УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ СТРУКТУРИ МНОЖИНИ НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Т. О. Єрьоміна

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 03056, Київ, просп. Перемоги, 37

We find conditions for a certain class of linear difference-functional equations to have continuous solutions and study properties of such solutions.

Получены условия существования непрерывных решений одного класса систем линейных разностно-функциональных уравнений и исследованы их свойства.

Розглянемо систему лінійних рівнянь вигляду

$$x(qt) = A(t)x(t) + B(t)x(t+1) + F(t), \tag{1}$$

де $t \in \Re^+ = [0, +\infty)$, $A(t), B(t)$ — дійсні $(n \times n)$-матриці, $F(t)$ — дійсний вектор розмірності n, q — деяка дійсна стала, яка поєднує в собі властивості різницевих і q-різницевих (функціональних) рівнянь, що були об'єктом дослідження багатьох математиків (див. [1–7] та наведену там бібліографію). Продовжуючи ці дослідження, в даній статті будемо вивчати питання існування неперервних розв'язків різницево-функціональних рівнянь вигляду (1) зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо систему однорідних рівнянь вигляду

$$x(qt) = Ax(t) + Bx(t+1), \tag{2}$$

де A, B — дійсні сталі $(n \times n)$-матриці, q — деяка дійсна стала. При цьому відносно матриці A припустимо, що її власні значення λ_i, $i = 1, \ldots, n$, задовольняють умови

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad |\lambda_i| \neq 0, 1, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Тоді існує заміна змінних

$$x(t) = Cy(t),$$

де C — деяка стала неособлива $(n \times n)$-матриця, яка приводить систему рівнянь (2) до вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{B}y(t+1), \tag{3}$$

де $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\tilde{B} = C^{-1}BC$.

Розглянемо випадок, коли виконуються такі умови:

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$,

2) $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\tilde{b} = |\tilde{B}| = \max\limits_i \sum_j |\tilde{b}_{ij}|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Справджується така теорема.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови 1, 2. Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при* $t \geq T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{4}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (4) в (3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{5_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{5_i}$$

то ряд (4) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (5_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{6_0}$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n,$ — довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu} = \operatorname{diag}\left(t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}}, t^{\frac{\ln \lambda 2}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln \lambda_n}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} y_{i-1}(q^j t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{6_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Дійсно, оскільки

$$|y_0(t)| \leq |t^v||\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}}|\omega(\tau)| \leq \frac{M}{t^{\left|\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}\right|}},$$

де $M = \max\limits_{\tau}|\omega(\tau)|$, то на підставі ($6_1$) і $\dfrac{\ln\lambda_*}{\ln q} < 0$ отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1}|\tilde{B}|\left|y_0(q^jt+1)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1}\tilde{b}M\frac{1}{(q^jt+1)^{\left|\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}\right|}} \leq$$

$$\leq \frac{M\tilde{b}}{\lambda_*}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^j \leq \frac{M\tilde{b}}{\lambda_*}\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_*}} = \frac{M\tilde{b}}{\lambda_*-1} = M\Delta.$$

Отже, оцінка (7) справджується при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (7) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$y_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty}\Lambda^{-(j+1)}\tilde{B}y_i(q^jt+1), \quad i = 1,2,\ldots, \tag{8}$$

то

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}\left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1}|\tilde{B}|\left|y_i(q^jt+1)\right| \leq \tilde{b}M\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1}\Delta^i \leq$$

$$\leq \frac{M\tilde{b}}{\lambda_*}\frac{\Delta^i}{1-\frac{1}{\lambda_*}} = \frac{M\tilde{b}\Delta^i}{\lambda_*-1} = M\Delta^{i+1}. \tag{9}$$

Отже, ряди (6_i), $i = 1,2,\ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$, для яких виконуються оцінки (7). Із (7) безпосередньо випливає, що ряд (4) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty}|y_i(t)| \leq M\sum_{i=0}^{\infty}\Delta^i \leq \frac{M}{1-\Delta}. \tag{10}$$

Теорему 1 доведено.

Розглянемо тепер систему неоднорідних рівнянь вигляду

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{B}y(t+1) + F(t), \tag{11}$$

де матриці $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, $\tilde{B}$, стала q і вектор-функція $F(t)$ задовольняють такі умови:

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1,\ldots,n$, $0 < q < 1$,

2) $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\tilde{b} = |\tilde{B}| = \max\limits_i \sum\limits_j |\tilde{b}_{ij}|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$,

3) всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \Re$ функціями і $\sup\limits_t |F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Для системи (11) справедливою є така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1–3. Тоді система рівнянь (11) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $\bar{y}(t)$ у вигляді ряду*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t), \tag{12}$$

де $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in \Re^+$ вектор-функції.

Доведення. Підставляючи (12) в (11), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{y}_i(t+1) + F(t). \tag{13}$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ задовольняють системи рівнянь

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda \bar{y}_0(t) + F(t), \tag{14_0}$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda \bar{y}_i(t) + \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{14_i}$$

то ряд (12) буде формальним розв'язком системи рівнянь (11).

Система рівнянь (14_0) має формальний розв'язок у вигляді ряду

$$\bar{y}_0(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} F(q^j t). \tag{15_0}$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (14_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що вони також мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$\bar{y}_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(q^j t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{15_i}$$

Покажемо, що ряди (15_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

де $\tilde{M}'$ — деяка додатна стала. Дійсно, оскільки

$$|\bar{y}_0(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-(j+1)}\right| \left|F\left(q^j t\right)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} |F(q^j t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \tilde{M} \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_*} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^j \leq \frac{\tilde{M}}{\lambda_*} \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_*}} \leq \frac{\tilde{M}}{\lambda * - 1} = \tilde{M}', \tag{17}$$

то на підставі (15_1) отримуємо

$$|\bar{y}_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-(j+1)}\right| |\tilde{B}||\bar{y}_0(q^j t+1)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} |\tilde{B}| \left|\bar{y}_0(q^j t+1)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \tilde{b}\tilde{M}' \leq \frac{\tilde{M}'\tilde{b}}{\lambda_*} \frac{1}{1-\frac{1}{\lambda_*}} = \frac{\tilde{M}'\tilde{b}}{\lambda_*-1} = \tilde{M}'\Delta. \tag{18}$$

Отже, оцінка (18) справджується при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (18) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$\bar{y}_{i+1}(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} \bar{y}_i(q^j t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{19}$$

то

$$|\bar{y}_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left|\Lambda^{-1}\right|^{j+1} |\tilde{B}||\bar{y}_i(q^j t+1)| \leq \tilde{b}\tilde{M}' \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_*}\right)^{j+1} \Delta^i \leq$$

$$\leq \frac{\tilde{M}'\tilde{b}}{\lambda_*} \frac{\Delta^i}{1-\frac{1}{\lambda_*}} = \frac{\tilde{M}'\tilde{b}\Delta^i}{\lambda_*-1} = \tilde{M}'\Delta^{i+1}. \tag{20}$$

Отже, ряди (15_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $\bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (16). Звідси випливає, що ряд (12) рівномірно збігається при всіх $t \in \Re$ до деякої неперервної функції $\bar{y}(t)$, яка задовольняє умову

$$|\bar{y}(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |\bar{y}_i(t)| \leq \tilde{M}' \sum_{i=0}^{\infty} \Delta^i \leq \frac{\tilde{M}'}{1-\Delta}. \tag{21}$$

Теорему 2 доведено.

Дослідимо тепер рівняння (3) у випадку, коли $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$, $t \geq T > 0$.

Теорема 3. *Нехай виконуються такі умови:*

1) $0 < \lambda_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$, *2)* $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{1-\lambda^*} < 1$, *де* $\tilde{b} = |\tilde{B}| = \max\limits_i \sum_j |\tilde{b}_{ij}|$, $\lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ *(*T *— деяка достатньо велика додатна стала) розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежать від довільної неперервної 1-періодичної вектор-функції* $\omega(\tau)$.

Доведення. Покажемо, що система рівнянь (3) має неперервні розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{22}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (22) в (3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{23_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{23_i}$$

то ряд (22) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (23_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega\left(\frac{\ln t}{\ln q}\right), \tag{24_0}$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$, — довільні неперервні 1-періодичні функції,

$$t^{\nu} = \operatorname{diag}\left(t^{\frac{\ln \lambda_1}{\ln q}}, t^{\frac{\ln \lambda_2}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln \lambda_n}{\ln q}}\right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (23_i), $i = 1, 2, \ldots$, можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$y_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \tilde{B} y_{i-1}(q^{-(j+1)} t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{24_i}$$

Покажемо, що при виконанні умов 1, 2 ряди (24_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Дійсно, оскільки $|y_0(t)| \leq |t^v|\,|\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}}|\omega(\tau)| \leq t^{\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}}M$, де $M = \max\limits_{\tau}|\omega(\tau)|$, $\lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1, \ldots, n\}$, то, враховуючи (23_1) і $\dfrac{\ln\lambda_*}{\ln q} < 0$, отримуємо

$$|y_1(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j|\tilde{B}|\left|y_0(q^{-(j+1)}t+1)\right| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j|\tilde{B}|\left(\frac{1}{q^{j+1}}t+1\right)^{\frac{\ln\lambda_*}{\ln q}}M \leq$$

$$\leq M\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\,\tilde{b} \leq \frac{M\tilde{b}}{1-\lambda^*} \leq M\Delta. \tag{26}$$

Отже, оцінка (25) справджується при $i = 1$. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (25) доведено для деякого $i \geq 1$, і покажемо її справедливість для $i+1$. Дійсно, оскільки

$$y_{i+1}(t) = \sum_{j=0}^{\infty}\Lambda^j\tilde{B}y_i(q^{-(j+1)}t+1), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

то

$$|y_{i+1}(t)| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|\Lambda|^j\,|\tilde{B}|\left|y_i(q^{-(j+1)}t+1)\right| \leq M\tilde{b}\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda^*)^j\,\Delta^i \leq \frac{M\tilde{b}\Delta^i}{1-\lambda^*} = M\Delta^{i+1}.$$

Отже, ряди (24_i), $i = 1, 2, \ldots$, рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, для яких виконуються оцінки (25). Із (25) безпосередньо випливає, що ряд (22) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty}|y_i(t)| \leq M\sum_{i=0}^{\infty}\Delta^i \leq \frac{M}{1-\Delta}.$$

Теорему 3 доведено.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння вигляду (11), для якого виконуються умови 1, 2 теореми 3, всі елементи вектор-функції $F(t)$ є неперервними обмеженими при всіх $t \in \Re$ функціями і $\sup\limits_t|F(t)| = \tilde{M} < +\infty$.

Аналогічно тому, як було доведено теорему 2, можна показати, що рівняння (13) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $\bar{y}(t)$, який можна подати у вигляді ряду

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=0}^{\infty}\bar{y}_i(t),$$

в якому функції $\bar{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots$, є розв'язками послідовності рівнянь

$$\bar{y}_0(qt) = \Lambda\bar{y}_0(t) + F(t),$$

$$\bar{y}_i(qt) = \Lambda\bar{y}_i(t) + \tilde{B}\bar{y}_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

і визначаються за допомогою співвідношень

$$\bar{y}_0(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j F\left(q^{-(j+1)}t\right),$$

$$\bar{y}_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^j \tilde{B} \bar{y}_{i-1}(q^{-(j+1)}t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Зауваження. Виконавши в (11) заміну змінних

$$y(t) = z(t) + \bar{y}(t), \tag{27}$$

отримаємо систему рівнянь (3) відносно вектор-функції $z(t)$, для якої справджується теорема 1.

У випадку, коли $\tilde{B} = \tilde{\tilde{B}}(t)$, також мають місце аналогічні результати щодо існування неперервних розв'язків системи рівнянь (11). Наприклад, для системи рівнянь

$$y(qt) = \Lambda y(t) + \tilde{\tilde{B}}(t) y(t+1) + \tilde{F}(t), \tag{28}$$

де матриця $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, q — стала, $\tilde{\tilde{B}}(t) : \Re \to \Re^{n^2}$, $\tilde{F}(t) : \Re \to \Re^n$, має місце наступна теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови:*

1) $\lambda_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$, $t \geq 0$;

2) $\tilde{\Delta} = \dfrac{\tilde{b}^*}{\lambda_* - 1} < 1$;

3) всі елементи вектор-функцій $\tilde{F}(t)$ та $\tilde{\tilde{B}}(t)$ є неперервними й обмеженими функціями при всіх $t \in \Re$ і такими, що $\sup_t |\tilde{F}(t)| = \tilde{M}^* < +\infty$, $\sup_t |\tilde{\tilde{B}}(t)| = \tilde{b}^* < +\infty$.

Тоді система рівнянь (28) має неперервний обмежений при $t \in \Re$ розв'язок $y(t)$ у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t),$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні обмежені при $t \in \Re$ вектор-функції.

Розглянемо тепер однорідну систему рівнянь вигляду (3) при $\lambda_i < 0$, $i = 1, \ldots, n$, у випадках, коли виконуються такі умови:

1) $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, \ldots, n$, $0 < q < 1$,

2) $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, \ldots, n$, $q > 1$.

Покажемо, що така система рівнянь має розв'язки у вигляді ряду

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t), \tag{29}$$

де $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ — деякі неперервні вектор-функції. Дійсно, підставляючи (29) у (3), отримуємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i(qt) = \Lambda \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t) + \tilde{B} \sum_{i=0}^{\infty} y_i(t+1),$$

звідки випливає, що якщо вектор-функції $y_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0(qt) = \Lambda y_0(t), \tag{30_0}$$

$$y_i(qt) = \Lambda y_i(t) + \tilde{B} y_{i-1}(t+1), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{30_i}$$

то ряд (29) буде формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Система рівнянь (30_0) має множину неперервних при $t \geq T > 0$ розв'язків вигляду

$$y_0(t) = t^{\nu} \omega \left(\frac{\ln t}{\ln q} \right), \tag{31_0}$$

де $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \omega_2(\tau), \ldots, \omega_n(\tau))$, $\omega_i(\tau)$, $i = 1, \ldots, n$, — довільні неперервні вектор-функції, що задовольняють умову $\omega_i(\tau + 1) = -\omega_i(\tau)$, і

$$t^{\nu} = \operatorname{diag} \left(t^{\frac{\ln |\lambda_1|}{\ln q}}, t^{\frac{\ln |\lambda_2|}{\ln q}}, \ldots, t^{\frac{\ln |\lambda_n|}{\ln q}} \right).$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (5_i), $i = 1, 2, \ldots,$ можна переконатися, що вони мають формальні розв'язки у вигляді рядів

$$y_i(t) = -\sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-(j+1)} \tilde{B} y_{i-1}(q^j t + 1), \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{31_i}$$

Аналогічно тому, як було доведено теорему 1, можна показати, що при виконанні умови 1 теореми 4 і $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, де $\tilde{b} = |\tilde{B}| = \max\limits_i \sum_j |\tilde{b}_{ij}|$, $\lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}$, ряди ($31_i$), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються до деяких неперервних вектор-функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки

$$|y_i(t)| \leq M \Delta^i, \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{32}$$

Отже, ряди (31_i), $i = 1, 2, \ldots,$ рівномірно збігаються при всіх $t \geq T > 0$ до деяких неперервних функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots,$ для яких виконуються оцінки (32). Із (32) безпосередньо випливає, що ряд (29) рівномірно збігається при всіх $t \geq T > 0$ до деякої неперервної функції $y(t)$, яка задовольняє умову

$$|y(t)| \leq \frac{M}{1 - \Delta}.$$

Тим самим доведено наступну теорему.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови:*
1) $|\lambda_i| > 1, i = 1, \ldots, n, \lambda_i < 0, 0 < q < 1,$
2) $\Delta = \dfrac{\tilde{b}}{\lambda_* - 1} < 1$, *де* $\tilde{b} = |\tilde{B}| = \max\limits_i \sum\limits_j |\tilde{b}_{ij}|, \lambda_* = \min\{|\lambda_i|, i = 1, \ldots, n\}.$

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних обмежених при $t \geq T > 0$ (T — *деяка достатньо велика додатна стала*) *розв'язків* $y(t) = y\left(t, \omega\left(\dfrac{\ln t}{\ln q}\right)\right)$, *що залежать від довільної неперервної вектор-функції* $\omega(\tau)$ *такої, що* $\omega(\tau + 1) = -\omega(\tau)$.

Аналогічно доведенню теореми 3 можна встановити подібний результат для випадку $|\lambda_i| < 1, i = 1, \ldots, n, \lambda_i < 0, q > 1.$

1. *Birkhoff G. D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1911. — **12**. — P. 243 – 284.
2. *Agarwal R. P.* Difference equations and inequalities // Theory, methods and Appl. — Second Ed. — 2000. — 972 p.
3. *Trjitzinsky W. J.* Analytic theory of linear q-difference equations // Theory, Methods and Appl. — 1933. — **61**. — P. 1 – 38.
4. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1972. — 248 с.
5. *Миролюбов А. А., Солдатов М. А.* Линейные неоднородные разностные уравнения. — М.: Наука, 1986. — 128 с.
6. *Пелюх Г. П.* К теории систем линейных разностных уравнений с непрерывным аргументом // Докл. АН. — 2006. — **73**, № 2. — С. 269 – 272.
7. *Пелюх Г. П., Сивак О. А.* Про структуру множини неперервних розв'язків функціонально-різницевих рівнянь з лінійно перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. — 2010. — **13**, № 1. — С. 75 – 95.

Одержано 25.02.14