УДК 517.929

# ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

**Д. В. Бельский, Г. П. Пелюх**

*Ин-т математики НАН Украины*
*Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3*

*We find new properties of solutions of the differential-functional equation* $\Phi'(t) = \beta\Phi(qt) + \zeta\Phi'(qt)$.

*Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння* $\Phi'(t) = \beta\Phi(qt) + \zeta\Phi'(qt)$.

В данной работе рассматривается уравнение

$$\Phi'(t) = \beta\Phi(qt) + \zeta\Phi'(qt), \tag{1}$$

где $\{\beta, \zeta\} \subset R$, $0 < q < 1$, частные случаи которого изучались многими математиками. Так, в [1] исследовалось асимптотическое поведение аналитического решения уравнения (1) при $\beta = 1$ и $\zeta = 0$. Замечание в начале [2] указывает на возможность уточнения полученной асимптотической формулы, а именно, на возможность вычисления предельной периодической функции в [1] в явном виде (см. второй пример). В [3, 4] разработаны методы для изучения асимптотических свойств решений широкого класса уравнений, в частности уравнения (1) при $\zeta = 0$, которые после небольшого обобщения позволят нам установить некоторые результаты для уравнения (1). В [5] довольно исчерпывающе исследованы асимптотические свойства решений уравнения (1) при $\zeta = 0$. В [6] как частный случай более общего уравнения получено представление решений уравнения (1) в окрестности точки $t = 0$. Несмотря на изложенное и на широкие приложения, которые находят такие уравнения в различных областях науки и техники (см. [7] и приведенную в ней библиографию), многие вопросы теории дифференциально-функционального уравнения (1) изучены мало. Это прежде всего касается асимптотического поведения решений этого уравнения в окрестности особой точки $t = +\infty$. В силу этого основной целью данной работы является изучение уравнения (1) при достаточно общих предположениях относительно коэффициентов $\beta$ и $\zeta$.

Выполним в уравнении (1) замену $\Phi(t) = y\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$:

$$y'(x) = e^{\ln q^{-1}\cdot x + \ln|\beta| + i\arg\beta + \ln\ln q^{-1}} y(x-1) + \frac{\zeta}{q} y'(x-1), \quad x = \frac{\ln t}{\ln q^{-1}}.$$

Введем новые обозначения $\ln q^{-1} \overset{\text{df}}{=} a > 0$, $\ln|\beta| + i\arg\beta + \ln\ln q^{-1} \overset{\text{df}}{=} b \in C$, $\dfrac{\zeta}{q} \overset{\text{df}}{=} c \in R$:

$$y'(x) = e^{ax+b} y(x-1) + c y'(x-1). \tag{2}$$

В [3, 5] вычислена функция

$$H(x) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2}\, a\left(x - a^{-1}\log x\right)^2 + \left(1 + b + \frac{1}{2}a - \ln a\right)x + \left(-1 + a^{-1}\ln a - a^{-1}b\right)\log x -$$

$$- \frac{1}{2}\, a^{-2}x^{-1}\log^2 x + a^{-2}(a + b - \ln a)x^{-1}\log x,$$

в частности в [3] — как решение функционального уравнения

$$\frac{e^{H(x-1)-H(x)+ax+b}}{H'(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Выполним в уравнении (2) замену $y(x) = e^{H(x)}z(x)$:

$$z'(x) = -H'(x)z(x) + e^{H(x-1)-H(x)}\left\{e^{ax+b} + H'(x-1)c\right\} \times$$

$$\times\, z(x-1) + e^{H(x-1)-H(x)}cz'(x-1). \tag{3}$$

Докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** *Для $v+1$ раз непрерывно дифференцируемого решения уравнения (3) имеет место оценка*

$$\left|z^{(l)}(x)\right| \le K \max\left\{\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z(s)|, \ldots, \sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z^{(l)}(s)|\right\}\log^l x,$$

$$x \ge x_0 - 1 \ge T, \quad l = \overline{0, v}, \tag{4}$$

*где $K, T$ — некоторые постоянные.*

***Доказательство.*** Определим функцию $\operatorname{Re} H(x) \stackrel{\text{df}}{=} H_1(x)$ и для краткости обозначим $\operatorname{Re} b \stackrel{\text{df}}{=} b_1$. Выполним в уравнении (2) замену переменных $y(x) = e^{H_1(x)}z_1(x)$ и запишем дифференциальное уравнение для $z_1(x)$ в интегральной форме

$$z_1(x) = e^{H_1(x_0)-H_1(x)}\left\{z_1(x_0) - e^{H_1(x_0-1)-H_1(x_0)}cz_1(x_0-1)\right\} +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s-1)-H_1(x)}e^{as+b}z_1(s-1)\,ds + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}cz_1(x-1).$$

Запишем последнее уравнение следующим образом:

$$z_1(x) = e^{H_1(x_0)-H_1(x)}\left\{z_1(x_0) - e^{H_1(x_0-1)-H_1(x_0)}cz_1(x_0-1)\right\} +$$

$$+ e^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)\,\frac{e^{H_1(s-1)-H_1(s)+as+b_1}}{H_1'(s)}\,e^{i\operatorname{Im} b}z_1(s-1)\,ds +$$

$$+ e^{H_1(x-1)-H_1(x)}cz_1(x-1). \tag{5}$$

Как и $H(x)$, функция $H_1(x)$ является решением функционального уравнения

$$\frac{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b_1}}{H_1'(x)} = 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to +\infty.$$

Отсюда получаем

$$z_1(x) = e^{H_1(x_0)-H_1(x)}\left\{z_1(x_0) - e^{H_1(x_0-1)-H_1(x_0)}cz_1(x_0-1)\right\} +$$
$$+ e^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)\left(1+O\left(s^{-2}\right)\right)e^{i\operatorname{Im} b}z_1(s-1)\,ds + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}cz_1(x-1).$$

Ограничим $x_0 \le x \le x_0+1$ и будем считать $x_0$ достаточно большим, тогда

$$|z_1(x)| \le e^{H_1(x_0)-H_1(x)}\left\{|z_1(x_0)| + e^{H_1(x_0-1)-H_1(x_0)}|c||z_1(x_0-1)|\right\} +$$
$$+ e^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)(1+Ls^{-2})|z_1(s-1)|\,ds + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}|c||z_1(x-1)| \le$$
$$\le e^{H_1(x_0)-H_1(x)}\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)| + e^{H_1(x_0-1)-H_1(x)}|c|\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)| +$$
$$+ e^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)\,ds(1+Lx_0^{-2})\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)| + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}|c|\times$$
$$\times\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)| = e^{H_1(x_0-1)-H_1(x)}|c|\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)| + \sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)| +$$
$$+\left(1-e^{H_1(x_0)-H_1(x)}\right)Lx_0^{-2}\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)| + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}|c|\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)| \le$$
$$\le\left(1+Lx_0^{-2}+2e^{H_1(x_0-1)-H_1(x_0)}|c|\right)\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)|,$$

где $L$ — некоторая константа. Легко показать, что при достаточно большом $x_0$ выполняется неравенство

$$H_1(x_0-1) - H_1(x_0) \le -\frac{a}{2}x_0.$$

Тогда

$$\sup_{x_0\le s\le x_0+1}|z_1(s)| \le \left(1+Lx_0^{-2}+2e^{-\frac{a}{2}x_0}|c|\right)\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)|$$

или

$$|z_1(x)| \le \prod_{n=0}^{+\infty}\left(1+L(T+n)^{-2}+2e^{-\frac{a}{2}T}|c|e^{-\frac{a}{2}n}\right)\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)|, \quad x \ge x_0 \ge T > 0.$$

Дифференциальное уравнение для производной $z_1^{(n)}(x)$, $v \geq n \geq 1$, имеет вид

$$z_1^{(n+1)}(x) = -H_1'(x)z_1^{(n)}(x) + \Big\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b} + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}H_1'(x-1)c +$$

$$+ ne^{H_1(x-1)-H_1(x)}(H_1'(x-1) - H_1'(x))c\Big\}\, z_1^{(n)}(x-1) + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}\times$$

$$\times\, cz_1^{(n+1)}(x-1) - nH_1''(x)z_1^{(n-1)}(x) + n\,\frac{d}{dx}\left(e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b}\right) z_1^{(n-1)}(x-1)+$$

$$+ n\,\frac{d}{dx}\,\left(e^{H_1(x-1)-H_1(x)}H_1'(x-1)\right) cz_1^{(n-1)}(x-1)+$$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{d^2}{(dx)^2}\,\left(e^{H_1(x-1)-H_1(x)}\right) cz_1^{(n-1)}(x-1)+$$

$$+ \frac{\tilde{d}^n}{(\tilde{d}x)^n}\,\Big(-H_1'(x)z_1(x) + \Big\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b} + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}H_1'(x-1)c\Big\}\times$$

$$\times\, z_1(x-1) + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}cz_1'(x-1)\Big),$$

где символ $\dfrac{\tilde{d}^n}{(\tilde{d}x)^n}$ обозначает сумму

$$\frac{d^n}{(dx)^n}\Big(-H_1'(x)z_1(x) + \Big\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b} + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}H_1'(x-1)c\Big\}\times$$

$$\times\, z_1(x-1) + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}cz_1'(x-1)\Big)$$

без слагаемых с производными $z_1^{(k)}$, $k = n-1, n, n+1$. Коэффициенты перед производными $z_1^{(k)}$, $0 \leq k \leq n-2$, в выражении

$$\frac{\tilde{d}^n}{(\tilde{d}x)^n}\Big(-H_1'(x)z_1(x) + \Big\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b} + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}H_1'(x-1)c\Big\}\times$$

$$\times\, z_1(x-1) + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}cz_1'(x-1)\Big) \tag{6}$$

являются суммами функций

$$H_1^{(1+k)}(x), \Big\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b} + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}H_1'(x-1)c\Big\}^{(k)},$$

$$\Big\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)}c\Big\}^{\min\{n,k+1\}}, \quad n \geq k \geq 2.$$

Отметим, что $H_1^{(1+l)}(x) = O\left(\frac{1}{x^l}\right)$, $l \geq 2$, и $\left\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b}\right\}^{(k)} = O\left(\dfrac{1}{x^{k-1}}\right)$, $k \geq 1$, $x \to +\infty$. Таким образом, все коэффициенты в формуле (6) имеют свойство $O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to$

$\to +\infty$. Легко показать, что $H_1''(x) = a + O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ и $\dfrac{d}{dx}\left\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b}\right\} = a + O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to +\infty$. Учитывая все изложенное выше, дифференциальное уравнение для $z_1^{(n)}(x)$ можно записать в виде

$$z_1^{(n+1)}(x) = -H_1'(x)z_1^{(n)}(x) + \left\{e^{H_1(x-1)-H_1(x)+ax+b} + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}H_1'(x-1)c + \right.$$
$$\left. + ne^{H_1(x-1)-H_1(x)}(H_1'(x-1) - H_1'(x))c\right\} z_1^{(n)}(x-1) + e^{H_1(x-1)-H_1(x)} \times$$
$$\times\, cz_1^{(n+1)}(x-1) - na\left\{z_1^{(n-1)}(x) - z_1^{(n-1)}(x-1)\right\} +$$
$$+ f_n\left(x, z_1(x-1), z_1(x), \ldots, z_1^{(n-1)}(x-1), z_1^{(n-1)}(x)\right), \tag{7}$$

где функция $f_n$ является линейной комбинацией своих аргументов $z_1^{(j)}(x-1)$, $z_1^{(j)}(x)$, $j = \overline{0, n-1}$, с коэффициентами вида $O\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \to +\infty$. Из (7) получаем интегральное уравнение

$$z_1^{(n)}(x) = e^{H_1(x_0)-H_1(x)}\left\{z_1^{(n)}(x_0) - e^{H_1(x_0-1)-H_1(x_0)}cz_1^{(n)}(x_0-1)\right\} +$$
$$+ e^{-H_1(x)}\int_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}e^{H_1(s-1)-H_1(s)+as+b}z_1^{(n)}(s-1)\,ds + e^{H_1(x-1)-H_1(x)}cz_1^{(n)}(x-1) +$$
$$+ e^{-H_1(x)}\int_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}ne^{H_1(s-1)-H_1(s)}(H_1'(s-1) - H_1'(s))cz_1^{(n)}(s-1)\,ds -$$
$$- nae^{-H_1(x)}\int_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}\left(z_1^{(n-1)}(s) - z_1^{(n-1)}(s-1)\right)ds +$$
$$+ e^{-H_1(x)}\int_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}f_n(s, z_1(s-1), z_1(s), \ldots, z_1^{(n-1)}(s-1), z_1^{(n-1)}(s))\,ds.$$

Первые две строки этого дифференциального уравнения совпадают с уравнением (5) с точностью до порядка производной, поэтому для них можно повторить рассуждения по оценке модуля $|z_1(x)|$ на отрезке $x_0 \le x \le x_0 + 1$ при достаточно большом $x_0$:

$$\left|z_1^{(n)}(x)\right| \le \left(1 + Lx_0^{-2} + 2e^{-\frac{a}{2}x_0}|c|\right)\sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(n)}(s)\right| +$$
$$+ e^{-H_1(x)}\int_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)ne^{H_1(s-1)-H_1(s)}\left(1 - \frac{H_1'(s-1)}{H_1'(s)}\right)|c|\left|z_1^{(n)}(s-1)\right|ds +$$

$$+\, nae^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)\frac{1}{H_1'(s)}\left|z_1^{(n-1)}(s)-z_1^{(n-1)}(s-1)\right|\,ds+$$

$$+\, e^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)\frac{1}{H_1'(s)}\left|f_n\left(s, z_1(s-1), z_1(s), \ldots, z_1^{(n-1)}(s-1), z_1^{(n-1)}(s)\right)\right|\,ds.$$

При больших $x$ выполняется неравенство $H_1'(x) \ge \dfrac{a}{2}\,x$. Предположим, что

$$\left|z_1^{(l)}(x)\right| \le K\max\left\{\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)|, \ldots, \sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(l)}(s)\right|\right\}\log^l x,$$
$$x \ge x_0 - 1 \ge T, \quad l = \overline{0, n-1}, \tag{8}$$

где $K \ge 1$, $T$ — некоторые постоянные ($T$ — число, которое можно при необходимости увеличивать), и обозначим

$$K\max\left\{\sup_{x_0-1\le s\le x_0}|z_1(s)|, \ldots, \sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(n-1)}(s)\right|\right\} \overset{\mathrm{df}}{=} M.$$

Отсюда получаем

$$\left|z_1^{(n)}(x)\right| \le \left(1 + Lx_0^{-2} + 2e^{-\frac{a}{2}x_0}|c|\right)\sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(n)}(s)\right| +$$

$$+\, e^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)\,ds\, ne^{-\frac{a}{2}x_0}|c|\sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(n)}(s)\right| +$$

$$+\, nae^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)\,ds\,\frac{1}{\frac{a}{2}x_0}2M\log^{n-1}(x_0+1)+$$

$$+\, e^{-H_1(x)}\int\limits_{x_0}^{x} e^{H_1(s)}H_1'(s)\,ds\,\frac{M}{x_0}\,\log^{n-1}(x_0+1) \le$$

$$\le \left(1 + Lx_0^{-2} + (2+n)e^{-\frac{a}{2}x_0}|c|\right)\sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(n)}(s)\right| + (4n+1)M\,\frac{\log^{n-1}(x_0+1)}{x_0}.$$

Таким образом, выполняется рекуррентное неравенство

$$\sup_{x_0\le s\le x_0+1}\left|z_1^{(n)}(s)\right| \le \left(1 + Lx_0^{-2} + (2+n)e^{-\frac{a}{2}x_0}|c|\right)\times$$

$$\times\sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(n)}(s)\right| + (4n+1)\,M\,\frac{\log^{n-1}(x_0+1)}{x_0}.$$

Для краткости обозначим $\sup_{x-1\le s\le x}\left|z_1^{(n)}(s)\right| \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(x)$, $1+Lx^{-2}+(2+n)e^{-\frac{a}{2}x}|c| \stackrel{\mathrm{df}}{=} k(x)$ и с учетом того, что $x_0 \ge T$, запишем следствие из последнего неравенства в новых обозначениях

$$f(x_0+1) \le k(x_0)f(x_0)+(4n+1)\left(1+\frac{1}{T}\right)M\,\frac{\log^{n-1}(x_0+1)}{x_0+1}.$$

Теперь, зафиксировав достаточно большое $T$ и использовав предположение (8), мы можем повторить только что изложенные рассуждения для любого отрезка $x_0+m \le x \le$ $\le x_0+m+1$, $m \ge 0$, и получить аналогичную оценку

$$f(x_0+m+1) \le k(x_0+m)f(x_0+m)+(4n+1)\left(1+\frac{1}{T}\right)M\,\frac{\log^{n-1}(x_0+m+1)}{x_0+m+1}.$$

Отсюда следует

$$f(x_0+m+1) \le \prod_{l=0}^{m}k(x_0+l)\,f(x_0)+(4n+1)\left(1+\frac{1}{T}\right)M\sum_{j=1}^{m+1}\prod_{l=j}^{m}k(x_0+l)\,\frac{\log^{n-1}(x_0+j)}{x_0+j},$$

где $\prod_{l=j}^{m}k(x_0+l)$ при $j=m+1$ необходимо считать равным 1. Поскольку произведение $1 \le \prod_{l=0}^{+\infty}k(x_0+l) < +\infty$, последнее неравенство можно продолжить:

$$f(x_0+m+1) \le \prod_{l=0}^{+\infty}k(x_0+l)\left\{f(x_0)+(4n+1)\left(1+\frac{1}{T}\right)M\sum_{j=1}^{m+1}\frac{\log^{n-1}(x_0+j)}{x_0+j}\right\}.$$

Оценим сумму

$$\sum_{j=1}^{m+1}\frac{\log^{n-1}(x_0+j)}{x_0+j} \le \int\limits_{x_0}^{x_0+m+1}\frac{\log^{n-1}(s)}{s}\,ds \le \frac{\log^{n}(x_0+m+1)}{n}.$$

Тогда

$$f(x_0+m+1) \le \prod_{l=0}^{+\infty}k(x_0+l)\left\{f(x_0)+5\left(1+\frac{1}{T}\right)M\log^{n}(x_0+m+1)\right\}.$$

Распишем функцию $f(x)$ и константу $M$ согласно их определению и продолжим оценку:

$$\sup_{x_0+m\le s\le x_0+m+1}\left|z_1^{(n)}(s)\right| \le \prod_{l=0}^{+\infty}k(x_0+l)\left(\sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(n)}(s)\right|+\right.$$

$$\left.+5\left(1+\frac{1}{T}\right)K\max\left\{\sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(j)}(s)\right|\,\middle|\, j=\overline{0,n-1}\right\}\log^{n}(x_0+m+1)\right) \le$$

$$\le \prod_{l=0}^{+\infty}k(T+l)\,\left(1+5\left(1+\frac{1}{T}\right)K\log^{n}(x_0+m+1)\right)\max\left\{\sup_{x_0-1\le s\le x_0}\left|z_1^{(j)}(s)\right|\,\middle|\, j=\overline{0,n}\right\} \le$$

$$\leq \prod_{l=0}^{+\infty} k(T+l) \left( \frac{1}{\log^n(T)} + 5\left(1+\frac{1}{T}\right) K \right) \times$$

$$\times \log^n(x_0+m+1) \max \left\{ \sup_{x_0-1 \leq s \leq x_0} \left| z_1^{(j)}(s) \right| \middle| \, j = \overline{0,n} \right\}.$$

Таким образом, для $x_0 + m \leq x \leq x_0 + m + 1$ получаем неравенство

$$\left| z_1^{(n)}(x) \right| \leq \prod_{l=0}^{+\infty} k(T+l) \left( \frac{1}{\log^n(T)} + 5\left(1+\frac{1}{T}\right) K \right) \times$$

$$\times \frac{\log^n(T+1)}{\log^n(T)} \log^n(x) \max \left\{ \sup_{x_0-1 \leq s \leq x_0} \left| z_1^{(j)}(s) \right| \middle| \, j = \overline{0,n} \right\}.$$

Поскольку $m \geq 0$ произвольно, неравенство (8) доказано для $l = n$, а следовательно, и для $l = \overline{0,v}$.

Если $z(x)$ — решение уравнения (3), и поэтому выполняется тождество

$$y(x) = e^{H(x)} z(x) = e^{ReH(x)} e^{iImH(x)} z(x),$$

где $y(x)$ — решение уравнения (2), то равенство

$$z_1(x) = e^{iImH(x)} z(x) = e^{iImbx - ia^{-1}Imb\log x + i\frac{1}{2}Im(\gamma^2)a^{-1} + ia^{-2}Imbx^{-1}\log x} z(x)$$

позволяет заменить в оценке (8) функцию $z_1(x)$ функцией $z(x)$.

Теорема доказана.

Покажем предельную периодичность решений.

**Теорема 2.** *Для $v+3$ раза непрерывно дифференцируемого решения $z(x)$ уравнения (3) существует единственная $v$ раз непрерывно дифференцируемая периодическая функция $\psi(r)$ с периодом 1 такая, что*

$$\left| \psi^{(n)} \left( x - \int_T^x \frac{ds}{H'(s)} \right) - z^{(n)}(x) \right| \leq L \max \left\{ \sup_{x_1-1 \leq s \leq x_1} \left| z^{(l)}(s) \right| \middle| \, l = \overline{0,n+2} \right\} \frac{\log^{n+2} x}{x},$$

$$x \geq x_1 - 1 \geq T > 0, \quad n = \overline{0,v}, \tag{9}$$

*где $L, T$ — некоторые постоянные.*

***Доказательство.*** Перепишем уравнение (3):

$$\frac{1}{H'(x)} z'(x) + z(x) = z(x-1) + \left( \frac{e^{H(x-1)-H(x)+ax+b}}{H'(x)} - 1 \right) z(x-1) +$$

$$+ e^{H(x-1)-H(x)} \frac{H'(x-1)}{H'(x)} cz(x-1) + e^{H(x-1)-H(x)} \frac{1}{H'(x)} cz'(x-1).$$

Применим формулу Тейлора для суммы

$$z(x) + z'(x)\frac{1}{H'(x)} = z\left(x + \frac{1}{H'(x)}\right) - \frac{1}{2}\, z''\left(x + \theta(x)\frac{1}{H'(x)}\right)\left(\frac{1}{H'(x)}\right)^2, \quad 0 < \theta(x) < 1,$$

и подставим результат в уравнение

$$\begin{aligned} z\left(x + \frac{1}{H'(x)}\right) - z(x-1) = \frac{1}{2}\, z''\left(x + \theta(x)\frac{1}{H'(x)}\right)\left(\frac{1}{H'(x)}\right)^2 + \\ + \left(\frac{e^{H(x-1)-H(x)+ax+b}}{H'(x)} - 1\right) z(x-1) + \\ + e^{H(x-1)-H(x)}\frac{H'(x-1)}{H'(x)}\, cz(x-1) + \\ + e^{H(x-1)-H(x)}\frac{1}{H'(x)}\, cz'(x-1). \end{aligned}$$

Из теоремы 1 и определения функции $H(x)$ следует неравенство

$$\begin{gathered} \left| z\left(x + \frac{1}{H'(x)}\right) - z(x-1)\right| \le L_1 \max\left\{ \sup_{x_1 - 1 \le s \le x_1} \left|z^{(l)}(s)\right| \,\middle|\, l = 0,1,2\right\} \frac{\log^2 x}{x^2}, \\ x \ge x_1 \ge T > 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где $L_1, T$ — некоторые постоянные. Снова отметим, что константу $T$ можно при необходимости увеличивать.

Определим функцию $r = \eta(x) = x - \int_T^x \frac{ds}{H'(s)}$ с производной $\frac{dr}{dx} \to 1$, $x \to +\infty$. Положив $r = \eta(x)$, $x = \xi(r)$, определим числа $r_0 = 1 + \eta(x_0 - 1)$ и $x_* = \xi(r_0)$ такие, что $x_* - x_0 = \int_{x_0-1}^{x_*} \frac{ds}{H'(s)}$. Поскольку $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{H'(x)}\right) = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$, $x \to +\infty$, это же свойство имеет и разность $x_* - x_0 - \frac{1}{H'(x_0)} = O\left(\frac{1}{x_0^2}\right)$, $x_0 \to +\infty$. С помощью последнего замечания, теоремы 1 (для производной $z'(x)$) и неравенства (10) оценим при $x_0 \ge x_1$ разность

$$\begin{aligned} |z(\xi(r_0)) - z(\xi(r_0 - 1))| = |z(x_*) - z(x_0 - 1)| \le \left| z(x_*) - z\left(x_0 + \frac{1}{H'(x_0)}\right)\right| + \\ + \left| z\left(x_0 + \frac{1}{H'(x_0)}\right) - z(x_0 - 1)\right| \le \\ \le L_2 \max\left\{ \sup_{x_1 - 1 \le s \le x_1} \left|z^{(l)}(s)\right| \,\middle|\, l = 0,1,2\right\} \frac{\log^2(x_0 - 1)}{(x_0 - 1)^2}, \end{aligned}$$

где $L_2$ — некоторая константа. Из сходимости интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\log^2 x}{x^2}\,dx < +\infty$ следует существование предела $\lim_{n\to+\infty} z(\xi(r+n)) \stackrel{\text{df}}{=} \psi(r)$ и оценка

$$|\psi(r_0-1) - z(x_0-1)| \le L_2 \max\left\{ \sup_{x_1-1\le s\le x_1} \left| z^{(l)}(s) \right| \,\middle|\, l=0,1,2 \right\} \int\limits_{x_0-2}^{+\infty} \frac{\log^2 s}{s^2}\,ds$$

или

$$|\psi(\eta(x)) - z(x)| \le L_2 \max\left\{ \sup_{x_1-1\le s\le x_1} \left| z^{(l)}(s) \right| \,\middle|\, l=0,1,2 \right\} \int\limits_{x-1}^{+\infty} \frac{\log^2 s}{s^2}\,ds, \quad x \ge x_1 - 1.$$

Вычислив интеграл в правой части, получим неравенство (9) для $n = 0$. Функция $\psi(r)$ периодическая с периодом 1. Если предположить разрыв функции $\psi(r)$ в точке $r = v$, то существует последовательность точек $v_n$ такая, что $0 < |v - v_n| \to 0$, $n \to +\infty$, и $|\psi(v) - \psi(v_n)| \ge \varepsilon > 0$. Но для больших $r$ выполняется неравенство $|\psi(r) - z(\xi(r))| \le \frac{\varepsilon}{4}$, следовательно, существует целое число $m$ такое, что

$$|z(\xi(v+m)) - z(\xi(v_n+m))| \ge |\psi(v) - \varphi(v_n)| - |\psi(v) - z(\xi(v+m))| - |z(\xi(v_n+m)) - \psi(v_n)| \ge \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $n$. Последовательность $v_n + m \to v + m$, $n \to +\infty$, и последнее неравенство означает разрыв суперпозиции $z(\xi(r))$ в точке $r = v + m$. Полученное противоречие доказывает непрерывность функции $\psi(r)$.

Дифференциальное уравнение для $z^{(n)}(x)$ полностью совпадает с уравнением (7) для $z_1^{(n)}(x)$, если в последнем заменить функции $H_1(x)$ и $z_1(x)$ функциями $H(x)$ и $z(x)$ соответственно. Запишем его в виде

$$\begin{aligned} z^{(n+1)}(x)\frac{1}{H'(x)} + z^{(n)}(x) = z^{(n)}(x-1) + \Bigg\{ \frac{e^{H(x-1)-H(x)+ax+b}}{H'(x)} - 1 + \\ + e^{H(x-1)-H(x)}\frac{H'(x-1)}{H'(x)}c + ne^{H(x-1)-H(x)}\left(\frac{H'(x-1)}{H'(x)} - 1\right)c \Bigg\} z^{(n)}(x-1) + \\ + e^{H(x-1)-H(x)}\frac{1}{H'(x)}cz^{(n+1)}(x-1) - na\frac{1}{H'(x)}\left\{ z^{(n-1)}(x) - z^{(n-1)}\left(x + \frac{1}{H'(x)}\right)\right\} - \\ - na\frac{1}{H'(x)}\left\{ z^{(n-1)}\left(x + \frac{1}{H'(x)}\right) - z^{(n-1)}(x-1)\right\} + \\ + \frac{1}{H'(x)} f_n\left(x, z(x-1), z(x), \ldots, z^{(n-1)}(x-1), z^{(n-1)}(x)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Снова применим формулу Тейлора к сумме

$$z^{(n)}(x) + z^{(n+1)}(x)\frac{1}{H'(x)} = z^{(n)}\left(x + \frac{1}{H'(x)}\right) - \frac{1}{2} z^{(n+2)}\left(x + \theta(x)\frac{1}{H'(x)}\right)\left(\frac{1}{H'(x)}\right)^2,$$

$$0 < \theta(x) < 1,$$

и подставим результат в уравнение

$$z^{(n)}\left(x+\frac{1}{H'(x)}\right)-z^{(n)}(x-1)=\frac{1}{2}\,z^{(n+2)}\left(x+\theta(x)\frac{1}{H'(x)}\right)\left(\frac{1}{H'(x)}\right)^2+$$
$$+\left\{\frac{e^{H(x-1)-H(x)+ax+b}}{H'(x)}-1+e^{H(x-1)-H(x)}\frac{H'(x-1)}{H'(x)}\,c+\right.$$
$$\left.+\,ne^{H(x-1)-H(x)}\left(\frac{H'(x-1)}{H'(x)}-1\right)c\right\}z^{(n)}(x-1)+e^{H(x-1)-H(x)}\frac{1}{H'(x)}\,cz^{(n+1)}(x-1)-$$
$$-\,na\frac{1}{H'(x)}\left\{z^{(n-1)}(x)-z^{(n-1)}\left(x+\frac{1}{H'(x)}\right)\right\}-$$
$$-\,na\frac{1}{H'(x)}\left\{z^{(n-1)}\left(x+\frac{1}{H'(x)}\right)-z^{(n-1)}(x-1)\right\}+$$
$$+\,\frac{1}{H'(x)}\,f_n\left(x,z(x-1),z(x),\ldots,z^{(n-1)}(x-1),z^{(n-1)}(x)\right).$$

Предположим, что

$$\left|z^{(n-1)}\left(x+\frac{1}{H'(x)}\right)-z^{(n-1)}(x-1)\right|\le L_3\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right|\Big|\; l=\overline{0,n+1}\right\}\frac{\log^{n+1}x}{x^2},$$
$$x\ge x_1\ge T>0,$$

где $L_3$, $T$ — некоторые постоянные. Тогда из теоремы 1, определения функции $H(x)$ и последнего тождества получаем

$$\left|z^{(n)}\left(x+\frac{1}{H'(x)}\right)-z^{(n)}(x-1)\right|\le L_4\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right|\Big|\; l=\overline{0,n+2}\right\}\frac{\log^{n+2}x}{x^2},$$
$$x\ge x_1\ge T>0, \tag{12}$$

где $L_4$, $T$ — некоторые постоянные. Следовательно, неравенство (12) выполняется для всех $n=\overline{0,v}$.

Повторяя изложенные выше рассуждения для случая $n=0$, можно показать существование непрерывных периодических функций $\psi_n(r)$ с периодом 1 таких, что

$$\left|\psi_n\left(x-\int\limits_T^x\frac{ds}{H'(s)}\right)-z^{(n)}(x)\right|\le L\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right|\Big|\; l=\overline{0,n+2}\right\}\frac{\log^{n+2}x}{x},$$
$$x\ge x_1-1\ge T>0,$$

где $L, T$ — некоторые постоянные. Из последнего неравенства следуют ограниченность функций $z^{(n)}(x)$, $n = \overline{0, v}$, и равенство

$$\int\limits_{\lambda}^{\rho} \psi_n(r)\, dr = \psi_{n-1}(\rho) - \psi_{n-1}(\lambda)$$

для любых $\lambda$ и $\rho$. Последнее означает, что $\psi_n' = \psi_{n+1}$, $n = \overline{0, v-1}$.

Теорема доказана.

Уточним первую теорему.

**Теорема 3.** *Для $v+3$ раза непрерывно дифференцируемого решения $z(x)$ уравнения (3) имеет место оценка*

$$\left|z^{(n)}(x)\right| \le K \max\left\{ \sup_{x_1-1\le s\le x_1} \left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2} \right\}, \quad x \ge x_1 - 1 \ge T, \quad n = \overline{0, v},$$

*где $K, T$ — некоторые постоянные.*

***Доказательство.*** В неравенстве (9) перейдем к аргументу $x = \xi(r) \ge \xi(r_1 - 1) = x_1 - 1 \ge T$, $r \ge r_1 - 1$, и, считая $T$ достаточно большим (в дальнейшем эту величину при необходимости можно еще увеличивать), получаем

$$\left|\psi^{(n)}(r) - z^{(n)}(\xi(r))\right| \le L \max\left\{ \sup_{x_1-1\le s\le x_1} \left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2} \right\}. \tag{13}$$

Оценим с помощью теоремы Лагранжа разность $\xi(r_1) - \xi(r_1 - 1)$ для всех $r_1 \ge \eta(T) + 1$:

$$\begin{aligned} 1 < \xi(r_1) - x_1 + 1 = \xi(r_1) - \xi(r_1 - 1) = \xi'(r_1 - \theta(r_1)) = \frac{1}{\eta'(\xi(r_1 - \theta(r_1)))} = \\ = 1 + \frac{1}{H'(\xi(r_1 - \theta(r_1))) - 1} \le 1 + \frac{1}{H'(x_1 - 1) - 1} \le \\ \le 1 + \frac{M}{x_1}, \quad 0 < \theta(r_1) < 1, \end{aligned} \tag{14}$$

где $M$ — некоторая константа.

Обозначим символом $r_*$ число $r_1 - 1 < r_* < r_1$ такое, что $\xi(r_*) = x_1$, и оценим функцию $\psi^{(n)}(r)$ последовательно на отрезках $[r_1 - 1, r_*]$ и $[r_*, r_1]$. При $r_1 - 1 \le r \le r_*$ функция $x_1 - 1 = \xi(r_1 - 1) \le \xi(r) \le \xi(r_*) = x_1$, и из (13) получаем

$$\begin{aligned} \left|\psi^{(n)}(r)\right| \le |z^{(n)}(\xi(r))| + \left|\psi^{(n)}(r) - z^{(n)}(\xi(r))\right| \le \sup_{x_1-1\le s\le x_1} \left|z^{(n)}(s)\right| + \\ + L \max\left\{ \sup_{x_1-1\le s\le x_1} \left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2} \right\} \le \\ \le (1+L) \max\left\{ \sup_{x_1-1\le s\le x_1} \left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2} \right\}. \end{aligned}$$

При $r_* \le r \le r_1$, согласно (14), функция $x_1 = \xi(r_*) \le \xi(r) \le \xi(r_1) \le x_1 + \dfrac{M}{x_1}$, и из теоремы Лагранжа, (4), (13) получаем

$$\left|\psi^{(n)}(r)\right| \le \left|z^{(n)}(x_1)\right| + \left|z^{(n)}(\xi(r)) - z^{(n)}(x_1)\right| + \left|\psi^{(n)}(r) - z^{(n)}(\xi(r))\right| \le$$

$$\le \sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(n)}(s)\right| + \left|z^{(n+1)}\left(x_1 + \theta(\xi(r))\left\{\xi(r) - x_1\right\}\right)\right|(\xi(r) - x_1) +$$

$$+ L\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2}\right\} \le \sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(n)}(s)\right| +$$

$$+ K\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+1}\right\} \times$$

$$\times \log^{n+1}\left(x_1 + \theta\left(\xi(r)\right)\left\{\xi(r) - x_1\right\}\right)(\xi(r) - x_1) +$$

$$+ L\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2}\right\} \le \sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(n)}(s)\right| +$$

$$+ K\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+1}\right\} \log^{n+1}(x_1 + 1)\,\frac{M}{x_1} +$$

$$+ L\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2}\right\} \le$$

$$\le (1 + K + L)\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2}\right\}, \quad 0 < \theta(\xi(r)) < 1.$$

Итак, для $r_1 - 1 \le r \le r_1$

$$\left|\psi^{(n)}(r)\right| \le (1 + K + L)\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2}\right\},$$

а следовательно, и для всех $r$.

Использовав последнее неравенство и (13), оценим функцию $z^{(n)}(x)$ для $x \ge x_1 - 1 \ge \ge T$:

$$\left|z^{(n)}(x)\right| \le \left|\psi^{(n)}\left(x - \int\limits_T^x \frac{ds}{H'(s)}\right)\right| + \left|z^{(n)}(x) - \psi^{(n)}\left(x - \int\limits_T^x \frac{ds}{H'(s)}\right)\right| \le$$

$$\le (1 + K + 2L)\max\left\{\sup_{x_1-1\le s\le x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \,\Big|\, l = \overline{0, n+2}\right\}, \quad n = \overline{0, v}.$$

Теорема доказана.

Если в доказательстве второй теоремы использовать вместо первой теоремы третью, то результат можно уточнить.

**Теорема 4.** *Для $v+5$ раз непрерывно дифференцируемого решения $z(x)$ уравнения (3) существует единственная $v$ раз непрерывно дифференцируемая периодическая функция $\psi(r)$ с периодом 1 такая, что*

$$\left|\psi^{(n)}\left(x-\int\limits_T^x \frac{ds}{H'(s)}\right)-z^{(n)}(x)\right| \leq L\max\left\{\sup_{x_1-1\leq s\leq x_1}\left|z^{(l)}(s)\right| \;\; l=\overline{0,n+4}\right\}\frac{1}{x},$$

$$x \geq x_1-1 \geq T > 0, \quad n=\overline{0,v},$$

*где $L, T$ — некоторые постоянные.*

Следующая теорема показывает в некотором смысле точность полученных выше результатов.

**Теорема 5.** *Множество предельных периодических функций — решений уравнения (3) — всюду плотно в пространстве непрерывных периодических функций с периодом 1 и равномерной нормой.*

***Доказательство.*** На отрезке [0,1] непрерывную периодическую функцию $\chi(x)$ можно равномерно приблизить тригонометрическим полиномом $\omega(x)$, который в свою очередь, как целую функцию, можно равномерно приблизить полиномом Эрмита $p(x)$. Сколь угодно мало изменяя последний (сдвигая вправо начальный отрезок $[Q, Q+1]$), мы можем построить бесконечно дифференцируемую начальную функцию $g(x-Q)$, которая удовлетворяет некоторому конечному числу начальных условий «склейки», необходимых для построения достаточно гладкого решения дифференциального уравнения нейтрального типа (3) на всей оси. В случае $c = 0$ эти условия необходимы для построения решения, определенного на любой фиксированной полуоси. А именно, в последнем случае (подробнее см. [3]) начальную функцию необходимо продолжить как можно дальше влево от начального отрезка, используя дифференциальное уравнение с запаздыванием как функциональное, например на отрезок $[Q-m, Q-m+1]$, после этого нужно с помощью конечного числа шагов, двигаясь схожим образом справа налево, построить решение, определенное на заданной полуоси и на отрезке $[Q-m, Q-m+1]$ достаточно близкое к функции $g(x-Q)$. Это позволит получить нужную близость решения и функции $g(x-Q)$ вместе с конечным числом производных на отрезке $[Q, Q+1]$. Дальнейшие рассуждения в обоих случаях аналогичны: близость начальной функции и ее производных к фиксированной функции $p(x)$ означает их ограниченность, а следовательно, возможность применения теоремы 4 на начальном отрезке $[Q, Q+1]$.

Формализируем изложенную выше схему доказательства. Пусть для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства $\sup_{0\leq x\leq 1}|\chi(x)-\omega(x)| < \varepsilon$ и $\sup_{0\leq x\leq 1}|\omega(x)-p(x)| < \varepsilon$, причем близость полинома Эрмита $p(x)$ и тригонометрического полинома $\psi(x)$ достигается благодаря равенствам $p^{(m)}(0) = \omega^{(m)}(0)$ и $p^{(m)}(1) = \omega^{(m)}(1)$, $m = \overline{0,v}$, где $v$ — достаточно большое целое число. Определим начальный отрезок $[Q, Q+1]$, на котором мы будем строить начальную функцию $g(x-Q)$, следующим условием: $Q - \int_T^Q \frac{ds}{H'(s)} = N$, где $N$ — натуральное число. Величину $Q$ мы будем несколько раз увеличивать, сохраняя справедливыми предыдущие рассуждения.

Приравняем $g^{(m)}(0) = p^{(m)}(0)$, $m = \overline{0,5}$; $g^{(5)}(1) = p^{(5)}(1)$ и запишем условия «склейки», необходимые для начальной функции 5 раз непрерывно дифференцируемого решения уравнения (3):

$$g^{(n+1)}(1)\frac{1}{H'(Q+1)} + g^{(n)}(1) = p^{(n)}(0) + \left\{\frac{e^{H(Q)-H(Q+1)+aQ+a+b}}{H'(Q+1)} - 1 + \right.$$

$$\left. + \, e^{H(Q)-H(Q+1)}\frac{H'(Q)}{H'(Q+1)}\,c + ne^{H(Q)-H(Q+1)}\left(\frac{H'(Q)}{H'(Q+1)} - 1\right)c\right\}p^{(n)}(0) +$$

$$+ \, e^{H(Q)-H(Q+1)}\frac{1}{H'(Q+1)}\,cp^{(n+1)}(0) - na\frac{1}{H'(Q+1)}\left\{g^{(n-1)}(1) - p^{(n-1)}(0)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{H'(Q+1)}f_n\left(Q+1, p(0), g(1), \ldots, p^{(n-1)}(0), g^{(n-1)}(1)\right), \quad n = \overline{0,4}.$$

Поскольку в последнем уравнении $g^{(5)}(1) = p^{(5)}(1)$, мы получаем неоднородную систему линейных уравнений относительно искомых $g^{(n)}(1)$, $n = \overline{0,4}$. Запишем ее в векторной форме

$$(E + o(1))\,\vec{g} = (E + o(1))\,\vec{p} + \vec{d},$$

где $E$ — единичная матрица размера $5 \times 5$; символом $o(1)$ обозначены матрицы, стремящиеся к нулю при $Q \to +\infty$; искомый вектор $\vec{g} = \left(g(1), g^{(1)}(1), \ldots, g^{(4)}(1)\right)^T$, вектор $\vec{p} = \left(p(0), p^{(1)}(0), \ldots, p^{(4)}(0)\right)^T$, неоднородность $\vec{d} \to 0$, $Q \to +\infty$. Понятно, что решение этой системы $\vec{g} \to \vec{p}$, $Q \to +\infty$. Поэтому начальную функцию $g(x-Q)$ можно получить из полинома $p(x-Q)$, если заменить шесть условий его построения следующими: $p^{(m)}(1) = g^{(m)}(1)$, $m = \overline{0,4}$. Поскольку $g(x)$ стремится к $p(x)$ при $Q \to +\infty$, $g(x)$ и четыре его производные ограничены на отрезке [0,1] некоторой константой $M$ равномерно по $Q \geq Q_0$, где $Q_0$ — некоторая постоянная.

Из теоремы 4 для начальной функции $g(x-Q)$ и предельной периодической функции $\psi(r)$ получаем неравенство

$$\left|\psi\left(x - \int\limits_T^x \frac{ds}{H'(s)}\right) - g(x-Q)\right| \leq \frac{LM}{Q} < \varepsilon,$$

а из теоремы 3 — оценку

$$\left|\psi\left(x - \int\limits_T^x \frac{ds}{H'(s)}\right) - \psi(x-Q+N)\right| \leq KM\int\limits_Q^x \frac{ds}{H'(s)} < \varepsilon, \quad Q+1 \geq x \geq Q > 0,$$

при достаточно большом $Q$.

Окончательно при достаточно большом $Q$ имеем

$$|\chi(x-Q)-\psi(x-Q)| \leq |\chi(x-Q)-\omega(x-Q)|+|\omega(x-Q)-p(x-Q)|+$$
$$+|p(x-Q)-g(x-Q)|+\left|g(x-Q)-\psi\left(x-\int\limits_T^x \frac{ds}{H'(s)}\right)\right|+$$
$$+\left|\psi\left(x-\int\limits_T^x \frac{ds}{H'(s)}\right)-\psi(x-Q+N)\right|<5\varepsilon$$

для $Q+1 \geq x \geq Q$.

Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что из равенства нулю предельной периодической функции не следует равенство нулю решения. Возможно, такое решение единственное.

***Пример 1.*** Для уравнения (1), предварительно заменив $t$ на $q^{-1}t$ и переписав уравнение с помощью формулы вариации произвольных постоянных в интегральной форме, легко доказать с помощью отображения сжатия следующий факт. Если $\dfrac{\beta}{\zeta}>0$ и $\left|\dfrac{q}{\zeta}\right|<\dfrac{1}{3}$, то $\Phi(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\Phi_k e^{-\frac{\beta}{\zeta}q^{-k}t}$, где $\Phi_k=\dfrac{q^{-k+1}}{\zeta\left(q^{-k}-1\right)}\Phi_{k-1}$, $k\geq 1$, $\Phi_0$ произвольно, будет единственным ненулевым ограниченным на отрезке $[1,+\infty)$ решением уравнения (1). Это решение не имеет нулей на интервале $(0,+\infty)$.

Во втором примере будет явно вычислена предельная периодическая функция целого решения и последовательно выведена асимптотическая формула. Для удобства чтения запишем уравнение (1) в новых обозначениях

$$f'(z)=bf(qz)+cf'(qz), \tag{15}$$

где $\{b,c\}\subset R$, $0<q<1$.

***Пример 2.*** Сначала предположим, что $|bc^{-1}q|>1$, и выполним в уравнении (15) замену переменных $f(z)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x)e^{zq^{xi}}\,dx$:

$$u(x)q^{xi}=bu(x+i)+cu(x+i)q^{(x+i)i}.$$

Справедливость выполненных преобразований станет понятной позднее. Отсюда получаем

$$u(x)=u(x-i)\,\frac{q^{(x-i)i}}{b}\,\frac{1}{1+\frac{c}{bq}q^{(x-i)i}}.$$

Определим функцию

$$U(t)=\prod_{h=0}^{+\infty}\frac{1}{1+\frac{c}{bq}q^{h}t},$$

которая голоморфна в круге $|t| < |bc^{-1}q|$, а также удовлетворяет уравнению

$$U(t) = \frac{1}{1+\frac{c}{bq}t}\,U(qt), \tag{16}$$

и выполним замену $u(x) = U(q^{(x-i)i})v(x)$:

$$v(x) = v(x-i)\frac{q^{(x-ik-i)i}}{b}.$$

Подставляя в уравнение формулу $v(x) = e^{Ax^2+Bx+C}$, находим

$$v(x) = e^{-\frac{1}{2}\ \ln q^{-1}x^2+(2\pi n-\arg b)x+i\left\{\frac{1}{2}\ \ln q-(k+1)\ln q+\ln|b|\right\}x}, \quad n \in Z,$$

т. е.

$$f(z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\ \ln q^{-1}x^2+(2\pi n-\arg b)x+i\left\{\ln|b|-\frac{1}{2}\ \ln q\right\}x}U\left(qq^{xi}\right)e^{zq^{xi}}\,dx.$$

При $c = 0$ обозначим решение $f(z)$ символом $f_1(z)$. В этом случае функция $U(t) \equiv 1$, а $f_1(z)$ является решением уравнения

$$f_1'(z) = bf_1(qz).$$

Поскольку функция $U(t)$ голоморфна в круге $|t| < \left|bc^{-1}q\right|$, имеет место равенство

$$U\left(qq^{xi}\right) = \sum_{h=0}^{+\infty} A_h q^h e^{hxi\ln q},$$

где коэффициенты $A_h$ определяются подстановкой в функциональное уравнение (16) ряда Тейлора с центром в нуле функции $U(t)$ и равны

$$A_h = \left(-\frac{c}{bq}\right)^h \prod_{k=1}^{h}\frac{1}{1-q^k}, \quad h \geq 1, \quad A_0 = 1.$$

Подставляя этот ряд в интегральную формулу $f(z)$, получаем

$$f(z) = \sum_{h=0}^{+\infty} A_h q^{\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h} b^h \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\ \ln q^{-1}x^2+(2\pi n-\arg b)x+i\left\{\ln|b|-\frac{1}{2}\ \ln q\right\}x} e^{\left(q^h z\right)q^{xi}}\,dx =$$

$$= \sum_{h=0}^{+\infty} A_h q^{\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}h} b^h f_1\left(q^h z\right) = \sum_{h=0}^{+\infty}(-c)^h q^{\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{2}h}\prod_{k=1}^{h}\frac{1}{1-q^k}f_1\left(q^h z\right), \tag{17}$$

где $\prod_{k=1}^{0} \dfrac{1}{1-q^k} \stackrel{\mathrm{df}}{=} 1$. Подстановка формулы (17) в уравнение (15) показывает, что если функция $f_1(z)$ является целым решением уравнения (15) при $c = 0$, то функция $f(z)$ — целое решение уравнения (15) при любых $b$ и $c$.

Вычислим ряд Тейлора функции $f_1(z)$ с центром в нуле, подставив его в уравнение $f_1'(z) = bf_1(qz)$:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}}{n!} z^n.$$

Вынесем из этого ряда произвольное слагаемое

$$f_1(z) = \frac{b^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}}{n!} z^n \sum_{k=-n}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2} b^k \left(\frac{q^{n-\frac{1}{2}} z}{n}\right)^k \frac{n! n^k}{(n+k)!}.$$

Определим функцию

$$\theta(t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2} b^k t^k$$

и запишем

$$f_1(z) = \frac{b^n q^{\frac{(n-1)n}{2}} z^n}{n!} \left\{ \theta\left(\frac{q^{n-\frac{1}{2}} z}{n}\right) + \sum_{k=-n}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2} b^k \left(\frac{q^{n-\frac{1}{2}} z}{n}\right)^k \left(\frac{n! n^k}{(n+k)!} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2} b^{-k} \left(\frac{q^{n-\frac{1}{2}} z}{n}\right)^{-k} \right\}.$$

Полагаем $z \geq 1$ и

$$q^{-(n-1)} n \leq z < q^{-n}(n+1), n \geq 1,$$

т. е.

$$q^{\frac{1}{2}} \leq \frac{q^{n-\frac{1}{2}} z}{n} < q^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 2q^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2} b^{-k} \left(\frac{q^{n-\frac{1}{2}} z}{n}\right)^{-k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2} |b|^{-k} q^{-\frac{1}{2}k} =$$

$$= q^{\frac{1}{2}n^2 + \left(\frac{\ln|b|}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{2}\right)n} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{nk} q^{\frac{1}{2}k^2 + \left(\frac{\ln|b|}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{2}\right)k} \leq$$

$$\leq q^{\frac{1}{2}n^2 + \left(\frac{\ln|b|}{\ln q^{-1}} + \frac{1}{2}\right)n} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2 + \left(\frac{\ln|b|}{\ln q^{-1}} - \frac{1}{2}\right)k} \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Положим

$$\lambda_k = \frac{n!n^k}{(n+k)!} = \begin{cases} \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\}^{-1}, \ k>0, \\ \left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{2}{n-2}\right)\ldots\left(1+\frac{|k|-1}{n-|k|+1}\right)\right\}^{-1}, \ k<0, \end{cases}$$

следовательно, в обоих случаях для $k=0$ получаем неравенства

$$0<\lambda_k\le 1, \quad |\lambda_k-1|\le 1.$$

Поскольку $e^x\ge 1+x$ для всех действительных $x$, то

$$\lambda_k \ge \begin{cases} e^{-\left\{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{k}{n}\right\}} \ge e^{-\frac{k^2}{n}} \ge 1-\frac{k^2}{n} \ge 1-\frac{k^2}{n-|k|}, \ k>0, \\ e^{-\left\{\frac{1}{n-1}+\frac{2}{n-2}+\ldots+\frac{|k|-1}{n-|k|+1}\right\}} \ge e^{-\frac{(|k|-1)^2}{n-|k|+1}} \ge 1-\frac{k^2}{n-|k|}, \ k<0, \end{cases}$$

и $\lambda_0=1$. Поэтому для $|k|\le n^{\frac{1}{3}}$ и достаточно больших $z$ (или $n$) выполняется неравенство

$$\left|\frac{n!n^k}{(n+k)!}-1\right| \le 2n^{-\frac{1}{3}}.$$

Далее

$$\left|\sum_{k=-n}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2} b^k \left(\frac{q^{n-\frac{1}{2}}z}{n}\right)^k \left(\frac{n!n^k}{(n+k)!}-1\right)\right| \le \sum_{|k|\le n^{\frac{1}{3}}} q^{\frac{1}{2}k^2}|b|^k\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{|k|}\left|\frac{n!n^k}{(n+k)!}-1\right| +$$

$$+\sum_{|k|>n^{\frac{1}{3}}} q^{\frac{1}{2}k^2}|b|^k\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{|k|}\left|\frac{n!n^k}{(n+k)!}-1\right|.$$

Оценим первое слагаемое

$$\sum_{|k|\le n^{\frac{1}{3}}} q^{\frac{1}{2}k^2}|b|^k\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{|k|}\left|\frac{n!n^k}{(n+k)!}-1\right| \le 2n^{-\frac{1}{3}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}k^2}|b|^k\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{|k|} \to 0, \quad n\to+\infty,$$

и второе

$$\sum_{|k|>n^{\frac{1}{3}}} q^{\frac{1}{2}k^2}|b|^k\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{|k|}\left|\frac{n!n^k}{(n+k)!}-1\right| \le \sum_{|k|>n^{\frac{1}{3}}} q^{\frac{1}{2}k^2}|b|^k\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{|k|} =$$

$$=\sum_{l=0}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}\left(n^{\frac{1}{3}}+\tau+l\right)^2}|b|^{n^{\frac{1}{3}}+\tau+l}\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{n^{\frac{1}{3}}+\tau+l} +$$

$$+\sum_{l=0}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}\left(n^{\frac{1}{3}}+\tau+l\right)^2}|b|^{-\left(n^{\frac{1}{3}}+\tau+l\right)}\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{n^{\frac{1}{3}}+\tau+l} \le$$

$$\le q^{\frac{1}{2}n^{\frac{2}{3}}}|b|^{n^{\frac{1}{3}}}\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{n^{\frac{1}{3}}+1}\max_{s\in[0,1]}|b|^s\sum_{l=0}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}l^2}|b|^l\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^l+$$

$$+q^{\frac{1}{2}n^{\frac{2}{3}}}|b|^{-n^{\frac{1}{3}}}\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^{n^{\frac{1}{3}}+1}\max_{s\in[0,1]}|b|^{-s}\sum_{l=0}^{+\infty} q^{\frac{1}{2}l^2}|b|^{-l}\left(2q^{-\frac{1}{2}}\right)^l \to 0,\ \ n\to+\infty,\ \ 0\le\tau<1.$$

Таким образом, получаем формулу

$$f_1(z)=\frac{b^n q^{\frac{(n-1)n}{2}}z^n}{n!}\left\{\theta\left(\frac{q^{n-\frac{1}{2}}z}{n}\right)+o(1)\right\},\quad n\to+\infty.$$

Уточним асимптотическое поведение $f_1(z)$. Для этого исследуем неравенство

$$q^{-(n-1)}n\le z<q^{-n}(n+1),$$

из которого следует тождество

$$n=\frac{\log z}{\log q^{-1}}-\frac{\log n}{\log q^{-1}}+1-d(z)-d(z)\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log q^{-1}}\stackrel{\mathrm{df}}{=}\frac{\log z}{\log q^{-1}}-\frac{\log n}{\log q^{-1}}+h(z),$$

где $0\le d(z)<1$. Перепишем это выражение:

$$n=\frac{\log z}{\log q^{-1}}-\frac{1}{\log q^{-1}}\log\left(\frac{\log z}{\log q^{-1}}\right)+h(z)-\frac{1}{\log q^{-1}}\log\left(1+\frac{-\frac{\log n}{\log q^{-1}}+h(z)}{n+\frac{\log n}{\log q^{-1}}-h(z)}\right)\stackrel{\mathrm{df}}{=}$$

$$\stackrel{\mathrm{df}}{=}\frac{\log z}{\log q^{-1}}-\frac{1}{\log q^{-1}}\log\left(\frac{\log z}{\log q^{-1}}\right)+v(z).$$

Отсюда, полагая $0\ne b=e^{\beta}$, $\beta=b_1-\log a$, $x=\dfrac{\log z}{\log q^{-1}}$, $a=\log q^{-1}$ и применяя формулу Стирлинга для гамма-функции, получаем

$$\log\left(\frac{b^n q^{\frac{1}{2}n(n-1)}z^n}{n!}\right)=\log\left(\frac{e^{n\beta}q^{\frac{1}{2}n(n-1)}z^n}{\Gamma(n+1)}\right)=\frac{1}{2}a\left(x-a^{-1}\log x\right)^2+$$

$$+\left(1+b_1+\frac{1}{2}a-\log a\right)x+\left(-1+a^{-1}\log a-a^{-1}b_1\right)\log x-$$

$$-\ln\left(\sqrt{2\pi}\right)+\beta v(z)+\frac{\log q}{2}v^2(z)-\frac{\log q}{2}v(z)+o(1).$$

Исследуем аргумент функции $\theta$ в асимптотической формуле решения $f_1(z)$:

$$\log\left(\frac{q^{n-\frac{1}{2}}\,z}{n}\right) = \log\left(1+\frac{\frac{1}{\log q^{-1}}\log\left(\frac{\log z}{\log q^{-1}}\right)-v(z)}{\frac{\log z}{\log q^{-1}}-\frac{1}{\log q^{-1}}\log\left(\frac{\log z}{\log q^{-1}}\right)+v(z)}\right)+\left(v(z)-\frac{1}{2}\right)\log q,$$

т. е.

$$\frac{q^{n-\frac{1}{2}}\,z}{n} = (1+o(1))q^{v(z)-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно,

$$f_1(z) = e^{\frac{1}{2}\,a\left(x-a^{-1}\log x\right)^2+\left(1+b_1+\frac{1}{2}\,a-\log a\right)x+\left(-1+a^{-1}\log a-a^{-1}b_1\right)\log x+o(1)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\left\{e^{\beta v(z)+\frac{\log q}{2}\,v^2(z)-\frac{\log q}{2}\,v(z)}\theta\left(q^{v(z)-\frac{1}{2}}\right)+o(1)\right\}.$$

С другой стороны, согласно [3, 5] или теореме 4 имеем

$$f_1(z) = e^{H(x)}\left\{\psi\left(x-a^{-1}\log x+a^{-2}\frac{\log x}{x}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\} =$$
$$= e^{\frac{1}{2}\,a\left(x-a^{-1}\log x\right)^2+\left(1+b_1+\frac{1}{2}\,a-\ln a\right)x+\left(-1+a^{-1}\ln a-a^{-1}b_1\right)\log x+o(1)}\left\{\psi\left(-v(z)\right)+o(1)\right\}.$$

Приравнивая обе формулы решения $f_1(z)$, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\beta v(z)+\frac{\log q}{2}v^2(z)-\frac{\log q}{2}v(z)}\theta\left(q^{v(z)-\frac{1}{2}}\right)+o(1) = \psi(-v(z))+o(1).$$

Для произвольной точки $u\in(0,1)$ строим последовательность $z_n\to+\infty$, $n\to+\infty$, такую, что $v(z_n)\equiv u$. Подставляя $z_n$ в последнее равенство и устремляя $n\to+\infty$, в пределе имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\beta u+\frac{\log q}{2}\,u^2-\frac{\log q}{2}\,u}\theta\left(q^{u-\frac{1}{2}}\right) = \psi(-u).$$

Положим $f_1(z) = e^{H\left(\frac{\ln z}{\ln q^{-1}}\right)} g\left(\frac{\ln z}{\ln q^{-1}}\right)$, $z \geq z_0 > 0$, и вернемся к формуле (17):

$$f(z) = f_1(z) + \sum_{h>0,\ q^h z \geq z_0} (-c)^h q^{\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h} \prod_{k=1}^{h} \frac{1}{1-q^k} f_1\left(q^h z\right) +$$

$$+ \sum_{h>0,\ q^h z < z_0} (-c)^h q^{\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h} \prod_{k=1}^{h} \frac{1}{1-q^k} f_1\left(q^h z\right) =$$

$$= e^{H\left(\frac{\ln z}{\ln q^{-1}}\right)} \left\{ g\left(\frac{\ln z}{\ln q^{-1}}\right) + \sum_{h>0,\ q^h z \geq z_0} (-c)^h q^{\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h} \times \right.$$

$$\times \prod_{k=1}^{h} \frac{1}{1-q^k} e^{H\left(\frac{\ln\left(q^h z\right)}{\ln q^{-1}}\right) - H\left(\frac{\ln z}{\ln q^{-1}}\right)} g\left(\frac{\ln\left(q^h z\right)}{\ln q^{-1}}\right) +$$

$$\left. + e^{-H\left(\frac{\ln z}{\ln q^{-1}}\right)} \sum_{h>0,\ q^h z < z_0} (-c)^h q^{\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h} \prod_{k=1}^{h} \frac{1}{1-q^k} f_1\left(q^h z\right) \right\}.$$

Поскольку функции $g(u)$ и $f_1(u)$ ограничены на отрезках $[z_0, +\infty)$ и $[0, z_0)$ соответственно, то окончательно получаем

$$f(z) = e^{H(x)} \left\{ \psi\left(x - a^{-1}\log x + a^{-2}\frac{\log x}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}.$$

Порядок $n \geq 0$ первой производной решения $f(z)$, которая не равна нулю в точке $z = 0$, совпадает с номером первого ненулевого слагаемого в ряде Тейлора функции $f(z)$ с центром в нуле. Этот степенной ряд вычисляется подстановкой в уравнение (15). Значение $f^{(n)}(0)$ дает формула (17). Разделив на него последнее равенство, получим асимптотическую формулу нормированного целого решения.

Если коэффициенты $b$ и $c$ положительные, то для решения $g(z)$ уравнения (15) можно выбрать константы $l$ и $L$ такие, что $g(z) - lf(z) \geq 0$, $g'(z) - lf'(z) \geq 0$ и $Lf(z) - g(z) \geq 0$, $Lf'(z) - g'(z) \geq 0$ на отрезке $q^m \leq z \leq q^{m-1}$. Для решений $g(z) - lf(z)$ и $Lf(z) - g(z)$ эти неравенства сохранятся на полуоси $z \geq q^m$, и $L \geq g(z)/f(z) \overset{\text{df}}{=} h(z) \geq l$. Обозначим символом $\psi_g$ предельную периодическую функцию решения $g(z)$. Тогда

$$g(z) = f(z)h(z) = e^{H(x)} \left\{ \psi\left(x - a^{-1}\log x + a^{-2}\frac{\log x}{x}\right) h(z) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} =$$

$$= e^{H(x)} \left\{ \psi_g\left(x - a^{-1}\log x + a^{-2}\frac{\log x}{x}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\},$$

откуда, учитывая неравенство $\psi > 0$, получаем

$$h(z) = \frac{\psi_g\left(x - a^{-1}\log x + a^{-2}\frac{\log x}{x}\right)}{\psi\left(x - a^{-1}\log x + a^{-2}\frac{\log x}{x}\right)} + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

т. е. $l\psi(u) \leq \psi_g(u) \leq L\psi(u)$ для всех $u$.

1. *Mahler K.* On a special functional equation // J. London Math. Soc. — 1940. — **15**. — P. 115 – 123.
2. *de Bruijn N. G.* On Mahler's partition problem // Proc. Kon. ned. akad. wetensch. — 1948. — **51**. — P. 659 – 669.
3. *de Bruijn N. G.* The asymptotically periodic behavior of the solutions of some linear functional equations // Amer. J. Math. — 1949. — **71**, № 2. — P. 313 – 330.
4. *de Bruijn N. G.* On some linear functional equations // Publ. Math. PlaceCity Debrecen. — 1950. — **1**. — P. 129 – 134.
5. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x) = e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$, I, II // Proc. Ned. akad. wetensch. A.=Indag. Math. — 1953. — **15**. — P. 449 – 464.
6. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. — 1973. — **9**, № 9. — С. 1627 – 1645.
7. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes Math. — 1980. — **809**. — P. 267.

*Получено 18.03.13*