УДК 517.929

МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕЛІНІЙНИХ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ, ЩО МОЖУТЬ НЕ БУТИ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИМИ ЗА БОХНЕРОМ

В. Ю. Слюсарчук

Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11
e-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com

We introduce a new class of almost periodic operators, and find conditions for existence of almost periodic but possibly not Bochner almost periodic solutions of nonlinear discrete equations.

Введен новый класс почти периодических операторов. Получены условия существования почти периодических решений нелинейных дискретных уравнений, которые могут не быть почти периодическими по Бохнеру.

1. Основні позначення й означення. Нехай $\mathbb{Z}$ — множина всіх цілих чисел, G — довільна адитивна злічена група, $\mathbb{K}$ — скалярне поле (це або дійсне поле $\mathbb{R}$, або комплексне поле $\mathbb{C}$), E – довільний банаховий простір над полем $\mathbb{K}$ з нормою $\|\cdot\|_E$ і $L(X,X)$ — банаховий простір лінійних неперервних операторів $A : X \to X$ (X — довільний банаховий простір) з нормою

$$\|A\|_{L(X,X)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_X.$$

Позначимо через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(G,E)$ банаховий простір визначених на G відображень $\mathbf{x} = \mathbf{x}(g)$ зі значеннями в E, для кожного з яких $\sup_{g\in G} \|\mathbf{x}(g)\|_E < \infty$, з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} = \sup_{g\in G} \|\mathbf{x}(g)\|_E$$

і нульовим елементом $\mathbf{0}$, а через $R(\mathbf{x})$ множину значень відображення $\mathbf{x} = \mathbf{x}(g)$, тобто множину $\{\mathbf{x}(g) : g \in G\}$.

У просторі $\mathfrak{M}$ визначимо оператор зсуву S_h, $h \in G$, формулою

$$(S_h\mathbf{x})(g) = \mathbf{x}(g+h), \quad g \in G. \tag{1}$$

Означення 1. *Елемент $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$ називається майже періодичним (за Бохнером) (див. [1, 2]), якщо замикання множини $\{S_h\mathbf{y} : h \in G\}$ у просторі $\mathfrak{M}$ є компактною підмножиною цього простору.*

Множина $\mathfrak{B}$ майже періодичних елементів простору $\mathfrak{M}$ є підпростором цього простору з нормою

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{B}} = \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}.$$

Означення 2. *Оператор* $\mathbf{A} \in L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ *називається майже періодичним (за Бохнером), якщо замикання множини* $\{S_h \mathbf{A} S_{-h} : h \in G\}$ *у просторі* $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ *є компактним у* $L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$.

У подальшому при дослідженні дискретних систем будемо використовувати один новий клас майже періодичних операторів, що можуть не бути майже періодичними за Бохнером.

Зафіксуємо довільну відкриту множину $D \subset E$, що може збігатися з E. Позначимо через $\mathcal{K}_D$ множину всіх непорожніх компактних підмножин $K \subset D$. Для множини $D_1 \subset \subset D$ позначимо через $\mathfrak{D}_{D_1}$ множину всіх елементів $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких $R(\mathbf{x}) \subset D_1$.

Означення 3. *Відображення* $\mathbf{H} : \mathfrak{D}_D \to \mathfrak{M}$ *називається майже періодичним, якщо для кожних множини* $K \in \mathcal{K}_D$ *і послідовності* $(h_k)_{k\geq 1}$ *елементів групи* G *існує така підпослідовність* $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, *що*

$$\lim_{l_1\to\infty,\ l_2\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in\mathfrak{D}_K} \left\| \mathbf{S}_{h_{l_1}} \mathbf{H} \mathbf{S}_{-h_{l_1}} \mathbf{x} - \mathbf{S}_{h_{l_2}} \mathbf{H} \mathbf{S}_{-h_{l_2}} \mathbf{x} \right\|_{\mathfrak{M}} = 0.$$

Очевидно, що кожний майже періодичний за Бохнером оператор $\mathbf{A} \in L(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ є майже періодичним і в сенсі означення 3. Також очевидно, що у випадку $D = E$, скінченновимірного простору E і лінійного оператора $\mathbf{H} : \mathfrak{D}_D \to \mathfrak{M}$ означення 2 і 3 рівносильні. Однак у випадку нескінченновимірного простору E майже періодичний у сенсі означення 3 оператор $\mathbf{H}$ може не бути майже періодичним у сенсі означення 2 (приклад такого оператора наведено в наступному пункті).

2. Приклад майже періодичного за означенням 3 оператора, що не є майже періодичним за Бохнером. Будемо вважати, що $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, $D = E$ і $\dim\ E = \infty$. Позначимо через $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathbb{Z}, E)$ множину елементів простору $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$, для кожного з яких замикання множини значень у просторі E є компактною множиною. Очевидно, що $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{S}$ і $\mathbf{x} + +\mathbf{y}, \alpha\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$, якщо $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathfrak{S}$ і $\alpha \in \mathbb{R}$. Тому $\mathfrak{S}$ є векторним простором.

Покажемо, що

$$\overline{\mathfrak{S}} = \mathfrak{S}. \tag{2}$$

Звідси буде випливати, що векторний простір $\mathfrak{S}$ є підпростором простору $\mathfrak{M}$.

Нехай $\mathbf{x}$ — довільний елемент множини $\overline{\mathfrak{S}}$. Існує послідовність $(\mathbf{x}_m)_{m\geq 1}$ елементів множини $\mathfrak{S}$, для якої

$$\lim_{m\to\infty} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} = 0. \tag{3}$$

Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Завдяки (3) для деякого числа $m_0 \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{x}_{m_0} - \mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} < \varepsilon. \tag{4}$$

Оскільки $\mathbf{x}_{m_0} \in \mathfrak{S}$, то множина $\overline{R(\mathbf{x}_{m_0})}$ є компактною в E. Тому для цієї множини існує скінченна ε-сітка M. На підставі (4) множина M буде (2ε)-сіткою для $\overline{R(\mathbf{x})}$. Тоді завдяки довільності вибору числа $\varepsilon > 0$ та теоремі Гаусдорфа (див. [3, с. 47]) множина $\overline{R(\mathbf{x})}$ є компактною.

Отже, рівність (2) справджується і векторний простір $\mathfrak{S}$ є підпростором простору $\mathfrak{M}$.

Далі розглянемо множину $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset E$, для елементів якої виконується співвідношення

$$\left\| \sum_{l=1}^{p} \beta_l x_{k_l} \right\|_E = \sum_{l=1}^{p} |\beta_l| \tag{5}$$

для довільних $p \in \mathbb{N}$, дійсних чисел $\beta_1, \ldots, \beta_p$ і натуральних чисел $k_1, \ldots, k_p$, серед яких немає рівних між собою. Множина з такою властивістю існує, якщо, наприклад, $E = C^0$, де C^0 — банаховий простір обмежених і неперервних на $\mathbb{R}$ функцій $x = x(t)$ зі значеннями в $\mathbb{R}$ з нормою $\|x\|_{C^0} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|$; в якості елементів $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ можна взяти функції $\sin \lambda_1 t, \sin \lambda_2 t, \ldots, \sin \lambda_k t, \ldots$ відповідно, де числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ лінійно незалежні, тобто з рівності

$$n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \ldots + n_k\lambda_k = 0,$$

де $n_1, n_2, \ldots, n_k$ — цілі числа, випливає, що $n_1 = n_2 = \ldots = n_k = 0$ [2]. Очевидно, що замикання множини X у просторі E не є компактним в E.

Визначимо елемент $\mathbf{y} = \mathbf{y}(n)$ простору $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ співвідношенням

$$\mathbf{y}(n) = \begin{cases} x_1, & \text{якщо} \quad n \le 1, \\ x_n, & \text{якщо} \quad n \ge 2. \end{cases} \tag{6}$$

Розглянемо множину

$$Y = \{S_m \mathbf{y} : m \in \mathbb{Z}\},$$

де S_m — оператор зсуву, що у випадку $G = \mathbb{Z}$ визначається формулою (1), та лінійну оболонку $\operatorname{span}(Y)$ цієї множини, тобто мінімальний векторний підпростір простору $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$, що містить множину Y. Зазначимо, що кожний елемент $\mathbf{u} \in \operatorname{span}(Y)$ є лінійною комбінацією деяких елементів $S_{m_1}\mathbf{y}, \ldots, S_{m_p}\mathbf{y} \in Y$, тобто $\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{p} \beta_k S_{m_k}\mathbf{y}$ (тут $\beta_1, \ldots, \beta_p$ — дійсні числа, а p — натуральне число). Оскільки на підставі (5) та (6) для всіх достатньо великих натуральних чисел n і ω виконуються співвідношення

$$\|\mathbf{u}(n) - \mathbf{u}(n+\omega)\|_E = \left\| \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mathbf{y}(n+m_k) - \sum_{k=1}^{p} \beta_k \mathbf{y}(n+\omega+m_k) \right\|_E =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{p} \beta_k x_{n+m_k} - \sum_{k=1}^{p} \beta_k x_{n+\omega+m_k} \right\|_E = 2\sum_{k=1}^{p} |\beta_k|,$$

то замикання множини значень ненульового елемента $\mathbf{u} = \mathbf{u}(n) = \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_k S_{m_k}\mathbf{y}\right)(n)$ векторного підпростору $\operatorname{span}(Y)$ не є компактною множиною, тобто $\mathbf{u} \notin \mathfrak{S}$, якщо $\mathbf{u} \ne \mathbf{0}$. Очевидно, що існує границя $\lim_{n\to-\infty} \mathbf{u}(n) = \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_k\right) x_1$.

Покажемо, що аналогічні властивості мають ненульові елементи замикання $\overline{\operatorname{span}(Y)}$ векторного підпростору $\operatorname{span}(Y)$ у просторі $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$. Нехай $\mathbf{z}$ — довільний елемент з $\overline{\operatorname{span}(Y)} \setminus \operatorname{span}(Y)$ і $(\mathbf{z}_k)_{k\ge1}$ — послідовність елементів з $\operatorname{span}(Y)$, для яких

$$\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{z}_k - \mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} = 0. \tag{7}$$

Покажемо, що для деякого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується співвідношення

$$\lim_{n\to-\infty} \mathbf{z}(n) = \alpha x_1. \tag{8}$$

Справді, нехай

$$\lim_{n\to-\infty} \mathbf{z}_k(n) = \alpha_k x_1, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad k \geq 1, \tag{9}$$

де послідовність $(\alpha_k)_{k\geq 1}$ є збіжною (ця вимога не зменшує загальності міркувань), тобто для деякого числа $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha. \tag{10}$$

Очевидно, що для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $k \geq 1$

$$\mathbf{z}(n) = (\mathbf{z}(n) - \mathbf{z}_k(n)) + (\mathbf{z}_k(n) - \alpha_k x_1) + (\alpha_k a - \alpha x_1) + \alpha x_1.$$

Тому

$$\|\mathbf{z}(n) - \alpha x_1\|_E \leq \|\mathbf{z}(n) - \mathbf{z}_k(n)\|_E + \|\mathbf{z}_k(n) - \alpha_k x_1\|_E + \|\alpha_k x_1 - \alpha x_1\|_E, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \geq 1.$$

Звідси та з (9) випливає, що для кожного $k \geq 1$

$$0 \leq \overline{\lim_{n\to-\infty}} \|\mathbf{z}(n) - \alpha x_1\|_E \leq \overline{\lim_{n\to-\infty}} \|\mathbf{z}(n) - \mathbf{z}_k(n)\|_E + \overline{\lim_{n\to-\infty}} \|\mathbf{z}_k(n) - \alpha_k x_1\|_E +$$
$$+ \overline{\lim_{n\to-\infty}} \|\alpha_k x_1 - \alpha x_1\|_E \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_k\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} + \|(\alpha_k - \alpha)x_1\|_E.$$

Оскільки ці співвідношення справджуються для всіх $k \geq 1$, то завдяки (7) та (10) виконується співвідношення (8).

Далі покажемо, що для елемента $\mathbf{z} \in \overline{\operatorname{span}(Y)} \setminus \operatorname{span}(Y)$ множина $\overline{R(\mathbf{z})}$ не є компактною в E. Нехай $(\mathbf{z}_k)_{k\geq 1}$ — послідовність елементів із $\operatorname{span}(Y)$, для якої виконується співвідношення (7). Оскільки для кожного $k \geq 1$ існують такі числа $p_k \in \mathbb{N}$, $\delta_{1,k}, \ldots, \delta_{p_k,k} \in \mathbb{R}$ і $m_{1,k}, \ldots, m_{p_k,k} \in \mathbb{Z}$, що елемент $\mathbf{z}_k = \mathbf{z}_k(n)$ записується у вигляді

$$\mathbf{z}_k(n) = \sum_{l=1}^{p_k} \delta_{l,k} \mathbf{y}(n + m_{l,k}) = \sum_{l=1}^{p_k} \delta_{l,k} x_{n+m_{l,k}}$$

(тут враховано (6)), то завдяки (5)

$$\|\mathbf{z}_k\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)} = \sum_{l=1}^{p_k} |\delta_{l,k}|$$

і для всіх достатньо великих чисел $n, \omega \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{z}_k(n) - \mathbf{z}_k(n+\omega)\|_E = \left\| \sum_{l=1}^{p_k} \delta_{l,k} x_{n+m_{l,k}} - \sum_{l=1}^{p_k} \delta_{l,k} x_{n+\omega+m_{l,k}} \right\|_E = 2 \sum_{l=1}^{p_k} |\delta_{l,k}| = 2\|\mathbf{z}_k\|_{\mathfrak{M}(\mathbb{Z},E)}.$$

Із цих рівностей випливає, що для всіх достатньо великих чисел $n, \omega \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{z}(n) - \mathbf{z}(n+\omega)\|_E \geq \|\mathbf{z}_k(n) - \mathbf{z}_k(n+\omega)\|_E - \|(\mathbf{z}(n) - \mathbf{z}_k(n)) - (\mathbf{z}(n+\omega) - \mathbf{z}_k(n+\omega))\|_E \geq$$
$$\geq \|\mathbf{z}_k(n) - \mathbf{z}_k(n+\omega)\|_E - \|\mathbf{z}(n) - \mathbf{z}_k(n)\|_E - \|\mathbf{z}(n+\omega) - \mathbf{z}_k(n+\omega)\|_E \geq$$
$$\geq 2\|\mathbf{z}_k\|_{\mathbb{M}(\mathbb{Z},E)} - 2\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_k\|_{\mathbb{M}(\mathbb{Z},E)}, \quad k \geq 1.$$

Звідси та з включення $\mathbf{z} \in \overline{\operatorname{span}(Y)} \setminus \operatorname{span}(Y)$ на підставі (7) отримуємо, що для деякого числа $\gamma > 0$ та всіх достатньо великих чисел $n, \omega \in \mathbb{N}$

$$\|\mathbf{z}(n) - \mathbf{z}(n+\omega)\|_E \geq \gamma,$$

що означає некомпактність множини $\overline{R(\mathbf{z})}$ у просторі E.

Отже, $\overline{\operatorname{span}(Y)}$ є підпростором простору $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$.

Розглянемо підпростір $L = \mathfrak{S} \oplus \overline{\operatorname{span}(Y)}$ простору $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$. Зазначимо, що кожний вектор $\mathbf{x} \in L$ єдиним чином записується у вигляді $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, де $\mathbf{u} \in \mathfrak{S}$ і $\mathbf{v} \in \overline{\operatorname{span}(Y)}$. Справді, якщо існують два таких зображення

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1,$$
$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2 \left(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathfrak{S},\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \overline{\operatorname{span}(Y)}\right),$$

то $\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2$ і, отже, при $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ отримуємо рівність $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, а при $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ — рівність $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, що суперечить включенню $\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \in \mathfrak{S}$, оскільки $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \in \overline{\operatorname{span}(Y)} \setminus \{\mathbf{0}\}$ і множина $\mathfrak{S} \cap \left(\overline{\operatorname{span}(Y)} \setminus \{\mathbf{0}\}\right)$ є порожньою.

Розглянемо лінійний неперервний функціонал $\psi : \overline{\operatorname{span}(\{x_k : k \in \mathbb{N}\})} \to \mathbb{R}$, для якого $\psi(x_1) = 1$ і $\|\psi\| = 1$. Такий функціонал існує (див., наприклад, [4, с. 176, 177]).

Визначимо лінійний функціонал $\varphi : L \to \mathbb{R}$ так: кожному вектору $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in L$, де $\mathbf{u} \in \mathfrak{S}$ і $\mathbf{v} \in \overline{\operatorname{span}(Y)}$, поставимо у відповідність число

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{u}) + \varphi(\mathbf{v}),$$

де

$$\varphi(\mathbf{u}) = 0$$

і

$$\varphi(\mathbf{u}) = \psi\left(\lim_{n\to-\infty} \mathbf{u}(n)\right).$$

Цей функціонал є неперервним завдяки неперервності функціонала ψ.

За теоремою Гана – Банаха про продовження лінійного неперервного функціонала [4] існує лінійний неперервний функціонал $l : \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E) \to \mathbb{R}$, для якого $l(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ для всіх $\mathbf{x} \in L$ і $\|l\| = \|\varphi\|$.

Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{s} \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{B}$. Визначимо лінійний неперервний оператор $C : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ формулою

$$C\mathbf{x} = l(\mathbf{x})\mathbf{s}, \quad \mathbf{x} \in \mathfrak{M}. \tag{11}$$

Покажемо, що цей оператор є майже періодичним у сенсі означення 3 і не є майже періодичним у сенсі означення 2.

Зазначимо, що на підставі (11)

$$S_m C S_{-m}\mathbf{x} = l(S_{-m}\mathbf{x}) S_m \mathbf{s} \tag{12}$$

для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ і

$$l(S_{-m}\mathbf{x}) = 0$$

для кожного $\mathbf{x} \in \mathfrak{S}$. Тому для будь-якої компактної множини $K \subset E$ замикання множини $\{S_m C S_{-m}\mathbf{x} : m \in \mathbb{Z}, \mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K\}$ у просторі $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ є компактним в $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$, оскільки ця множина збігається $\{\mathbf{0}\}$. Це означає, що оператор C є майже періодичним у сенсі означення 3. Однак замикання множини $\{S_m C S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}$ у просторі $L(\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E), \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E))$ не є компактним в $L(\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E), \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E))$. Справді, завдяки (11) та (12) для елемента $\mathbf{y}$, що визначається за допомогою (6), виконується співвідношення

$$S_m C S_{-m}\mathbf{y} = S_m \mathbf{s}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

і, отже,

$$\{S_m C S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}\mathbf{y} = \{S_m \mathbf{s} : m \in \mathbb{Z}\}. \tag{13}$$

Якщо оператор C є майже періодичним у сенсі означення 2, тобто $\{S_m C S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}$ є передкомпактною множиною у просторі $L(\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E), \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E))$, то множина $\{S_m C S_{-m} : m \in \mathbb{Z}\}\mathbf{y}$ є передкомпактною у просторі $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$. Завдяки рівності (13) передкомпактною у просторі $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ має бути і множина $\{S_m \mathbf{s} : m \in \mathbb{Z}\}$. Однак ця властивість для $\{S_m \mathbf{s} : m \in \mathbb{Z}\}$ не виконується, оскільки елемент $\mathbf{s}$ не є майже періодичним (див. означення 1).

Отже, побудову оператора з бажаними властивостями завершено.

Зауваження 1. Нехай банаховий простір E збігається з простором $l_1 = l_1(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ послідовностей $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$, для кожної з яких $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, з нормою

$$\|a\|_{l_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{14}$$

В якості множини $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\} \subset E$, що використовувалася при побудові наведеного вище прикладу, можна взяти множину $\tilde{X}$ послідовностей

$$x_k = (\delta_{k1}, \delta_{k2}, \delta_{k3}, \ldots), \quad k \in \mathbb{N},$$

де δ_{kl} — символ Кронекера: $\delta_{kl} = 1$, якщо $k = l$, і $\delta_{kl} = 0$, якщо $k \neq l$.

Тоді завдяки (14) елементи множини $\tilde{X}$, очевидно, будуть задовольняти співвідношення (5).

3. Основний об’єкт досліджень. Нехай Ω — довільна область у просторі E. Розглянемо відображення $\mathbf{F} : \mathfrak{D}_\Omega \to \mathfrak{M}$, для якого *для кожного* $K \in \mathcal{K}_\Omega$ *замикання множини*

$\{S_h \mathbf{F} S_{-h}\mathbf{x} : h \in G, \mathbf{x} \in \mathfrak{D}_K\}$ *у просторі* $\mathfrak{M}$ *є компактним в* $\mathfrak{M}$, тобто відображення $\mathbf{F}$ є майже періодичним у сенсі означення 3.

Очевидно, що для кожних $K \in \mathcal{K}$ і послідовності $(h_k)_{k\geq 1}$ елементів групи G існує така підпослідовність $(h_{k_l})_{l\geq 1}$, що послідовність $\left(S_{h_{k_l}} \mathbf{F} S_{-h_{k_l}}\mathbf{x}\right)_{l\geq 1}$ збігається рівномірно на $\mathfrak{D}_K$.

Метою статті є встановлення умов існування майже періодичних розв'язків рівняння

$$\mathbf{F}\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{15}$$

При дослідженні цього рівняння будемо використовувати один функціонал, визначений на множині розв'язків рівняння з передкомпактними множинами значень.

Зазначимо, що окремими випадками рівняння (15) є різницеві рівняння, зокрема рівняння

$$x_{n+1} = f_n(x_n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

існування майже періодичних розв'язків якого з'ясовувалося автором у [5].

4. Функціонал δ. Відокремлені та сильно відокремлені розв'язки рівняння (15). Зафіксуємо довільну множину $K \in \mathcal{K}$. Позначимо через $\mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ множину всіх розв'язків $\mathbf{x}$ рівняння (15), для кожного з яких для $R(\mathbf{x}) \subset K$ і $\overline{R(\mathbf{x})} \neq K$.

Зафіксуємо довільний елемент $\mathbf{x}^* \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ (вважаємо, що $\mathcal{N}(\mathbf{F}, K) \neq \varnothing$). Покладемо

$$r(\mathbf{x}^*, K) = \sup\left\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)},\ y \in K\right\}. \tag{16}$$

Завдяки нерівності $\overline{R(\mathbf{x})} \neq K$

$$r(\mathbf{x}^*, K) > 0.$$

Також зафіксуємо довільне число $\varepsilon \in [0, r(\mathbf{x}^*, K)]$. Позначимо через $\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ множину всіх елементів $\mathbf{y} \in \mathfrak{M}$, для кожного з яких

$$R(\mathbf{x}^* + \mathbf{y}) \subset K \tag{17}$$

і

$$\|\mathbf{y}\|_{\mathfrak{M}} \geq \varepsilon. \tag{18}$$

Аналогічним чином можна визначити множину $\Omega(\mathbf{z}, K, \varepsilon)$ для будь-якого іншого елемента $\mathbf{z} \in \mathfrak{M}$, для якого $R(\mathbf{z}) \subset K$.

Розглянемо функціонал

$$\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon) = \inf_{\mathbf{y}\in\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)} \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \mathbf{y})\|_{\mathfrak{M}}. \tag{19}$$

Означення 4. *Розв'язок* $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ *рівняння (15) називається відокремленим на множині* $G \times K$, *якщо або цей розв'язок єдиний на множині* $G \times K$, *або для кожного іншого розв'язку* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(g)$ *зі значеннями в* K *виконується нерівність*

$$\inf_{g\in G} \|\mathbf{z}(g) - \mathbf{u}(g)\|_E \geq \rho,$$

де ρ — додатна стала, залежна тільки від $\mathbf{z}$.

Означення 5. *Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15) називається сильно відокремленим на множині $G \times K$, якщо*

$$\delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$.

Очевидно, що кожний сильно відокремлений на множині $G \times K$ розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15) є відокремленим на множині $G \times K$ розв'язком цього рівняння. Однак відокремлений на множині $G \times K$ розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15) може не бути сильно відокремленим на множині $G \times K$ розв'язком цього рівняння (відповідний приклад побудовано у [5] у випадку $G = \mathbb{Z}$).

Застосування функціонала δ до дослідження нелінійного рівняння (15) та аналогічного лінійного рівняння наведемо в наступних пунктах.

Аналогічні функціонали для дослідження нелінійних майже періодичних рівнянь

$$x(t+1) = f(t, x(t)),$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R},$$

і

$$f(t, x(t)) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

з неперервним відображенням $f : \mathbb{R} \times \Omega \to E$, де Ω — довільна область простору E, використовувалися автором у [6–8].

5. Основний результат. Наведемо умови існування майже періодичних розв'язків рівняння (15), в яких на відміну від відомої теореми Амеріо про майже періодичні розв'язки нелінійних диференціальних рівнянь (див. [9, 10]) не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (15).

Нехай Λ — обмежена підмножина простору E. Визначимо діаметр $\mathrm{diam}\ \Lambda$ множини Λ рівністю

$$\mathrm{diam}\ \Lambda = \sup\{\|x - y\|_E : x, y \in \Lambda\}.$$

Теорема 1. *Якщо для розв'язку $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15), де $K \in \mathcal{K}$, $\mathrm{diam}\ R(\mathbf{z}) \neq 0$ і*

$$\delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) > 0 \tag{21}$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$, то цей розв'язок є майже періодичним.

Зауваження 2. Розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15), для якого $\mathrm{diam}\ R(\mathbf{z}) = 0$, є сталим і, отже, майже періодичним.

Доведення. Припустимо, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15) не є елементом простору $\mathfrak{B}$. Тоді існує послідовність $\left(S_{h_p}\mathbf{z}\right)_{p\geq 1}$ (тут $h_p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 1$), для якої кожна підпослідовність $\left(S_{k_p}\mathbf{z}\right)_{p\geq 1}$ буде розбіжною. Отже, для деяких послідовностей $(p_r)_{r\geq 1}$, $(q_r)_{r\geq 1}$ натуральних чисел і числа $\gamma \in (0, \mathrm{diam}\, R(\mathbf{z}))$

$$\left\|S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{q_r}}\mathbf{z}\right\|_{\mathfrak{M}} \geq \gamma, \quad r \geq 1. \tag{22}$$

Зазначимо, що $\operatorname{diam} R(\mathbf{z}) \leq r(\mathbf{z}, K)$. Не обмежуючи загальності можна вважати, що послідовність $\left(S_{k_p}\mathbf{F}S_{-k_p}\mathbf{x}\right)_{p\geq 1}$ збігається рівномірно на $\mathfrak{D}_K$. Тоді

$$\lim_{p,q\to\infty} \sup_{\mathbf{x}\in\mathfrak{D}_K} \left\|S_{k_p}\mathbf{F}S_{-k_p}\mathbf{x} - S_{k_q}\mathbf{F}S_{-k_q}\mathbf{x}\right\|_{\mathfrak{M}} = 0. \tag{23}$$

Розглянемо елементи

$$\mathbf{y}_r = S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{q_r}}\mathbf{z}, \quad r \geq 1,$$

простору $\mathfrak{M}$. Очевидно, що

$$\mathbf{y}_r \in \Omega(S_{k_{q_r}}\mathbf{z}, K, \gamma), \quad r \geq 1. \tag{24}$$

Покажемо, що

$$\delta(\mathbf{z}, K, \gamma) = 0. \tag{25}$$

Завдяки (19), (24) та тому, що

$$S_{k_{p_r}}\mathbf{F}\mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad r \geq 1,$$

для кожного $r \geq 1$ виконуються співвідношення

$$\begin{aligned}
\delta(\mathbf{z}, K, \gamma) &= \inf_{\mathbf{y}\in\Omega(\mathbf{z},K,\gamma)} \|\mathbf{F}(\mathbf{z}+\mathbf{y})\|_{\mathfrak{M}} = \inf_{\mathbf{y}\in\Omega(S_{k_{q_r}}\mathbf{z},K,\gamma)} \|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}(\mathbf{z}+S_{-k_{q_r}}\mathbf{y})\|_{\mathfrak{M}} = \\
&= \inf_{\mathbf{y}\in\Omega(S_{k_{q_r}}\mathbf{z},K,\gamma)} \|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}S_{-k_{q_r}}(S_{k_{q_r}}\mathbf{z}+\mathbf{y})\|_{\mathfrak{M}} \leq \|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}S_{-k_{q_r}}(S_{k_{q_r}}\mathbf{z}+\mathbf{y}_r)\|_{\mathfrak{M}} = \\
&= \|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}S_{-k_{q_r}}(S_{k_{q_r}}\mathbf{z}+(S_{k_{p_r}}\mathbf{z}-S_{k_{q_r}}\mathbf{z}))\|_{\mathfrak{M}} = \|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}S_{-k_{q_r}}S_{k_{p_r}}\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} \leq \\
&\leq \|S_{k_{p_r}}\mathbf{F}S_{-k_{p_r}}S_{k_{p_r}}\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} + \|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}S_{-k_{q_r}}S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{p_r}}\mathbf{F}S_{-k_{p_r}}S_{k_{p_r}}\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} = \\
&= \|S_{k_{p_r}}\mathbf{F}\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} + \|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}S_{-k_{q_r}}S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{p_r}}\mathbf{F}S_{-k_{p_r}}S_{k_{p_r}}\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} = \\
&= \|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}S_{-k_{q_r}}S_{k_{p_r}}\mathbf{z} - S_{k_{p_r}}\mathbf{F}S_{-k_{p_r}}S_{k_{p_r}}\mathbf{z}\|_{\mathfrak{M}} \leq \\
&\leq \sup_{\mathbf{x}\in\mathfrak{D}_K} \left\|S_{k_{q_r}}\mathbf{F}S_{-k_{q_r}}\mathbf{x} - S_{k_{p_r}}\mathbf{F}S_{-k_{p_r}}\mathbf{x}\right\|_{\mathfrak{M}},
\end{aligned}$$

з яких на підставі (23) випливає співвідношення (25), що суперечить (21).

Отже, припущення, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15) не є майже періодичним, є хибним.

Теорему 1 доведено.

Зазначимо, що виконання співвідношення (21) означає, що розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15) є сильно відокремленим на множині $G \times K$. Тому цю теорему можна сформулювати в наступному вигляді.

Теорема 2. *Нехай K належить $\mathcal{K}$. Якщо розв'язок $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\mathbf{F}, K)$ рівняння (15) сильно відокремлений на множині $G \times K$, то цей розв'язок є майже періодичним.*

Зауваження 3. Умова сильної відокремленості обмеженого розв'язку рівняння (15) не є необхідною (а є лише достатньою) умовою належності цього розв'язку простору $\mathfrak{B}$. Розв'язок рівняння (15) може бути майже періодичним і не бути відокремленим на множині $G \times K$, що підтверджується різницевим рівнянням

$$x_{n+1} = x_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Випадок лінійного рівняння (15). Розглянемо рівняння

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{h}, \tag{26}$$

де $\mathbf{A} : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — лінійний неперервний і майже періодичний у сенсі означення 3 оператор (цей оператор може не бути майже періодичним за Бохнером) і $\mathbf{h} \in \mathfrak{B}$.

Оскільки рівняння (26) є окремим випадком рівняння (15) (оператор $\mathbf{F}$ визначається формулою $\mathbf{Fx} = \mathbf{Ax} - \mathbf{h}$, $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$), то на підставі теореми 2 справджується наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай K належить $\mathcal{K}$. Сильно відокремлений на множині $G \times K$ розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (26) є майже періодичним.*

Наведемо умови сильної відокремленості на $G \times K$ розв'язку $\mathbf{z}$ рівняння (26).

Розглянемо лінійне однорідне рівняння

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \tag{27}$$

що відповідає рівнянню (26).

Теорема 4. *Нехай K належить $\mathcal{K}$. Розв'язок $\mathbf{z}$ рівняння (26) зі значеннями в K є сильно відокремленим на $G \times K$ тоді і тільки тоді, коли нульовий розв'язок $\mathbf{0}$ рівняння (27) є сильно відокремленим на $G \times K$.*

Доведення. Оскільки $\mathbf{z}$ — розв'язок рівняння (26), то кожний елемент $\mathbf{u}$ простору $\mathfrak{M}$, для якого

$$\mathbf{A}(\mathbf{z} + \mathbf{u}) = \mathbf{h},$$

є розв'язком рівняння (27), тобто

$$\mathbf{Au} = \mathbf{0},$$

і навпаки. Тому якщо використати означення множини $\Omega(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ (див. (17) і (18)) та означення функціонала $\delta(\mathbf{x}^*, K, \varepsilon)$ (див. (19)), то у випадку лінійних рівнянь отримаємо, що для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$ (див. (16))

$$\inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{z}, K, \varepsilon)} \|\mathbf{A}(\mathbf{z} + \mathbf{y}) - \mathbf{h}\|_{\mathfrak{M}} = \inf_{\mathbf{y} \in \Omega(\mathbf{0}, K, \varepsilon)} \|\mathbf{Ay}\|_{\mathfrak{M}} > 0,$$

тобто для всіх $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z}, K))$

$$\delta(\mathbf{z}, K, \varepsilon) = \delta(\mathbf{0}, K, \varepsilon) > 0.$$

Звідси випливає твердження теореми.

Теорему 4 доведено.

Теорема 5. *Якщо*

$$\inf_{\mathbf{x}\in\mathfrak{S},\ \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}=1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} > 0, \tag{28}$$

то кожний розв'язок $\mathbf{z} \in \mathfrak{S}$ *рівняння (26) є майже періодичним.*

Доведення. Оскільки $\mathbf{z} \in \mathfrak{S}$, то $\overline{R(\mathbf{z})} \subset K$ для деякого $K \in \mathcal{K}$. Тому на підставі (28) та лінійності оператора $\mathbf{A}$

$$\inf_{\mathbf{x}\in\mathfrak{S},\ \overline{R(\mathbf{x})}\subset K,\ \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}=\varepsilon} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (\mu(\mathbf{z},K), r(\mathbf{z},K)]$, де $\mu(\mathbf{z},K) = \inf\left\{\|x-y\|_E : x \in \overline{R(\mathbf{x}^*)},\ y \in K\right\}$, і, отже,

$$\inf_{\mathbf{x}\in\mathfrak{S},\ \overline{R(\mathbf{x})}\subset K,\ \|\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}}\geq\varepsilon} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathfrak{M}} > 0$$

для кожного $\varepsilon \in (0, r(\mathbf{z},K)]$. Завдяки останньому співвідношенню нульовий розв'язок $\mathbf{0}$ рівняння (27) є сильно відокремленим на $G \times K$. Тому на підставі теореми 4 розв'язок $\mathbf{z} \in \mathfrak{S}$ рівняння (26) також є сильно відокремленим на $G \times K$.

Отже, за теоремою 3 розв'язок $\mathbf{z} \in \mathfrak{S}$ рівняння (26) є майже періодичним.

Теорему 5 доведено.

Зауваження 4. Множина майже періодичних у сенсі означення 3 рівнянь, до яких застосовні теореми з пунктів 5 та 6, не є порожньою. Елементом цієї множини є, наприклад, рівняння

$$\mathbf{x} + C\mathbf{x} = \mathbf{h}, \tag{29}$$

де $C : \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E) \to \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ — лінійний неперервний оператор, що визначається формулою (11), а $\mathbf{h}$ — майже періодичний елемент простору $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$.

Очевидно, що оператор $I + C$, де $I : \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E) \to \mathfrak{M}(\mathbb{Z}, E)$ — одиничний оператор, є майже періодичним у сенсі означення 3 і не є майже періодичним за Бохнером.

Оскільки $\mathbf{h} \in \mathfrak{S}$ і $C\mathbf{y} = \mathbf{0}$ для кожного $\mathbf{y} \in \mathfrak{S}$, то рівняння (29) у просторі $\mathfrak{S}$ має єдиний розв'язок $\mathbf{x}$, що збігається з $\mathbf{h}$ і є сильно відокремленим (на підставі означення 5 та означення функціонала Δ (див. (19))) на кожній множині $\mathbb{Z}\times K$, де K — довільна компактна множина в E, для якої $\overline{R(\mathbf{h})} \subset K$.

На завершення зазначимо, що наведені умови існування майже періодичних розв'язків рівнянь (15) і (26) є новими навіть у випадку $G = \mathbb{Z}$. На відміну від теореми Амеріо в теоремах 1 і 2 не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (15) і банаховий простір E може бути нескінченновимірним. Аналогічно в теоремах 3 і 5 також не використовується $\mathcal{H}$-клас рівняння (26), а оператор $\mathbf{A}$ може не бути майже періодичним за Бохнером.

Також зазначимо, що дослідженню майже періодичності розв'язків рівнянь присвячено багато публікацій. Відмітимо лише частину з них. Для звичайних лінійних диференціальних рівнянь перші теореми про майже періодичні розв'язки були доведені Фаваром у роботі [11], а для нелінійних диференціальних рівнянь — Амеріо в роботі [9]. У цих роботах суттєво використовуються $\mathcal{H}$-класи досліджуваних рівнянь, а в [9] використовується також вимога відокремленості обмежених розв'язків рівнянь. Результати Фавара були покращені Е. Мухамадієвим [12, 13]. Узагальненням теорем Мухамадієва присвячено роботи [14–16]. Важливі результати в цьому напрямку також належать Б. М. Левітану [2], Амеріо [17] та В. В. Жикову [18]. Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих та диференціальних рівнянь, а також рівняння (20) без використання $\mathcal{H}$-класів цих рівнянь отримано автором у [5–8].

1. *Bochner S.* Beitrage zur Theorie der fastperiodischen, I Teil. Funktionen einer Variablen // Math. Ann. — 1927. — **96**. — S. 119–147. II Teil. Funktionen mehrerer Variablen // Math. Ann. — 1927. — **96**. — S. 383–409.
2. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. — М.: Гостехиздат, 1953. — 396 с.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977. — 742 с.
4. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965. — 520 с.
5. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 3. — С. 416–425.
6. *Слюсарчук В. Ю.* Умови майже періодичності обмежених розв'язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 1. — С. 118–124.
7. *Слюсарчук В. Ю.* Умови існування майже періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі // Укр. мат. журн. — 2013. — **65**, № 2. — С. 307–312.
8. *Слюсарчук В. Ю.* Критерій існування майже періодичних розв'язків нелінійних рівнянь, що не використовує $\mathcal{H}$-класи цих рівнянь // Буковин. мат. журн. — 2013. — **1**, № 1, 2. — С. 136–138.
9. *Amerio L.* Soluzioni quasiperiodiche, o limital, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati // Ann. mat. pura ed appl. — 1955. — **39**. — P. 97–119.
10. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
11. *Favard J.* Sur les équations différentielles à coefficients presquepériodiques // Acta math. — 1927. — **51**. — P. 31–81.
12. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки. — 1972. — **11**, № 3. — С. 269–274.
13. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1981. — **30**, № 3. — С. 443–460.
14. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб. — 1981. — **116** (158), № 4 (12). — С. 483–501.
15. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб. — 1986. — **130** (172), № 1 (5). — С. 86–104.
16. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки. — 1987. — **42**, № 2. — С. 262–267.
17. *Amerio L.* Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte // Ric. mat. — 1960. — **30**. — P. 288–301.
18. *Жиков В. В.* Доказательство теоремы Фавара о существовании почти-периодического решения в случае произвольного банахова пространства // Мат. заметки. — 1978. — **23**, № 1. — С. 121–126.

Одержано 05.11.13