УДК 517.938

ІСНУВАННЯ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У БАНАХОВОМУ ПРОСТОРІ

І. М. Грод

Тернопіл. нац. пед. ун-т
Україна, 46027, Тернопіль, вул. М. Кривоноса, 2
e-mail: grod@tnpu.edu.ua

We find sufficient conditions for the nonlinear difference equation $x(n+1) = F(n, x(n))x(n) + f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, in a Banach space to have bounded solutions.

Установлены достаточные условия существования ограниченных решений нелинейных разностных уравнений в банаховом пространстве $x(n+1) = F(n, x(n))x(n) + f(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вступ. Постановка задачі. Розглянемо простір обмежених двобічних послідовностей елементів простору $\mathbb{E}$. $\mathbb{E}$ — деякий скінченновимірний банахів простір із нормою $\|\cdot\|_{\mathbb{E}}$, який позначатимемо $l_\infty = l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ ($\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел). Цей простір є банаховим з нормою

$$\|x\|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|x(n)\|_{\mathbb{E}}.$$

Задамо різницевий оператор $\mathcal{F}$, що діє у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ і визначається рівністю

$$(\mathcal{F}x)_n = F(n, x(n))x(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $F(n, x)$ — функція, визначена на $\mathbb{Z} \times \mathbb{E}$, причому для кожного фіксованого n і x набуває значень із простору $L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ ($L(\mathbb{E}, \mathbb{E})$ — банахів простір усіх лінійних неперервних операторів, що діють у просторі $\mathbb{E}$), $x \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$, і розглянемо рівняння

$$x(n+1) = (\mathcal{F}x)_n + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Тут $f \in l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$.

У даній роботі з допомогою теорії *c-неперервних* операторів [1–3] вивчається питання існування у просторі $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$ розв'язків рівняння (1).

Нагадаємо деякі необхідні для подальшого викладу означення.

Означення 1. *Послідовність $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, називається локально збіжною до елемента $x \in l_\infty$ при $k \to \infty$ і позначається*

$$x_k \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} x \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і

$$\lim_{k\to\infty} \max_{|n|\le p} \|x_k(n) - x(n)\|_{\mathbb{E}} = 0$$

для всіх $p \in \mathbb{N}$.

Означення 2. *Оператор називається с-неперервним, якщо для довільних* $x \in l_\infty$ *і послідовності* $x_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, *для яких* $x_k \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} x$ *при* $k \to \infty$, *випливає, що* $Fx_k \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} Fx$ *при* $k \to \infty$. *Клас таких операторів, очевидно, є досить широким.*

Основний результат. Припустимо, що рівняння (1) таке, що:

1) $F(n, x)$ неперервно залежить від $x \in \mathbb{E}$ при $n \in \mathbb{Z}$ і

$$\lim_{u-v\to 0} \sup_{n\in\mathbb{Z}, \|u\|_E\le r, \|v\|_E\le r} \|F(n,u) - F(n,v)\|_{L(E,E)} = 0;$$

2) $\sup_{(n,x)\in\mathbb{E}\times B[0,r]} \|F(n,x)\|_{L(E,E)} < \infty$ для всіх r, де $B[0,r] = \{x \in E : \|x\|_E \le r\}$ — замкнена куля радіуса r.

Уведемо до розгляду допоміжні оператори $D : l_\infty \to l_\infty$ і $D_y : l_\infty \to l_\infty$, що визначаються рівностями

$$(Dx)(n) = x(n+1) - F(n, x(n))x(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$(D_y x)(n) = x(n+1) - F(n, y(n))x(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $y(n) \in \mathbb{E}$, $n \in \mathbb{Z}$, — довільний фіксований вектор.

Зауважимо, що оператор D_y є лінійним оператором при кожному фіксованому $y \in \in l_\infty$, а тому завдяки неперервності $F(n,x)$ на $\mathbb{E}$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{E}$ легко показати, що він є неперервним і обмеженим на $l_\infty(\mathbb{Z}, \mathbb{E})$.

Для оператора $(D_y x)$ вимагатимемо, щоб виконувались умови:

3) для кожного $y \in l_\infty$ оператор $D_y : l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ має обернений неперервний $(D_y)^{-1} : l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E}) \to l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$;

4) $\sup_{y\in l_\infty} \|(D_y)^{-1}\|_{L(l_\infty, l_\infty)} < +\infty$.

Сформулюємо основну теорему.

Теорема 1. *Припустимо, що функція* $F(n,x)$ *така, що виконуються умови 1 – 4.* *Тоді для кожної функції* $f \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$ *різницеве рівняння*

$$x = \mathcal{F}x + f \tag{2}$$

має хоча б один розв'язок $x \in l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{E})$.

Допоміжні твердження. Розглянемо рівняння

$$x(n+1) = F(n, y(n))x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{3}$$

де $y = y(n)$ — довільний елемент простору l_∞. Оскільки це рівняння є лінійним, до нього можна застосовувати теорію, викладену, наприклад, у роботах [1 – 5]. Завдяки припущенню 3 єдиний розв'язок $x \in l_\infty$ рівняння (3), що відповідає функції $f \in l_\infty$, подається за допомогою оператора $(D_y)^{-1}$ у вигляді

$$x = (D_y)^{-1} f. \tag{4}$$

Далі, вважаючи, що функцію $f \in l_\infty$ зафіксовано, розглянемо відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to \to l_\infty$, яке кожному елементу $y \in l_\infty$ ставить у відповідність елемент $(D_y)^{-1} f$ цього ж простору. Це відображення, очевидно, визначається рівністю

$$\mathcal{U}_f y = (D_y)^{-1} f, \tag{5}$$

де $y \in l_\infty$.

Зупинимось на деяких властивостях відображень $\mathcal{U}_f$ при $f \in l_\infty$.

Лема 1. *Для оператора $\mathcal{U}_f$ при будь-якому $y \in l_\infty$ має місце оцінка*

$$\|\mathcal{U}_f y\|_{l_\infty} \leq d \|f\|_{l_\infty},$$

де d — скінченне додатне число.

Дійсно, завдяки припущенню 4 можна стверджувати, що існує деяке скінченне додатне число d таке, що

$$d = \sup_{y \in l_\infty} \|(D_y)^{-1}\|_{L(l_\infty, l_\infty)}.$$

Тому з урахуванням рівності (5) для всіх $y \in l_\infty$ та $f \in l_\infty$ має місце співвідношення

$$\|\mathcal{U}_f y\|_{l_\infty} = \|(Dy)^{-1} f\|_{l_\infty} \leq \|(Dy)^{-1}\|_{L(l_\infty, l_\infty)} \|f\|_{l_\infty} \leq d \|f\|_{l_\infty}, \tag{6}$$

яке і доводить справедливість леми 1.

Зауваження 1. З леми 1 випливає, що замкнена куля $\mathbb{B}(0, d\|f\|_{l_\infty})$ (d визначається згідно з (6)) інваріантна по відношенню до оператора $\mathcal{U}_f$.

Лема 2. *Оператор $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$ є неперервним для кожного $f \in l_\infty$.*

Доведення. Зафіксуємо довільні елементи $y = y(n)$ і $z = z(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, простору l_∞ і розглянемо різницеві рівняння

$$x(n+1) = F(n, y(n)) x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x(n+1) = F(n, z(n)) x(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $x(y) = x_y(n)$ і $x(z) = x_z(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, — відповідні розв'язки цих рівнянь, тобто

$$\begin{gathered} x_y(n+1) \equiv F(n, y(n)) x_y(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x_z(n+1) \equiv F(n, z(n)) x_z(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{7}$$

Тоді

$$x_y = (D_y)^{-1} f = \mathcal{U}_f y \tag{8}$$

і

$$x_z = (D_z)^{-1} f = \mathcal{U}_f z. \tag{9}$$

Запишемо (7) у вигляді

$$x_z(n+1) - F(n, y(n))x_z(n) \equiv [F(n, z(n)) - F(n, y(n))]x_z(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Звідси, ввівши позначення

$$(B_{z,y}w)(n) = [F(n, z(n)) - F(n, y(n))]w(n),$$

отримаємо

$$x_z = (D_y)^{-1}(B_{y,z}x_z + f) = (D_y)^{-1}f + (D_y)^{-1}(B_{y,z}x_z) = (D_y)^{-1}f + (D_y)^{-1}(B_{y,z}(D_z)^{-1}f).$$

Отже, на підставі (8) та (9) маємо

$$\mathcal{U}_f z - \mathcal{U}_f y = (D_y)^{-1}(B_{y,z}\mathcal{U}_f z). \tag{10}$$

Далі розглянемо довільну послідовність $(y_k)_{k\geq 1}$ елементів $y_k \in l_\infty$, $k \geq 1$, для якої

$$\lim_{k\to\infty} \|y_k - y\|_{l_\infty} = 0. \tag{11}$$

Використовуючи рівність (10), записуємо

$$\mathcal{U}_f y_k - \mathcal{U}_f y = (D_y)^{-1}(B_{y_k,y}\mathcal{U}_f y_k) \tag{12}$$

для всіх $k \geq 1$.

Враховуючи (11), припущення 4 та рівність (5), можемо стверджувати, що існує стала $a > 0$ така, що

$$\sup_{k\geq 0} \|\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} \leq a. \tag{13}$$

Оскільки

$$\begin{aligned}\|B_{y_k,y}\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} &= \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|[F(n, y_k(n)) - F(n, y(n))](\mathcal{U}_f y_k)(n)\|_{\mathbb{E}} \leq \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F(n, y_k(n)) - F(n, y(n)))\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})} \|\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} \leq \\ &\leq a \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F(n, y_k(n)) - F(n, y(n))\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})}, \quad n \geq 1,\end{aligned}$$

операторна функція $F(n, x)$ задовольняє умову 1, а банахів простір $\mathbb{E}$ скінченновимірний, то завдяки (11)

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \|F(n, y_k(n)) - F(n, y(n))\|_{L(\mathbb{E},\mathbb{E})} = 0$$

або

$$\lim_{k\to\infty} \|B_{y_k,y}\,\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} = 0.$$

Тоді на підставі умови 3
$$\lim_{k\to\infty} \|(D_y)^{-1}(B_{y_k,y}\mathcal{U}_f y_k\|_{l_\infty} = 0.$$

Звідси з урахуванням (12) отримуємо
$$\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{U}_f y_k - \mathcal{U}_f y\|_{l_\infty} = 0. \tag{14}$$

Отже, якщо виконується співвідношення (11), то має місце також рівність (13). Це забезпечує неперервність відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$ у точці $y \in l_\infty$. А оскільки точку $y \in l_\infty$ було вибрано довільно, $\mathcal{U}_f$ є неперервним на l_∞ для кожного $f \in l_\infty$.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Відображення* $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$, $f \in l_\infty$ *є c-цілком неперервним.*

Доведення. Нагадаємо [2], що в даному випадку оператор $(D_y)^{-1} : l_\infty \to l_\infty$ є c-неперервним.

Розглянемо довільні $y \in l_\infty$ і послідовність $y_k \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, для яких
$$y_k \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} y \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{15}$$

Нехай $x_y \in l_\infty$ і $x_{y_k} \in l_\infty$, $k \in \mathbb{N}$, — такі функції, що
$$x_y(n+1) \equiv F(n, y(n))x_y(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$
і
$$x_{y_k}(n+1) \equiv F(n, y_k(n))x_{y_k}(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{17}$$

Запишемо друге із цих співвідношень у вигляді
$$x_{y_k}(n+1) \equiv F(n, y(n))x_{y_k}(n) + [F(n, y_k(n)) - F(n, y(n))]x_{y_k}(n) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{18}$$

Згідно з припущеннями 3 та 4, враховуючи (15), (16), отримуємо
$$x_y = (D_y)^{-1} f$$
і
$$x_{y_k} = (D_y)^{-1}(f + B_{y_k,y}x_{y_k}), \quad k \geq 1.$$

Далі, на підставі леми 1 робимо висновок, що послідовність $(x(y_k))_{k\geq 1}$ є обмеженою. Тому завдяки (14), неперервності $F(n, x)$ на $\mathbb{E}$ по x при кожному $n \in \mathbb{Z}$ та скінченній розмірності простору $\mathbb{E}$ маємо
$$B_{y_k,y}x_{y_k} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$
або
$$f + B_{y_k,y}x_{y_k} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} f \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Звідси з урахуванням c-неперервності оператора $(D_y)^{-1} : l_\infty \to l_\infty$ маємо

$$x_{y_k} \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} x_y \quad \text{при} \quad k \to \infty. \tag{19}$$

Оскільки на підставі (5)

$$x_y = \mathcal{U}_f y = (D_y)^{-1} f \tag{20}$$

і

$$x_{y_k} = \mathcal{U}_f y_k = (D_{y_k})^{-1} f, \quad r \geq 1, \tag{21}$$

то

$$\mathcal{U}_f y_k \xrightarrow{\text{лок.}, l_\infty} \mathcal{U}_f y \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

що забезпечує c-неперервність оператора $\mathcal{U}_f$. Більше того, оскільки простір $\mathbb{E}$ скінченновимірний, то на підставі c-неперервності відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$, $f \in l_\infty$, можемо стверджувати, що він є c-цілком неперервним. Це випливає з того, що множина

$$\{(P_r \mathcal{U}_f y) : \|y\|_{l_\infty} \leq 1\}$$

є передкомпактною в $\mathbb{E}$ для кожного $r \in \mathbb{Z}$ (P_r — проектор: $P_r y = y_r$).

Лему 3 доведено.

Доведення теореми. Завдяки (5) і (6) зрозуміло, що кожна нерухома точка відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$ є обмеженим розв'язком рівняння (1). Крім цього, на основі доведених лем можна стверджувати, що відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$, $f \in l_\infty$, є c-цілком неперервним. Залишилося показати, що у випадку виконання умов теореми для кожного $f \in l_\infty$ множина нерухомих точок відображення $\mathcal{U}_f : l_\infty \to l_\infty$ не є порожньою.

Для того щоб це показати, введемо до розгляду послідовність операторів $\mathcal{U}_{f\,k} : l_\infty \to \to l_\infty$ подібно до того, як це зроблено в роботі [8]:

$$(\mathcal{U}_{f\,k})_n = \begin{cases} (\mathcal{U}_f)_n, & \text{якщо} \quad n \in [-k, k] \bigcap \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{якщо} \quad n \in \mathbb{Z} \setminus [-k, k], \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Тут $f \in l_\infty$ є довільним, фіксованим. Далі, на підставі зауваження 1 можемо стверджувати, що кожний з операторів послідовності відображає кулю $B(0, d\|f\|_{l_\infty})$ саму в себе. Крім цього, задані відображення є цілком неперервними. Це випливає з того, що сам оператор $\mathcal{U}_f$ є c-цілком неперервним. Тому згідно з теоремою Шаудера про нерухому точку [9] для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує така точка $c_k \in B(0, d\|f\|_{l_\infty})$, що

$$\mathcal{U}_{f\,k} c_k = c_k. \tag{23}$$

Оскільки множини $\{c_{n,k}, k \in \mathbb{N}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, передкомпактні і

$$\sup_{k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}} \|c_{n,k}\|_E \leq r,$$

то існує строго зростаюча послідовність натуральних чисел k_l, $l \geq 1$, така, що послідовність

$$c_{k_l} \overset{\text{лок.}, l_\infty}{\longrightarrow} c \quad \text{при} \quad l \to \infty, \tag{24}$$

де c — деяка точка з кулі $B(0, d\|f\|_{l_\infty})$.

Враховуючи c-неперервність оператора і (23), можна показати, що

$$\mathcal{U}_{f_{k_l}} c - \mathcal{U}_f c \overset{\text{лок.}, l_\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty$$

і

$$\mathcal{U}_{f_{k_l}} c - \mathcal{U}_{f_{k_l}} c_{k_l} \overset{\text{лок.}, l_\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Тому, враховуючи (23) і (24), отримуємо

$$\mathcal{U}_f c = c.$$

Теорему доведено.

Як приклад системи, для якої виконуються всі вимоги теореми 1, можна розглянути систему рівнянь

$$\begin{aligned} x(n+1) &= b(y(n))x(n) + f_1(n), \\ y(n+1) &= (-3 + \sin(x(n) + n)y(n) + f_2(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

де

$$b(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{якщо} \quad x \leq 2, \\ 1 - \dfrac{1}{x}, & \text{якщо} \quad 2 < x \leq 3, \\ \dfrac{2}{3}, & \text{якщо} \quad x > 3. \end{cases}$$

1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269 – 274.
2. *Слюсарчук В. Ю.* Узагальнення теореми Мухамадієва про оборотність функціональних операторів у просторі обмежених функцій // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 3. — С. 398 – 412.
3. *Слюсарчук В. Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн. — 1987. — **39**, № 5. — С. 660 – 662.
4. *Самойленко А. М., Теплинский Ю. В.* Счетные системы дифференциальных уравнений. — Киев: Ин-т математики НАН УССР, 1990. — 308 с.
5. *Слюсарчук В. Е.* Об экспоненциальной дихотомии решений дискретных систем // Укр. мат. журн. — 1983. — **35**, № 1. — С. 109 – 115.
6. *Баскаков А. Г.* Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов // Докл. АН. Математика. — 1993. — **333**, № 3. — С. 282 – 284.

7. *Курбатов В. Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения. — Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990. — 168 с.
8. *Грод І. М.* Достатні умови існування обмежених розв'язків систем нелінійних різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. — 2005. — **8**, № 2. — С. 165 – 173.
9. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1997. — 232 с.

Одержано 19.06.12,
після доопрацювання — 15.10.12