УДК 517.9

ПРО ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ МАЛИМ ПАРАМЕТРОМ

Н. Л. Денисенко

Нац. техн. ун-т України „КПІ"
Україна, 03056, Київ, пр. Перемоги, 37
e-mail: natalia_den@bigmir.net

We find sufficient conditions for a system of nonlinear differential-functional equation to have a periodic solution, and conduct a study of properties of these solutions.

Установлены достаточные условия существования периодических решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений с малым параметром и линейными отклонениями аргумента, а также исследованы их свойства.

Різні частинні випадки систем диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)),$$

де $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1, k}$, f — деяка вектор-функція розмірності n, досліджувались багатьма математиками, і на сьогодні низку питань їх теорії досить добре вивчено (див. [1–7] і наведену там бібліографію). Наприклад, в [1] достатньо повно досліджено асимптотичні властивості розв'язків лінійного скалярного рівняння ($n = 1$), в [3] одержано достатні умови існування та єдиності обмеженого на всій дійсній осі розв'язку системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, в [4] досліджено питання існування періодичних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійними відхиленнями аргументу та вивчено їх властивості. У даній роботі досліджується існування періодичних розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь із малим параметром та вивчаються їх властивості.

Розглянемо систему нелінійних диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)) + \varepsilon F(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t), \varepsilon) \qquad (1)$$

у випадку, коли $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1, k}$; ε — достатньо малий невід'ємний скалярний параметр; $t \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$; A — дійсна стала $(n \times n)$-матриця; вектор-функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ є неперервними за всіма змінними і T-періодичними по t, тобто

$$f(t + T, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)) \equiv f(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)),$$

$$F(t + T, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t), \varepsilon) \equiv F(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t), \varepsilon).$$

Припустимо, що власні значення a_j, $j = \overline{1, n}$, матриці A задовольняють умову

$$\operatorname{Re} a_j(A) \neq 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

У цьому випадку, як відомо, існує неособлива матриця C, яка зводить матрицю A до вигляду

$$A = C^{-1}\mathrm{diag}\,(A_1, A_2)C,$$

де A_1, A_2 — деякі сталі матриці розмірності $p \times p$ і $(n-p)\times(n-p)$, власні значення яких задовольняють умови

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\, a_j(A_1) < 0, \quad j = 1,\ldots,p, \\ &\mathrm{Re}\, a_j(A_2) > 0, \quad j = p+1,\ldots,n \quad (0 < p \le n). \end{aligned} \tag{2}$$

1. У [5] досліджено питання про існування T-періодичних розв'язків системи рівнянь (1) при $\varepsilon = 0$, тобто системи рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t), x(\lambda_1 t), \ldots, x(\lambda_k t)). \tag{3}$$

Для цього виконується перетворення

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + y(t), \tag{4}$$

де $y(t) \in C^0$, де C^0 — простір неперервних T-періодичних вектор-функцій із нормою $\|y(t)\| = \max_t |y(t)|$. Тоді із (3) безпосередньо випливає, що $x(t)$ визначається єдиним чином за допомогою співвідношення

$$x(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\, y(\tau)\, d\tau, \tag{5}$$

де

$$G(t) = \begin{cases} C^{-1}\mathrm{diag}\,(e^{A_1 t}, 0)\, C & \text{при} \quad t > 0, \\ -C^{-1}\mathrm{diag}\,(0, e^{A_2 t})\, C & \text{при} \quad t < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Неважко показати, що для матричної функції $G(t) = (g_{ij}(t))$ виконуються наступні умови:

а) $G(+0) - G(-0) = E$, де E — одинична матриця розмірності $n \times n$;

б) $|G(t)| \le Ke^{-\alpha|t|}$ при всіх $t \ne 0$, де $K > 0$, $\alpha > 0$ і $|G| = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |g_{ij}|$;

в) $\dot{G} = AG$, $t \ne 0$.

В результаті перетворення (4) система рівнянь (3) набирає вигляду

$$\begin{aligned} y(t) = f\Bigg(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)y(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau))y(\lambda_1\tau)d\tau, \ldots \\ \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))y(\lambda_k\tau)d\tau\Bigg), \end{aligned} \tag{7}$$

де $G(t)$ визначається за допомогою співвідношення (6).

Для системи рівнянь (7) доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) всі власні значення a_j, $j = \overline{1,n}$, матриці A такі, що має місце (2), тобто $\exists\, K > 0$, $\alpha > 0 : |G(t)| \leq Ke^{-\alpha|t|}$ при всіх $t \neq 0$;

2) всі компоненти вектор-функції $f(t, y_0, y_1, \ldots, y_k)$ є неперервними за всіма змінними, T-періодичними по t функціями і $\max_{t\in\mathbb{R}} |f(t, 0, \ldots, 0)| \leq f^* < \infty$;

3) $|f(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k) - f(t, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k)| \leq l \sum_{i=0}^{k} |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i|$, де $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,k}$, $l = \mathrm{const} > 0$;

4) $\dfrac{2Kl(k+1)}{\alpha} < 1$.

Тоді існує єдиний неперервний T-періодичний розв'язок $\gamma = \gamma(t)$ системи рівнянь (7).

Враховуючи теорему 1 і співвідношення (5), приходимо до висновку, що вектор-функція

$$\bar{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\gamma(\tau)\, d\tau$$

є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи (3), тобто системи рівнянь (1) при $\varepsilon = 0$.

2. Перейдемо тепер до дослідження T-періодичних розв'язків системи рівнянь (1) при $\varepsilon \neq 0$.

Виконаємо в системі рівнянь (1) взаємно однозначну заміну змінних

$$x(t) = y(t) + \overline{x}(t), \tag{8}$$

де $\overline{x}(t)$ — T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon = 0$. Тоді дослідження питання про існування T-періодичного розв'язку системи рівнянь (1) зводиться до дослідження існування T-періодичного розв'язку системи рівнянь

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + \varphi(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t)) + \varepsilon\Phi(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t), \varepsilon), \tag{9}$$

де

$$\varphi\left(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t)\right) = f\left(t, y(t) + \overline{x}(t), y(\lambda_1 t) + \overline{x}(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t) + \overline{x}(\lambda_k t)\right) -$$
$$- f\left(t, \overline{x}(t), \overline{x}(\lambda_1 t), \ldots, \overline{x}(\lambda_k t)\right),$$

$$\Phi\left(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t), \varepsilon\right) = F\left(t, y(t) + \overline{x}(t), y(\lambda_1 t) + \overline{x}(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t) + \overline{x}(\lambda_k t), \varepsilon\right).$$

Беручи до уваги умови 2, 3 теореми 1, легко переконатися, що вектор-функція $\varphi(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t))$ є неперервною за всіма змінними, T-періодичною по t, $\varphi(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$ і задовольняє умову Ліпшиця

$$|\varphi(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k) - \varphi(t, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k)| \leq l_1 \sum_{i=0}^{k} |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i|,$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,k}$, $l_1 = \mathrm{const} > 0$.

Векторна функція $\Phi\,(t, y(t), y(\lambda_1 t), \ldots, y(\lambda_k t), \varepsilon)$ також є неперервною за всіма змінними і T-періодичною по t.

Для дослідження питання про існування T-періодичних розв'язків системи рівнянь (9) виконаємо перетворення

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + z(t), \tag{10}$$

де $z(t) \in C^0$, C^0 — простір неперервних на $\mathbb{R}$ T-періодичних вектор-функцій із нормою $\|z(t)\| = \max_t |z(t)|$. Тоді згідно з (10) із (9) безпосередньо випливає, що $y(t)$ визначається єдиним чином за допомогою рівності

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)z(\tau)d\tau, \tag{11}$$

де $G(t)$ визначається співвідношенням (6). В результаті перетворення (10) система рівнянь (9) набирає вигляду

$$z(t) = \varphi\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)z(\tau)d\tau, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1 t-\tau)z(\tau)d\tau, \ldots, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k t-\tau)z(\tau)d\tau\right) +$$

$$+\, \varepsilon\Phi\left(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)z(\tau)d\tau, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1 t-\tau)z(\tau)d\tau, \ldots, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k t-\tau)z(\tau)d\tau, \varepsilon\right)$$

або

$$\begin{aligned} z(t) = \varphi\Bigg(&t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)z(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau))z(\lambda_1\tau)d\tau, \ldots \\ &\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))z(\lambda_k\tau)d\tau\Bigg) + \\ &+ \varepsilon\Phi\Bigg(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)z(\tau)d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau))z(\lambda_1\tau)d\tau, \ldots \\ &\ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau))z(\lambda_k\tau)d\tau, \varepsilon\Bigg), \end{aligned} \tag{12}$$

де $G(t)$ визначається за допомогою співвідношення (6).

Для системи рівнянь (12) має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови*:

1) всі власні значення a_j, $j = \overline{1, n}$, *матриці* A *такі, що має місце (2), тобто* $\exists K > 0$, $\alpha > 0 : |G(t)| \leq K e^{-\alpha|t|}$ *при всіх* $t \neq 0$;

2) всі компоненти вектор-функцій $\varphi(t, y_0, y_1, \ldots, y_k)$, $\Phi(t, y_0, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)$ *є неперервними за всіма змінними,* T*-періодичними по* t *функціями*;

3) $\varphi(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$;

4) $\sup_{t,\varepsilon} |\Phi(t, 0, \ldots, 0, \varepsilon)| \leq \Delta$;

5) $|\varphi(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k) - \varphi(t, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k)| \leq l_1 \sum_{i=0}^{k} |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i|$,

$$|\Phi(t, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_k, \varepsilon) - \Phi(t, \tilde{\tilde{y}}_0, \tilde{\tilde{y}}_1, \ldots, \tilde{\tilde{y}}_k, \varepsilon)| \leq l_2 \sum_{i=0}^{k} |\tilde{y}_i - \tilde{\tilde{y}}_i|,$$

де $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}_i, \tilde{\tilde{y}}_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0, k}$, $l_1 = \mathrm{const} > 0$, $l_2 = \mathrm{const} > 0$;

6) $\dfrac{2K(k+1)(l_1 + \varepsilon l_2)}{\alpha} < 1$.

Тоді існує єдиний неперервний T*-періодичний розв'язок* $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}(t, \varepsilon)$ *системи рівнянь (12) такий, що* $\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{\gamma}(t, \varepsilon) = 0$.

Доведення. Розв'язок системи рівнянь (12) побудуємо за допомогою методу послідовних наближень, які визначимо формулами

$$z_0(t, \varepsilon) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} z_m(t, \varepsilon) = \varphi \Bigg(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) z_{m-1}(\tau, \varepsilon) d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau)) z_{m-1}(\lambda_1 \tau, \varepsilon) d\tau, \ldots \\ \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau)) z_{m-1}(\lambda_k \tau, \varepsilon) d\tau \Bigg) + \\ + \varepsilon \Phi \Bigg(t, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) z_{m-1}(\tau, \varepsilon) d\tau, \lambda_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_1(t-\tau)) z_{m-1}(\lambda_1 \tau, \varepsilon) d\tau, \ldots \\ \ldots, \lambda_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda_k(t-\tau)) z_{m-1}(\lambda_k \tau, \varepsilon) d\tau, \varepsilon \Bigg), \quad m = 1, 2, \ldots . \end{aligned} \qquad (13)$$

Покажемо спочатку, що при всіх $m = 1, 2, \ldots$, $t \in \mathbb{R}$ виконуються співвідношення

$$|z_m(t, \varepsilon) - z_{m-1}(t, \varepsilon)| \leq \varepsilon \Delta \theta^{m-1}, \qquad (14)$$

де

$$\theta := \frac{2K(k+1)(l_1 + \varepsilon l_2)}{\alpha}.$$

Справді, зважаючи на умови теореми, маємо

$$|z_1(t,\varepsilon) - z_0(t,\varepsilon)| \le |\varphi(t,0,\ldots,0) + \varepsilon\Phi(t,0,\ldots,0,\varepsilon)| \le \varepsilon|\Phi(t,0,\ldots,0,\varepsilon)| \le \varepsilon\Delta,$$

тобто при $m = 1$ оцінка (14) має місце. Розмірковуючи за індукцією, припустимо, що оцінку (14) доведено для деякого $m \ge 1$, і покажемо, що вона не зміниться при переході від m до $m+1$. Дійсно, беручи до уваги умови теореми, із (13) одержуємо

$$|z_{m+1}(t,\varepsilon) - z_m(t,\varepsilon)| \le (l_1 + \varepsilon l_2)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)||z_m(\tau,\varepsilon) - z_{m-1}(\tau,\varepsilon)|d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda_i(t-\tau))||z_m(\lambda_i\tau,\varepsilon) - z_{m-1}(\lambda_i\tau,\varepsilon)|d\tau \right) \le$$

$$\le (l_1 + \varepsilon l_2)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\alpha|t-\tau|}\varepsilon\Delta\theta^{m-1}d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|}\varepsilon\Delta\theta^{m-1}d\tau \right) \le$$

$$\le \varepsilon\Delta\theta^{m-1}(l_1 + \varepsilon l_2)K\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t-\tau|}d\tau + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|}d\tau\right) \le$$

$$\le \varepsilon\Delta\theta^{m-1}(l_1 + \varepsilon l_2)K\left(\frac{2}{\alpha} + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{2}{\alpha\lambda_i}\right) =$$

$$= \varepsilon\Delta\theta^{m-1}(l_1 + \varepsilon l_2)K\frac{2(k+1)}{\alpha} = \varepsilon\Delta\theta^m.$$

Цим доведено, що оцінка (14) має місце для довільного $m \ge 1$.

По індукції покажемо, що наближення $z_m(t,\varepsilon)$, $m = 0,1,2,\ldots$, є T-періодичними вектор-функціями по t, тобто

$$z_m(t+T,\varepsilon) = z_m(t,\varepsilon), \quad m = 0,1,\ldots. \tag{15}$$

Дійсно, згідно з умовами теореми маємо $z_0(t+T,\varepsilon) = z_0(t,\varepsilon) \equiv 0$, тобто співвідношення (15) виконується при $m = 0$. Припустимо, що співвідношення (15) доведено для деякого $m \ge 0$, і покажемо, що воно не зміниться при переході від m до $m+1$. Справді, із (13) маємо

$$z_{m+1}(t+T,\varepsilon)=\varphi\left(t+T,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t+T-\tau)z_m(\tau,\varepsilon)d\tau,\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_1(t+T-\tau))z_m(\lambda_1\tau,\varepsilon)d\tau,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\lambda_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_k(t+T-\tau))z_m(\lambda_k\tau,\varepsilon)d\tau\right)+$$

$$+\,\varepsilon\Phi\left(t+T,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t+T-\tau)z_m(\tau,\varepsilon)d\tau,\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_1(t+T-\tau))z_m(\lambda_1\tau,\varepsilon)d\tau,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\lambda_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_k(t+T-\tau))z_m(\lambda_k\tau,\varepsilon)d\tau,\varepsilon\right)=$$

$$=\varphi\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)z_m(s,\varepsilon)ds,\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_1(t-s))z_m(\lambda_1 s,\varepsilon)ds,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\lambda_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_k(t-s))z_m(\lambda_k s,\varepsilon)ds\right)+$$

$$+\,\varepsilon\Phi\left(t,\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-s)z_m(s,\varepsilon)ds,\lambda_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_1(t-s))z_m(\lambda_1 s,\varepsilon)ds,\ldots\right.$$

$$\left.\ldots,\lambda_k\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(\lambda_k(t-s))z_m(\lambda_k s,\varepsilon)ds,\varepsilon\right)=z_{m+1}(t,\varepsilon).$$

Отже, співвідношення (15) виконуються при всіх $m\geq 0$.

Таким чином, всі наближення $z_m(t,\varepsilon)$, $m=0,1,2,\ldots$, мають зміст, є неперервними T-періодичними вектор-функціями і для них справджуються оцінки (14). Враховуючи умову 6 теореми і (14), приходимо до висновку, що ряд

$$\sum_{m=1}^{+\infty}(z_m(t,\varepsilon)-z_{m-1}(t,\varepsilon))$$

рівномірно збігається для довільного $t\in\mathbb{R}$ до деякої неперервної T-періодичної вектор-функції $\widetilde{\gamma}=\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)$, яка є розв'язком системи рівнянь (12) (це легко показати, якщо в (13) перейти до границі при $m\to+\infty$). При цьому

$$|\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)|\leq\sum_{m=1}^{+\infty}|z_m(t,\varepsilon)-z_{m-1}(t,\varepsilon)|\leq\sum_{m=1}^{+\infty}\varepsilon\Delta\theta^{m-1}=\varepsilon\Delta\frac{1}{1-\theta},$$

отже, $\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)=0.$

Покажемо, що система (12) не має інших неперервних T-періодичних розв'язків. Дійсно, нехай існує ще один неперервний T-періодичний розв'язок $\eta(t,\varepsilon)$ системи рівнянь (12) такий, що $\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)\neq\eta(t,\varepsilon)$. Тоді одержуємо

$$|\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)-\eta(t,\varepsilon)|\leq(l_1+\varepsilon l_2)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)||\widetilde{\gamma}(\tau,\varepsilon)-\eta(\tau,\varepsilon)|d\tau+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(\lambda_i(t-\tau))||\widetilde{\gamma}(\lambda_i\tau,\varepsilon)-\eta(\lambda_i\tau,\varepsilon)|d\tau\right)\leq$$

$$\leq(l_1+\varepsilon l_2)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ke^{-\alpha|t-\tau|}|\widetilde{\gamma}(\tau,\varepsilon)-\eta(\tau,\varepsilon)|d\tau+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\int\limits_{-\infty}^{+\infty}Ke^{-\alpha\lambda_i|t-\tau|}|\widetilde{\gamma}(\lambda_i\tau,\varepsilon)-\eta(\lambda_i\tau,\varepsilon)|d\tau\right)\leq$$

$$\leq(l_1+\varepsilon l_2)\frac{2K(k+1)}{\alpha}\max_t|\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)-\eta(t,\varepsilon)|.$$

Отже,

$$\|\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)-\eta(t,\varepsilon)\|\leq\theta\|\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)-\eta(t,\varepsilon)\|.$$

Одержане співвідношення може мати місце лише у випадку, коли $\theta\geq 1$, що суперечить умові 6 теореми. Цим доведено, що вектор-функція $\widetilde{\gamma}(t,\varepsilon)$ є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (12).

Теорему доведено.

Враховуючи теорему 2 і співвідношення (11), знаходимо, що вектор-функція

$$\widetilde{y}(t,\varepsilon)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t-\tau)\widetilde{\gamma}(\tau,\varepsilon)d\tau$$

є єдиним неперервним T-періодичним розв'язком системи рівнянь (1) при $\varepsilon\neq 0$, для якого $\lim_{\varepsilon\to 0}\widetilde{y}(t,\varepsilon)=0$.

Таким чином, враховуючи (8) і теореми 1, 2, приходимо до висновку, що система рівнянь (1) має єдиний неперервний T-періодичний розв'язок

$$\widehat{x}(t,\varepsilon)=\widetilde{y}(t,\varepsilon)+\bar{x}(t)$$

такий, що $\lim_{\varepsilon\to 0}\widehat{x}(t,\varepsilon)=\bar{x}(t)$, де $\bar{x}(t)$ — T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon=0$, а $\widetilde{y}(t,\varepsilon)$ — T-періодичний розв'язок системи рівнянь (1) при $\varepsilon\neq 0$.

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — **77**. — P. 891 – 937.
2. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-differential equation // Ann. pol. math. — 1975. — **31**, № 1. — P. 23 – 41.
3. *Самойленко А. М., Пелюх Г. П.* Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства // Укр. мат. журн. — 1994. — **46**, № 6. — С. 737 – 747.
4. *Денисенко Н. Л.* Періодичні розв'язки систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійними відхиленнями аргументу та їх властивості // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 2. — С. 168 – 179.
5. *Денисенко Н. Л.* Дослідження властивостей розв'язків систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 2009. — 20 с.
6. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.
7. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

Одержано 20.12.13