{1n}^k = \widetilde{f}_n^k(r,t), \tag{19}$$

$$v_{1n}^k(r,\alpha) = 0, \quad v_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{20}$$

а $v_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$Lv_{2n}^k = 0, \tag{21}$$

$$v_{2n}^k(r,\alpha) = \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r), \quad v_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{22}$$

Решение указанных выше задач, аналогично [11], рассмотрим в виде

$$v_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{23}$$

при этом пусть

$$\widetilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t) R_s(r), \quad \widetilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n} R_s(r). \tag{24}$$

Подставляя (23) в (19), (20), с учетом (24) получаем

$$R_{srr} + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2} R_s + \mu R_s = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{25}$$

$$R_s(1) = 0, \quad |R_s(0)| < \infty, \tag{26}$$

$$T_{stt} + \mu T_s = -a_{s,n}(t), \quad 0 < t < \alpha, \tag{27}$$

$$T_s(\alpha) = 0. \tag{28}$$

Ограниченным решением задачи (25), (26) является [8]

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{29}$$

где $\nu = n + \dfrac{m-2}{2}$, $\mu = \mu_{s,n}^2$.

Общее решение уравнения (27) представимо в виде [12]

$$T_{s,n}(t) = c_{1s}\cos\mu_{s,n}t + c_{2s}\sin\mu_{s,n}t + \frac{\cos\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^t a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi\,d\xi -$$

$$-\frac{\sin\mu_{s,n}t}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^t a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi\,d\xi, \tag{30}$$

где c_{1s}, c_{2s} — произвольные постоянные. При выполнении условия (28) будем иметь

$$c_{1s}\cos\mu_{s,n}\alpha + c_{2s}\sin\mu_{s,n}\alpha + \frac{\cos\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\sin\mu_{s,n}\xi\,d\xi -$$

$$-\frac{\sin\mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}}\int\limits_0^\alpha a_{s,n}(\xi)\cos\mu_{s,n}\xi\,d\xi = 0. \tag{31}$$

Подставляя (29) в (24), получаем

$$\begin{gathered} r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{f}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad 0 < r < 1, \\ r^{-\frac{1}{2}}\widetilde{\varphi}_{1n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{s,n}J_\nu(\mu_{s,n}r), \quad 0 < r < 1. \end{gathered} \tag{32}$$

Ряды (32) — разложения в ряды Фурье – Бесселя [13], если

$$a_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\widetilde{f}_n^k(\xi,t)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi, \tag{33}$$

$$b_{s,n} = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\widetilde{\varphi}_{1n}^k(\xi)J_\nu(\mu_{s,n}\xi)\,d\xi, \tag{34}$$

$\mu_{s,n}$, $s = 1, 2, \ldots,$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(\mu_{s,n}r)$.

Из (29), (30) получим решение задачи (19), (20) в виде

$$v_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\sqrt{r}T_{s,n}(t)J_\nu(\mu_{s,n}r), \tag{35}$$

где $a_{s,n}(t)$ определяется из (33).

Далее, подставляя (23) в (21), (22), с учетом (24) имеем

$$T_{stt} + \mu_{s,n}^2 T_s = 0, \quad 0 < t < \alpha, \tag{36}$$

$$T_s(\alpha) = b_{s,n}. \tag{37}$$

Общее решение уравнения (36) имеет вид

$$T_{s,n}(t) = c'_{1s} \cos \mu_{s,n} t + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} t. \tag{38}$$

При выполнении условия (37) получим

$$c'_{1s} \cos \mu_{s,n} \alpha + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} \alpha = b_{s,n}, \tag{39}$$

где $b_{s,n}$ находится из (34).

Из (29), (38) найдем решение задачи (21), (22) в виде

$$v_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}\left(c'_{1s} \cos \mu_{s,n} t + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} t\right) J_\nu(\mu_{s,n} r). \tag{40}$$

Следовательно, сначала решив задачу (9), (13) $(n = 0)$, а затем (10), (13)$(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $v_n^k(r,t)$ из (18), где $v_{1n}^k(r,t)$, $v_{2n}^k(r,t)$ $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots,$ определяются из (35), (40).

Итак, в области Ω_α имеет место равенство

$$\int\limits_H \rho(\theta) L_1 u \, dH = 0. \tag{41}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$ плотна в $L_2((0,\alpha))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$, плотна в $L_2(\Omega_\alpha)$ [14].

Отсюда и из (41) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\alpha} f(r\theta,t) L_1 u \, d\Omega_\alpha = 0$$

и

$$L_1 u = 0 \quad \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\alpha.$$

Теперь перейдем в области Ω_β к первой краевой задаче для уравнения

$$L_2 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2} \delta u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(r,\theta,t) u_{x_i} + b(r,\theta,t) u_t + c(r,\theta,t) u = 0 \tag{42}$$

с условием (3).

Решение задачи (42), (3) будем искать в виде (7).

Подставляя (7) в (42), имеем

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1+\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\left(\frac{m-1}{r}\,\rho_0^1+\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k+\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\left(\frac{m-1}{r}\,\rho_n^k+\sum_{i=1}^{m}a_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k+\widetilde{b}_n^k\bar{u}_{nt}^k+\right.$$

$$\left.+\left[\widetilde{c}_n^k-\lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2}+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-1}^k-na_{in}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\}=0. \tag{43}$$

Рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1+\rho_0^1\bar{u}_{0tt}^1+\frac{m-1}{r}\,\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1=0, \tag{44}$$

$$\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k+\rho_1^k\bar{u}_{1tt}^k+\frac{m-1}{r}\,\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k-\frac{\lambda_1}{r^2}\,\rho_1^k\bar{u}_1^k=\frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1+\widetilde{b}_0^1\bar{u}_{0t}^1+\widetilde{c}_0^1\bar{u}_0^1\right),$$

$$n=1,\quad k=\overline{1,k_1}, \tag{45}$$

$$\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k+\rho_n^k\bar{u}_{ntt}^k+\frac{m-1}{r}\,\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k=\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m}a_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k+\widetilde{b}_{n-1}^k\bar{u}_{n-1t}^k+\right.$$

$$\left.+\left[\widetilde{c}_{n-1}^k+\sum_{i=1}^{m}(\widetilde{a}_{in-2}^k-(n-1)a_{in-1}^k)\right]\bar{u}_{n-1}^k\right\},\quad k=\overline{1,k_n},\quad n=2,3,\ldots. \tag{46}$$

Просуммировав уравнение (45) от 1 до k_1, уравнение (46) от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения с (44), получим уравнение (43).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k=\overline{1,k_n}$, $n=0,1,\ldots,$ — решение системы (44)–(46), то оно является решением уравнения (43).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (44)–(46) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\,\bar{u}_{nr}^k+\bar{u}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\,\bar{u}_n^k=\overline{g}_n^k(r,t), \tag{47}$$

где $\overline{g}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, при этом $\overline{g}_0^1(r,t)\equiv 0$.

Выполнив в (47) замену $\bar{w}_n^k(r,t)=\bar{u}_n^k(r,t)-\bar{\phi}_{2n}^k(t)$, получим

$$\bar{w}_{nrr}^k+\frac{m-1}{r}\,\bar{w}_{nr}^k+\bar{w}_{ntt}^k-\frac{\lambda_n}{r^2}\,\bar{w}_n^k=g_n^k(r,t), \tag{48}$$

при этом краевое условие (3) примет вид

$$\bar{w}_n^k(r,\beta) = \varphi_{2n}^k(r), \quad \bar{w}_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{49}$$

$$g_n^k(r,t) = \bar{g}_n^k(r,t) - \phi_{2ntt}^k + \frac{\lambda_n}{r^2}\,\phi_{2n}^k, \quad \varphi_{2n}^k(r) = \bar{\varphi}_{2n}^k(r) - \phi_{2n}^k(\beta).$$

Выполнив замену $\bar{w}_n^k(r,t) = r^{\frac{1-m}{2}} w_n^k(r,t)$, задачу (48), (49) сведем к следующей задаче:

$$Lw_n^k \equiv w_{nrr}^k + w_{ntt}^k + \frac{\overline{\lambda}_n}{r^2}\,w_n^k = \widetilde{g}_n^k(r,t), \tag{50}$$

$$w_n^k(r,\beta) = \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad w_n^k(1,t) = 0, \tag{51}$$

$$\widetilde{g}_n^k(r,t) = r^{\frac{m-1}{2}} g_n^k(r,t), \quad \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \varphi_{2n}^k(r).$$

Решение задачи (50), (51) ищем в виде

$$w_n^k(r,t) = w_{1n}^k(r,t) + w_{2n}^k(r,t), \tag{52}$$

где $w_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$Lw_{1n}^k = \widetilde{g}_n^k(r,t), \tag{53}$$

$$w_{1n}^k(r,\beta) = 0, \quad w_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{54}$$

а $w_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи

$$Lw_{2n}^k = 0, \tag{55}$$

$$w_{2n}^k(r,\beta) = \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r), \quad w_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{56}$$

Решение указанных выше задач рассмотрим в виде

$$w_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) V_s(t), \tag{23$'$}$$

при этом пусть

$$\widetilde{g}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,n} R_s(r), \quad \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n} R_s(r). \tag{57}$$

Подставляя (23$'$) в (53), (54), с учетом (57) получаем задачу (25), (26), решение которой имеет вид (29), и задачу

$$V_{stt} - \mu V_s = d_{s,n}(t), \quad \beta < t < 0, \tag{58}$$

$$V_s(\beta) = 0. \tag{59}$$

Общее решение уравнения (58) представимо в виде [12]

$$V_{s,n}(t) = c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int\limits_t^0 d_{s,n}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n}\xi \, d\xi -$$

$$- \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int\limits_t^0 d_{s,n}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\xi \, d\xi. \tag{60}$$

Подчинив это решение условию (59), будем иметь

$$c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta}{\mu_{s,n}} \int\limits_\beta^0 d_{s,n}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n}\xi \, d\xi -$$

$$- \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta}{\mu_{s,n}} \int\limits_\beta^0 d_{s,n}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n}\xi \, d\xi = 0. \tag{61}$$

Подставляя (29) в (57), получаем ряды

$$r^{-\frac{1}{2}} \widetilde{g}_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} d_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad r^{-\frac{1}{2}} \widetilde{\varphi}_{2n}^k(r) = \sum_{s=1}^{\infty} e_{s,n} J_\nu(\mu_{s,n} r), \quad 0 < r < 1,$$

которые являются рядами Фурье – Бесселя, если

$$d_{s,n}(t) = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \widetilde{g}_n^k(\xi, t) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) \, d\xi,$$

$$e_{s,n} = \frac{2}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int\limits_0^1 \sqrt{\xi} \widetilde{\varphi}_{2n}^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) d\xi. \tag{62}$$

Из (29), (60) получим решение задачи (53), (54) в виде

$$w_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} V_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{63}$$

где $d_{s,n}(t)$ определяются из (62).

Далее, подставляя (23′) в (55), (56), с учетом (57) имеем

$$V_{stt} - \mu_s^2 V_s = 0, \quad \beta < t < 0, \tag{64}$$

$$V_s(\beta) = e_{s,n}. \tag{65}$$

Общее решение уравнения (65) имеет вид

$$V_{s,n}(t) = c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t. \tag{66}$$

Тогда при выполнении условия (66) получим

$$c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta = e_{s,n}, \tag{67}$$

где $e_{s,n}$ находится из (62).

Из (29), (66) найдем решение задачи (55), (56) в виде

$$w_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} \left(c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} t \right) J_\nu(\mu_{s,n} r). \tag{68}$$

Для определения неизвестных коэффициентов c_{1s}, c_{2s} и c'_{1s}, c'_{2s} из (30), (61) и (39), (67) получим системы алгебрических уравнений

$$\mu_{s,n} \left(c_{1s} \cos \mu_{s,n} \alpha + c_{2s} \sin \mu_{s,n} \alpha \right) = (\sin \mu_{s,n} \alpha) \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \cos \mu_{s,n} \xi \, d\xi -$$

$$- (\cos \mu_{s,n} \alpha) \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \sin \mu_{s,n} \xi \, d\xi,$$

$$\mu_{s,n} \left(c_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta + c_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta \right) = (\operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta) \int_\beta^0 d_{s,n}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi -$$

$$- (\operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta) \int_\beta^0 d_{s,n}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi \, d\xi,$$

$$c'_{1s} \cos \mu_{s,n} \alpha + c'_{2s} \sin \mu_{s,n} \alpha = b_{s,n},$$

$$c'_{1s} \operatorname{ch} \mu_{s,n} \beta + c'_{2s} \operatorname{sh} \mu_{s,n} \beta = e_{s,n},$$

которые имеют единственные решения, если выполняется условие (5).

Следовательно, сначала решив задачу (44), (49) $(n = 0)$, а затем (45), (49)$(n = 1)$ и т. д., найдем последовательно все $w_n^k(r,t)$ из (52), где $w_{1n}^k(r,t)$, $w_{2n}^k(r,t)$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$, определяются из (63), (68).

Итак, в области Ω_β имеет место равенство

$$\int\limits_H \rho(\theta) L_2 u\, dH = 0. \tag{69}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$ плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$ плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$, плотна в $L_2(\Omega_\beta)$.

Отсюда и из (69) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t) L_2 u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_2 u = 0 \quad \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи D в областях Ω_α и Ω_β являются функции

$$\begin{aligned} u(r,\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\phi_{1n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}}\left[v_{1n}^k(r,t) + v_{2n}^k(r,t)\right]\right\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad t > 0, \\ u(r,\theta,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\left\{\phi_{2n}^k(t) + r^{\frac{1-m}{2}}\left[w_{1n}^k(r,t) + w_{2n}^k(r,t)\right]\right\} Y_{n,m}^k(\theta), \quad t < 0, \end{aligned} \tag{70}$$

где $v_{1n}^k(r,t)$, $v_{2n}^k(r,t)$ определяются из (35), (40), а $w_{1n}^k(r,t)$, $w_{2n}^k(r,t)$ — из (63), (68).

Учитывая следующие свойства нулей функций Бесселя [13]:

1^0) если $\mu_{\nu,1}, \mu_{\nu,2}, \ldots$ — положительные нули функций $J_\nu(z)$, упорядоченные по возрастанию значений, то

$$0 < \mu_{\nu,1} < \mu_{\nu+1,1} < \mu_{\nu,2} < \mu_{\nu+1,2} < \mu_{\nu,3} < \ldots, \quad \nu > -1;$$

2^0) пусть μ_ν, μ'_ν, μ''_ν — наименьшие положительные нули функций $J_\nu(z)$, $J'_\nu(z)$, $J''_\nu(z)$ соответственно, тогда

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \quad \nu > 0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \mu'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \quad \nu > 0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \mu''_\nu < \sqrt{(\nu^2-1)}, \quad \nu > 1,$$

формулы [13, 11]

$$\sin z = z\left(1 - z\sum_{n=1}^{\infty}(4n^2-1)^{-1}[J_n(nz)]^2\right),$$

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\,\nu - \frac{\pi}{4}\right) + 0\left(\frac{1}{z^{3/2}}\right), \quad \nu \geq 0,$$

$$2J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)$$

и применяя признак Даламбера, доказываем, что ряды (35), (40), (63), (68) и продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно.

Далее, используя оценки [13, 7]

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu, \tag{71}$$

$$|k_n| \leq c_1 n^{m-2}, \quad \left|\frac{\partial^q}{\partial\theta_j^q}\,Y^k_{n,m}(\theta)\right| \leq c_2 n^{\frac{m}{2}-1+q}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad q = 0, 1, \ldots,$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция, а также леммы, ограничения на коэффициенты уравнения (1) и на заданные функции $\varphi_1(r,\theta)$, $\varphi_2(r,\theta)$, $\phi_1(t,\theta)$, $\phi_2(t,\theta)$, аналогично [8–10] показываем, что полученное решение в виде ряда (70) и дважды продифференцированные ряды сходятся абсолютно и равномерно. Это означает, что решение (70) принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$.

Разрешимость задачи D доказана.

3. Единственность задачи D. Сначала построим решения задач Дирихле в области Ω_α для уравнения

$$L_1^* v \equiv \Delta_x v - v_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i v_{x_i} - b v_t + d v = 0, \tag{6*}$$

с условиями

$$v\big|_{\sigma_\alpha \cup \Gamma_\alpha} = 0, \quad v\big|_S = \bar{\tau}^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{72}$$

а также в области Ω_β для уравнения

$$L_2^* w \equiv \Delta_x w + w_{tt} - \sum_{i=1}^{m} a_i w_{x_i} - b w_t + d w = 0 \tag{42*}$$

с условиями

$$w\big|_{\sigma_\beta \cup \Gamma_\beta} = 0, \quad w\big|_S = \bar{\tau}^k_n(r) Y^k_{n,m}(\theta), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{73}$$

где $\bar{\tau}^k_n(r) \in V$, V — множество функций из класса $C^1([0,1]) \cap C^2((0,1))$. Решение задачи (6*), (72) будем искать в виде (7), где функции $\bar{v}^k_n(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, как и в п. 2, функции $\bar{v}_n^k$ удовлетворяют системам уравнений (9) – (11), где $\widetilde{a}_{in}^k$, a_{in}^k, $\widetilde{b}_n^k$ заменены соответственно на $-\widetilde{a}_{in}^k$, $-a_{in}^k$, $-\widetilde{b}_n^k$, а $\widetilde{c}_n^k$ — на $\widetilde{d}_n^k$, $i = 1, \ldots, m$, $k = \overline{1, k_n}$, $n = 0, 1, \ldots$.

Далее, из краевого условия (72) в силу (7) получим

$$\bar{v}_n^k(r, \alpha) = \bar{v}_n^k(1, t) = 0, \quad \bar{v}_n^k(r, 0) = \bar{\tau}_n^k(r), \quad k = \overline{1, k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{74}$$

Как отмечено ранее, каждое уравнение системы (9) – (11) представимо в виде (12). Задачу (12), (74) сведем к задаче

$$Lv_n^k \equiv v_{nrr}^k - v_{ntt}^k + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} v_n^k = f_n^k(r, t),$$

$$v_n^k(r, \alpha) = v_n^k(1, t) = 0, \quad v_n^k(r, 0) = \tau_n^k(r),$$

$$v_n^k(r, t) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{v}_n^k(r, t), \quad f_n^k(r, t) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{f}_n^k(r, t), \quad \tau_n^k(r) = r^{\frac{m-1}{2}} \bar{\tau}_n^k(r),$$

решение которой имеет вид

$$v_n^k(r, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),$$

$$T_{s,n}(t) = \tau_{s,n} \cos \mu_{s,n} t + \left[-\tau_{s,n} \operatorname{ctg} \mu_{s,n}\alpha - \frac{\operatorname{ctg} \mu_{s,n}\alpha}{\mu_{s,n}} \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \sin \mu_{s,n}\xi \, d\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\mu_{s,n}} \int_0^\alpha a_{s,n}(\xi) \cos \mu_{s,n}\xi \, d\xi \right] \sin \mu_{s,n} t + \frac{\cos \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{s,n}(\xi) \sin \mu_{s,n}\xi \, d\xi -$$
$$- \frac{\sin \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_0^t a_{s,n}(\xi) \cos \mu_{s,n}\xi \, d\xi,$$

где $\tau_{s,n} = 2[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^{-2} \int_0^1 \sqrt{\xi} \tau_n^k(\xi) J_\nu(\mu_{s,n}\xi) \, d\xi$, $\sin \mu_{s,n}\alpha \neq 0$, $s = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, решение задачи (6*), (72) построено в виде ряда

$$v(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}} T_{s,n}(t) J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n} r) Y_{n,m}^k(\theta)$$

и в силу оценок (71) принадлежит классу $C^1(\bar{\Omega}_\alpha) \cap C^2(\Omega_\alpha)$.

Аналогичным образом строится решение задачи (42*), (74) в виде

$$w(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{2-m}{2}} V_{s,n}(t) J_{n+(m-2)/2}(\mu_{s,n} r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

где

$$V_{s,n}(t) = \tau_{s,n} \operatorname{ch} \mu_{s,n} t + \left[-\tau_{s,n} \operatorname{cth} \mu_{s,n} \beta - \frac{\operatorname{cth} \mu_{s,n} \beta}{\mu_{s,n}} \int_{\beta}^{0} d_{s,n}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi \, d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\mu_{s,n}} \int_{\beta}^{0} d_{s,n}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi \right] \operatorname{sh} \mu_{s,n} t + \frac{\operatorname{ch} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_{t}^{0} d_{s,n}(\xi) \operatorname{sh} \mu_{s,n} \xi \, d\xi -$$

$$- \frac{\operatorname{sh} \mu_{s,n} t}{\mu_{s,n}} \int_{t}^{0} d_{s,n}(\xi) \operatorname{ch} \mu_{s,n} \xi \, d\xi, \quad s = 1, 2, \ldots .$$

Из определения сопряженных операторов [15] L_j, L_j^*, $j = 1, 2$, имеем

$$vL_1 u - uL_1^* v = -vP_1(u) + uP_1(v) - uvQ_1, \;\; wL_2 u - uL_2^* w = -wP_2(u) + uP_2(w) - u\omega Q_2,$$

где

$$P_1(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i} \cos\left(N_1^{\perp}, x_i\right) - u_t \cos\left(N_1^{\perp}, t\right), \;\; P_2(w) = \sum_{i=1}^{m} w_{x_i} \cos\left(N_2^{\perp}, x_i\right) + w_t \cos\left(N_2^{\perp}, t\right),$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos\left(N_1^{\perp}, x_i\right) - b \cos\left(N_1^{\perp}, t\right), \;\; Q_2 = \sum_{i=1}^{m} a_i \cos\left(N_2^{\perp}, x_i\right) - b \cos\left(N_2^{\perp}, t\right),$$

а $N_1^{\perp}$, $N_2^{\perp}$ — внутренние нормали к границам $\partial\Omega_\alpha$, $\partial\Omega_\beta$.

Далее, используя формулу Грина в областях Ω_α и Ω_β, получаем

$$\begin{gathered} \int_{\Omega_\alpha} (vL_1 u - uL_1^* v) \, d\Omega_\alpha = \int_{\partial\Omega_\alpha} \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial N_1} - u \frac{\partial v}{\partial N_1} \right) M_1 + uvQ_1 \right] ds, \\ \int_{\Omega_\beta} (wL_2 u - uL_2^* w) \, d\Omega_\beta = \int_{\partial\Omega_\beta} \left[\left(w \frac{\partial u}{\partial N_2} - u \frac{\partial w}{\partial N_2} \right) M_2 + uwQ_2 \right] ds, \end{gathered} \tag{75}$$

$$\frac{\partial}{\partial N_1} = \sum_{i=1}^{m} \cos\left(N_1^{\perp}, x_i\right) \frac{\partial}{\partial x_i} - \cos\left(N_1^{\perp}, t\right) \frac{\partial}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial N_2} = \sum_{i=1}^{m} \cos\left(N_2^{\perp}, x_i\right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \cos\left(N_2^{\perp}, t\right) \frac{\partial}{\partial t},$$

$$M_j = \sum_{i=1}^{m} \cos^2\left(N_j^{\perp}, x_i\right) + \cos^2\left(N_j^{\perp}, t\right), \quad j = 1, 2.$$

Из (75), принимая во внимание однородные граничные условия (2), (3), а также условия (72), (73), имеем

$$\int\limits_S (vu_t - uv_t + buv)\, ds = \int\limits_S (wu_t + uw_t + buw) ds = 0$$

или

$$\int\limits_S u(v_t + w_t)\, ds = 0. \tag{76}$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\sqrt{r} J_\nu(\mu_s r) Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна в $L_2(S)$ [14] и $T_s'(0) \neq -V_s'(0)$, из (76) заключаем, что $u(x,0) = 0 \ \ \forall x \in S$. Следовательно, по принципу Хопфа [15] $u = 0$ в $\bar{\Omega}_\beta$.

Отсюда $u_t(x,0) = 0 \ \ \forall x \in S$.

В силу единственности решения задачи Коши в области Ω_α [16]: $L_1 u = 0$, $u(x,0) = = u_t(x,0) = 0 \ \ \forall x \in S$ следует, что $u = 0$ в $\bar{\Omega}_\alpha$.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. Если выполняется условие (5), то из теоремы 1 следует, что решение задачи D единственно.

Пусть теперь условие (5) не выполняется хотя бы для одного $s = l$.

Тогда, если решение однородной задачи, соответствующей задаче D, будем искать в виде (7), придем к краевым задачам

$$Lv_n^k = \widetilde{f}_n^k(r,t),$$

$$v_n^k(r,\alpha) = 0, \quad v_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots;$$

$$Lw_n^k = \widetilde{g}_n^k(r,t),$$

$$w_n^k(r,\beta) = 0, \quad w_n^k(1,t) = 0, \quad k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots.$$

В силу (30), (60) их решениями являются функции

$$v_n^k(r,t) = \sqrt{r}\left[\cos\mu_{l,n}t + \sin\mu_{l,n}t + \frac{\cos\mu_{l,n}t}{\mu_{l,n}}\int\limits_0^t a_{l,n}(\xi)\sin\mu_{l,n}\xi\, d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{\sin\mu_{l,n}t}{\mu_{l,n}}\int\limits_0^t a_{l,n}(\xi)\cos\mu_{l,n}\xi\, d\xi\right] J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{l,n}r),$$

$$w_n^k(r,t) = \sqrt{r}\left[\operatorname{ch}\mu_{l,n}t + \operatorname{sh}\mu_{l,n}t + \frac{\operatorname{ch}\mu_{l,n}t}{\mu_{l,n}}\int\limits_t^0 d_{l,n}(\xi)\operatorname{sh}\mu_{l,n}\xi\, d\xi - \right.$$

$$\left. - \frac{\operatorname{sh}\mu_{l,n}t}{\mu_{l,n}}\int\limits_t^0 d_{l,n}(\xi)\operatorname{ch}\mu_{l,n}\xi\, d\xi\right] J_{n+\frac{m-2}{2}}(\mu_{l,n}r).$$

Следовательно, нетривиальные решения однородной задачи D записываются в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{1-m}{2}} v_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad t > 0,$$

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} n^{-p} r^{\frac{1-m}{2}} \omega_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \quad t < 0.$$

Из оценок (71) следует, что $u \in C(\bar{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^1(\Omega_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, если $p > \dfrac{3m}{2}$.

Теорема 2 доказана.

1. *Шабат Б. В.* Примеры решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа // Докл. АН СССР. — 1957. — **112**, № 3. — С. 386 – 389.
2. *Бицадзе А. В.* Некорректность задачи Дирихле для уравнений смешанного типа в смешанных областях // Докл. АН СССР. — 1958. — **122**, № 2. — С. 167 – 170.
3. *Солдатов А. П.* Задачи типа Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Докл. РАН. — 1993. — **332**, № 6. — С. 696 – 698; **333**, № 1. — С. 16 – 18.
4. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. РАН. — 2007. — **413**, № 1. — С. 23 – 26.
5. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнения в частных производных. — М.: Наука, 2006. — 287 с.
6. *Хачев М. М.* Задача Дирихле для линейных уравнений смешанного типа в канонических областях: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Минск, 1999. — 42 с.
7. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. — М.: Физматгиз, 1962. — 254 с.
8. *Алдашев С. А.* О задачах Дарбу для одного класса многомерных гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. — 1998. — **34**, № 1. — С. 64 – 68.
9. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. — Алматы: Гылым, 1994. — 170 с.
10. *Алдашев С. А.* Вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения. — Орал: ЗКАТУ, 2007. — 139 с.
11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977. — 659 с.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965. — 703 с.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 2 т. — М.: Наука, 1974. — Т. 2. — 295 с.
14. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976. — 543 с.
15. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1981.
16. *Смирнов М.М.* Курс высшей математики. — М.: Наука, 1981. — Т. 4. — 550 с.

Получено 03.04.12,
после доработки — 04.09.13