УДК 517.9+517.95

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ АВТОНОМНИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Я. М. Дрінь

Буковин. держ. фін.-екон. ун-т
e-mail: drin_jaroslav@i.ua

Р. І. Петришин

Чернів. нац. ун-т
Україна, 58012, Чернівці, вул. Коцюбинського, 2

We prove solvability of a Cauchy problem for autonomous quasilinear parabolic pseudodifferential equations with non-smooth symbols and deviating argument by using the step method.

Для автономных квазилинейных параболических псевдодифференциальных уравнений с негладкими символами и с отклонением аргумента методом шагов доказана разрешимость задачи Коши.

Диференціальні рівняння з аргументом, що відхиляється (ДРВА), — це диференціальні рівняння, в які невідома функція і її похідні входять, взагалі кажучи, при різних значеннях аргументу. Такі рівняння часто зустрічаються при описі різних процесів та проблем теорії автоматичного керування, автоматики і телемеханіки, радіолокації, радіонавігації, електрозв'язку, теоретичної кібернетики, ракетної техніки, термоядерного синтезу, біології, економіки і медицини. Окремі рівняння із звичайними похідними з'явилися у працях Кондорса (1771 р.), а систематичне вивчення таких рівнянь почалося у працях А. Д. Мишкіса, Е. М. Райта, Р. Беллмана у зв'язку з потребами прикладних наук (див. [1] і наведену там бібліографію). У праці [2] наведено короткий огляд методів дослідження просторових нелокальних ефектів, що виникають за рахунок запізнення в дифузійних моделях деякої популяції, поміщеної в обмежену або необмежену область. Широке їх застосування сприяло збільшенню інтересу до теорії цих рівнянь, що виявилось у великій кількості опублікованих робіт, присвячених ДРВА. Класичними в області ДРВА стали праці школи українських математиків Ю. О. Митропольського, А. М. Самойленка, М. О. Перестюка.

Для параболічних псевдодиференціальних рівнянь із негладкими символами, визначених С. Д. Ейдельманом і Я. М. Дрінем у [3–5], рівняння з відхиленням аргументу раніше не розглядалися.

1. Постановка задачі. У даній праці методом кроків [1] будується розв'язок квазілінійної задачі Коші

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (Au)(x,t) = f(x,t,u(x,t-h)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > h, \tag{1}$$

$$u(x,t) = u_0(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \le t \le h, \tag{2}$$

де $h > 0$ — число, A — псевдодиференціальний оператор (ПДО) з символом $a : \mathbb{R}^n \to \to \mathbb{R}$, однорідним порядку $\gamma > 0$ і нескінченно диференційовним по σ при $\sigma \neq 0$ (точка $\sigma = 0$ є точкою негладкості символу $a(\sigma)$), f, u_0 — відомі, обмежені і неперервні функції аргументів x, t, u. Смуга $\Pi_{[0,h]} \equiv \{(x,t); x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq h\}$, в якій задано початкову функцію u_0, називається початковою смугою, а гіперплощина $\{(x,h); h > 0$ — число, $x \in \mathbb{R}^n\}$ — початковою гіперплощиною. Якщо у рівнянні (1) і в початковій умові (2) u, f, u_0 вважати вектор-функціями, а символ $a(\sigma)$ — матрицею відповідних розмірів, то отримаємо постановку основної початкової задачі для системи рівнянь із запізненням.

У випадку змінного запізнення $h(t) > 0$ спочатку потрібно задати початкову гіперплощину $\{(x,h_0); x \in \mathbb{R}^n, h_0 > 0$ — стала$\}$ і початкову множину, яка складається з початкової гіперплощини і точок смуги $\Pi_{[t-h(t),h_0]} \equiv \{(x,t); x \in \mathbb{R}^n, t-h(t) < h_0$ при $t > h_0\}$. Для рівняння (1) потрібно знайти розв'язок $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > h_0$, який на початковій множині збігається із заданою початковою функцією $u_0(x,t)$.

Для рівняння (1), де ПДО визначається за негладким символом, така задача з умовою (2) розв'язується вперше.

Сформулюємо умови на символ a і визначимо відповідний ПДО, трактуючи його як гіперсингулярний інтеграл (ГСІ) [6]. Припустимо, що символ $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ задовольняє умову негладкості в нулі, однорідності $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $a(\lambda\sigma) = \lambda^\gamma a(\sigma)$, $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, еліптичності

$$\operatorname{Re} a(\sigma) \geq a_0 > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad |\sigma| = 1, \tag{3}$$

$$|D_\sigma^\chi a(\sigma)| \leq C|\sigma|^{\gamma-|\chi|}, \quad \sigma \neq 0, \quad \gamma > 0. \tag{4}$$

У класі швидко спадних функцій ПДО визначається формулою

$$(Au)(x,t) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\sigma)} a(\sigma) \hat{u}(\sigma,t) d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

$$\hat{u}(\sigma,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\sigma,y)} u(y,t) dy, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0,$$

де символ a задовольняє умови (3), (4).

У праці [6] А. Н. Кочубей трактує ПДО через ГСІ — інтеграл з особливістю, порядок якої вищий за розмірність простору і регуляризований з допомогою скінченних різниць.

Для заданих комплекснозначних обмежених функцій $f \in (\mathbb{R}^n)$, $\Omega \in C(\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$ вираз вигляду [6]

$$\left(D_\Omega^\alpha f\right)(x) = \frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\left(x, \frac{\tilde{h}}{|\tilde{h}|}\right) \frac{(\Delta_{\tilde{h}}^l f)(x)}{|\tilde{h}|^{n+\alpha}} d\tilde{h}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

де $\alpha > 0$, l — натуральне число, $d_{n,l}(\alpha)$ — нормуюча стала, S^{n-1} — одинична сфера в $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\Delta_{\tilde{h}}^l f\right)(x) = \sum_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k f(x - k\tilde{h}),$$

називається ГСІ порядку α з характеристикою Ω. Зв'язок між ПДО і ГСІ детально описано у [6, с. 911 – 914].

2. Метод кроків. Методом кроків зводимо задачу Коші для диференціального рівняння з аргументом, що відхиляється, до задачі Коші для рівняння без відхилення аргументу (цей результат анонсовано в [7]).

Нехай $h < t \leq 2h, x \in \mathbb{R}^n, f(x,t,u_0(x,t-h)) \equiv f_0(x,t,h)$. Тоді $u(x,t-h) = u_0(x,t-h)$ і задача (1), (2) набирає вигляду

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + (Au)(x,t) = f_0(x,t,h), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h < t \leq 2h, \tag{6}$$

$$u(x,t)|_{t=h} = u_0(x,h), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

В образах Фур'є отримаємо таку задачу:

$$\frac{dv(\sigma,t)}{dt} + a(\sigma)v(\sigma,t) = \hat{f}_0(\sigma,t,t-h), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad h < t \leq 2h, \tag{8}$$

$$v(\sigma,t)|_{t=h} = \hat{u}_0(\sigma,h), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Розв'язок задачі (8), (9)

$$v(\sigma,t) = \exp\{-a(\sigma)(t-h)\}\hat{u}_0(\sigma,h) + \int\limits_h^t \exp\{-a(\sigma)(t-\tau)\}\hat{f}(\sigma,\tau,\tau-h)\,d\tau, \tag{10}$$

$\sigma \in \mathbb{R}^n$, $h < t \leq 2h$. Очевидно, що умова (9) виконується, а також

$$v(\sigma,2h) = \exp\{-a(\sigma)h\}\hat{u}_0(\sigma,h) + \int\limits_h^{2h} \exp\{-a(\sigma)(2h-\tau)\}\hat{f}(\sigma,\tau,\tau-h)\,d\tau, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{11}$$

Умова (11) випливає з (10) і є початковим значенням задачі Коші для наступного інтервалу $2h < t \leq 3h$.

Якщо врахувати, що

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma)\}v(t,\sigma)\,d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h < t \leq 2h,$$

$$\hat{f}_0(\sigma,\tau,\tau-h) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(\xi,\tau,h)\exp\{-i(\xi,\sigma)\}\,d\xi, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad h < \tau \leq t,$$

$$\hat{u}_0(\sigma,h) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} u_0(\xi,h)\exp\{-i(\xi,\sigma)\}d\xi, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

то формула для розв'язку задачі Коші (6), (7) набирає вигляду (на інтервалі $kh < t \leq$ $\leq (k+1)h$ позначимо його $u_k(x,t,kh)$)

$$u_1(x,t,h) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-h) u_0(\xi, h) d\xi +$$

$$+ \int\limits_h^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi, \tau, h)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad h < t \leq 2h, \tag{12}$$

а

$$G(x,t) \equiv (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x,\sigma) - a(\sigma)t\} d\sigma, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \tag{13}$$

Позначимо через Π_k смугу $\{x \in \mathbb{R}^n, kh < t \leq (k+1)h, k \in \mathbb{N}\}$. Тоді для $(x,t) \in \Pi_k$ розв'язок задачі Коші (6), (7) визначається формулою

$$u_k(x,t,kh) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-kh) u_{k-1}(\xi, kh) d\xi + \int\limits_{kh}^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-\tau) f_{k-1}(\xi, \tau, h) d\xi. \tag{14}$$

3. Обґрунтування формули для розв'язку задачі Коші. Оскільки символ $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є нескінченно диференційовною функцією по σ при $\sigma \neq 0$, то при $\gamma > 0$ справедливими є оцінки

$$|D_x^\chi G(x,t)| \leq Ct(t^{1/\gamma} + |x|)^{-n-\gamma-|\chi|}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{15}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} G(x,t) \right| \leq C(t^{1/\gamma} + |x|)^{-n-\gamma}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \tag{16}$$

(які для $\gamma > 1$ встановлено в [5], для $\gamma \geq 1$ — в [6], а для $\gamma > 0$ — в [9]), а також рівність

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-y)\, dy = 1, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \tag{17}$$

Рівність (17) випливає із (13) і формули для перетворення Фур'є. Враховуючи (16), із (17) отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial t} G(x-\xi, t-y)\, dy = 0.$$

Збіжність інтегралів (12) – (14) гарантується умовами на символ a, функцію f і оцінками G.

Вивчимо властивості об'ємного потенціалу

$$u_k(x,t,kh) = \int_{kh}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-\tau) f_{k-1}(\xi,\tau)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > kh, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

де $f_k(y,\tau) \equiv f(y,\tau,u_k(y,\tau-h))$. Припустимо, що виконуються такі умови:

$f_1)$ $|f_{k-1}(\xi,\tau)| \le C(\tau-kh)^{-\rho}$, $kh < \tau \le t$, $0 \le \rho < 1$,

$f_2)$ $|f_{k-1}(x,\tau) - f_{k-1}(\xi,\tau)| \le C|x-\xi|^{\lambda}(\tau-kh)^{\rho}$, $kh < \tau \le t$, $0 \le \rho < 1$, $0 < \lambda \le 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Із нерівностей (15) випливає, що інтеграл (18) абсолютно збігається, а також видно, що функція u_k має неперервні похідні по x довільного порядку, меншого за γ, які можна вираховувати диференціюванням безпосередньо під знаком інтеграла.

Існування похідної по t і формули

$$\frac{\partial u_k(x,t,kh)}{\partial t} = \int_{kh}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial G(x-\xi,t-\tau)}{\partial t} [f_{k-1}(\xi,\tau) - f_{k-1}(x,\tau)]\, d\xi + f_{k-1}(x,t),$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t > kh, \tag{19}$$

встановлюється, як у [5, 6], з урахуванням оцінки (16).

Розглянемо дію на об'ємний потенціал (18) ГСІ — оператора D^{α}_{Ω} вигляду (5) у двох випадках: $\alpha < \gamma$ і $\alpha = \gamma$. Нехай α — неціле число, $l \ge [\alpha]+1$. Із (15) випливає, що при $|\tilde{h}| \le (t-\tau)^{1/\gamma}$

$$|(\Delta^l_{\tilde{h}} G)(x-\xi,t-\tau)| \le C|\tilde{h}|^{[\alpha]+1}(t-\tau)\sum_{\nu=0}^{l}[(t-\tau)^{1/\gamma} + |x-\theta_\nu \nu \tilde{h} - \xi|]^{-(n+\gamma+[\alpha]+1)}, \tag{20}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $t > \tau$, $0 < \theta_\nu < 1$. Із (9) при $|\tilde{h}| > (t-\tau)^{1/\gamma}$ отримуємо оцінку

$$|(\Delta^l_{\tilde{h}} G)(x-\xi,t-\tau)| \le C(t-\tau)\sum_{\nu=0}^{l}[(t-\tau)^{1/\gamma} + |x-\theta_\nu \nu h - \xi|]^{-n-\gamma}, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; t > \tau. \tag{21}$$

Використовуючи (20), (21) і теорему Фубіні, переконуємось, що ГСІ $D^{\alpha}_{\Omega} u$ абсолютно збігається і його можна застосовувати під знаком інтеграла по ξ:

$$(D^{\alpha}_{\Omega} u_k)(x,t,kh) = \int_{kh}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_{\Omega}(x,x-\xi,t-\tau) f_{k-1}(\xi,\tau)\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > kh, \tag{22}$$

де $G_{\Omega} \equiv D^{\alpha}_{\Omega} G$, тобто

$$G_{\Omega}(x,z,t-y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\Omega}(x,\sigma) \exp\{i(z,\sigma) - a(\sigma)(t-y)\}\, d\sigma, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \quad z \in \mathbb{R}^n, \;\; t > y.$$

$\tilde{\Omega}$ є символом розглядуваного ГСІ. Збіжність інтеграла (22) гарантується властивостями функції G_Ω і оцінками, аналогічними (15), (16), які є справедливими для G_Ω.

Нехай α — ціле число. Тоді (див. [6, с. 911]), якщо α є парним, то D_Ω^α можна визначити рівністю (5) і ГСІ — оператор D_Ω^α є диференціальним оператором порядку α. Якщо ж α є непарним, то при $l > \alpha$ інтеграл у (5) тотожно дорівнює нулю для довільної функції f. В такому випадку ГСІ визначено лише для парної характеристики Ω формулою (7) із [6, с. 911] з $l = \alpha$. Розглянемо тепер ГСІ порядку $\gamma > 0$. Припустимо, що $\tilde{\Omega}(x,\sigma)$ — нескінченно диференційовний символ по σ при $\sigma \neq 0$ та

$$|D_\sigma^\chi \tilde{\Omega}(x,\sigma)| \le C|\sigma|^{\gamma-|\chi|}, \quad \gamma > 0,$$

$$|D_\sigma^\chi [\tilde{\Omega}(x,\sigma) - \tilde{\Omega}(y,\sigma)]| \le C|x-y|^\lambda |\sigma|^{\gamma-|\chi|}, \quad \gamma > 0, \quad 0 < \lambda \le 1,$$

крім цього, вважаємо, що $\tilde{\Omega}(x,\sigma) \neq 0$ при $\sigma \neq 0$. Якщо число γ є цілим і символ $\tilde{\Omega}$ не є поліномом по σ (а це можливо лише для непарного γ і парної характеристики), то припустимо додатково, що в розкладі за сферичними гармоніками

$$[\tilde{\Omega}(x,\sigma)]^{-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_{2\nu}} C_{2\nu,\mu}(x) Y_{2\nu,\mu}(\sigma), \quad |\sigma| = 1,$$

коефіцієнти $C_{2\nu,\mu}(x) = 0$, якщо $\gamma = n + 2\nu + 2k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Випадок, коли $\tilde{\Omega}$ є поліномом по σ, включається в теорію параболічних диференціальних рівнянь [8] і тому розглядатися не буде.

Теорема 1. *При перерахованих вище умовах ГСІ $D_\Omega^\gamma u_k$ існує в сенсі умовної збіжності*

$$(D_\Omega^\gamma u_k)(x,\cdot) = \lim_{\varepsilon \to 0} (D_{\Omega,\varepsilon}^\gamma u_k)(x,\cdot),$$

де зрізаний ГСІ $(D_{\Omega,\varepsilon}^\gamma u_k)(x,\cdot)$ отримується з формули (5) заміною області інтегрування на $\{\tilde{h} \in \mathbb{R}^n; |\tilde{h}| > \varepsilon, \varepsilon > 0\}$, причому

$$(D_\Omega^\gamma u_k)(x,t,kh) = \int_{kh}^{t} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G_\Omega(x, x-\xi, t-\tau)\,[f_{k-1}(\xi,\tau) - f_{k-1}(x,\tau)]\,d\xi,$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t > kh. \tag{23}$$

Доведення проводиться за такою схемою (див. [6, с. 922, 923]). Замість функції u_k із (18) розглядається вираз

$$u_k^\theta(x,t,kh) \equiv \int_{kh}^{t-\theta} d\tau \int_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-\tau) f_{k-1}(\xi,\tau)\,d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \theta < t - kh.$$

Нерівності (20), (21) забезпечують абсолютну збіжність ГСІ $D^{\gamma}_{\Omega}u_{\theta}$ і можливість застосування D^{γ}_{Ω} до G_{Ω} під знаком інтеграла за формулою

$$(D^{\gamma}_{\Omega}u^{\theta}_{k})(x,t,kh) = \int\limits_{kh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{\Omega}(x, x-\xi, t-\tau) f_{k-1}(\xi,\tau) d\xi, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; 0 < \theta < t - kh. \quad (24)$$

Із формули (17), враховуючи (20), (21) і теорему Фубіні, отримуємо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{\Omega}(x, x-\xi, t-\tau)\, d\xi = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t - \tau > 0, \quad (25)$$

де

$$|G_{\Omega}(x, x-\xi, t-\tau)| \le C|(t-\tau)^{1/\gamma} + |x-\xi||^{-n-\gamma}, \;\; \gamma > 0, \;\; x \in \mathbb{R}^n, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \;\; t > \tau. \quad (26)$$

Остання нерівність забезпечує збіжність інтеграла (25) і доведена в [6] при $\gamma \ge 1$ і в [9] при $\gamma > 0$. Враховуючи (25), формулу (24) можна записати у вигляді

$$(D^{\gamma}_{\Omega}u^{\theta}_{k})(x,t,kh) = \int\limits_{kh}^{t-\theta} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{\Omega}(x, x-\xi, t-\tau)[f_{k-1}(\xi,\tau) - f_{k-1}(x,\tau)]\, d\xi,$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < \theta < t - kh. \quad (27)$$

Позначимо через $\Phi(x,t,kh)$ функцію із правої частини (23). Зауважимо, що інтеграли в (23) збіжні за рахунок оцінки (26) і умов, накладених на функцію f. Тоді із формули (27) отримуємо, що рівномірно по $x \in \mathbb{R}^n$

$$(D^{\gamma}_{\Omega}u_{k})(x,t,kh) = \lim_{\theta \to 0} (D^{\gamma}_{\Omega}u^{\theta}_{k})(x,t,kh) = \Phi(x,t,kh), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad kh < t \le (k+1)h.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай $kh < t \le (k+1)h$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Тоді формулою (14) визначається розв'язок задачі Коші (6), (7).*

Доведення проведемо методом математичної індукції по $k \in \mathbb{N}$. Нехай $k = 1$. На підставі оцінок (15), (16) і умов на $u_0(x,t)$, $f_0(x,t,h)$ інтеграли в (12) рівномірно збігаються для $t \ge h + \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}^n$, де $\varepsilon > 0$ — як завгодно мале число. Отже, функція $u_1(x,t,h)$ є неперервною і обмеженою. Враховуючи (19) і (23), безпосередньо перевіряємо, що (12) задовольняє рівняння (6). Перевіримо виконання початкової умови (7). Розглянемо спочатку другий доданок із (12):

$$u^2_1(x,t,h) = \int\limits_{h}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi, t-\tau) f_0(\xi,\tau,h)\, d\xi, \quad h < t \le 2h, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Очевидно, що

$$\lim_{t\to h+0} u_1^2(x,t,h) = 0.$$

Розглянемо перший доданок із (12), який за допомогою (17) запишемо у вигляді різниці

$$u^1(x,t,h) - u_0(x,h) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} G(x-\xi,t-h)(u_0(\xi,h) - u_0(x,h))\,d\xi,$$

де $h < t < 2h$, $x \in \mathbb{R}^n$, і виконаємо заміну просторових змінних $z_i = (\xi_i - x_i)\tilde{t}^{-1/\gamma}$, $1 \le i \le n$, $\tilde{t} = t - h$. Тоді, враховуючи (13), отримуємо

$$u_1^1(x,t,h) - u_0(x,h) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(z,\sigma) - a(\sigma)\} \right\} d\sigma (u_0(x + z\tilde{t}^{1/\gamma}, h) - u_0(x,h))\,dz, \tag{28}$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad h < t \le 2h,$$

де оцінка (15) забезпечує рівномірну збіжність інтеграла по z. Із (28) одержуємо

$$|u_1^1(x,t,h) - u_0(x,h)| \le \left| \int\limits_{|z|\le N} G(z)(u_0(x + z\tilde{t}^{1/\gamma}, h) - u_0(x,h))\,dz \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_{|z|\ge N} G(z)(u_0(x + z\tilde{t}^{1/\gamma}, h) - u_0(x,h))\,dz \right| \equiv I_1 + I_2.$$

Із обмеженості початкової функції u_0 випливає, що існує таке число $M > 0$, що $|u_0(x + z\tilde{t}^{1/\gamma}, h) - u_0(x,h)| \le M$, $x \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, $0 \le \tilde{t} \le h$. Нехай $\varepsilon > 0$ — як завгодно мале число. Можна знайти настільки велике $N > 0$, що із збіжності інтеграла (28) по z випливає

$$|I_2| \le M \int\limits_{|z|\ge N} |G(z)|\,dz \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Із неперервності функції $u_0(x,h)$ випливає, що при всіх $\tilde{t} = t - h > 0$, близьких до нуля, і при всіх $|z| \le N$

$$|u_0(x + z\tilde{t}^{1/\gamma}, h) - u_0(x,h)| \le \frac{\varepsilon}{2c},$$

де $c = \displaystyle\int_{|z|\le N} |G(z)|\,dz$. Тоді

$$I_1 \le c|u_0(x + zt^{1/\gamma}, h) - u_0(x,h)| \le c\frac{\varepsilon}{2c} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для всіх $t > h$, достатньо близьких до h, $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_1^1(x,t,h) - u_0(x,h)| \le I_1 + I_2 \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ є довільним, то звідси випливає, що

$$\lim_{t \to h+0} u_1(x,t,h) = \lim_{t \to h+0} u_1^1(x,t,h) = u_0(x,h),$$

бо $\lim_{t \to h+0} u_2(x,t,h) = 0$.

Методом математичної індукції доводиться, що $\lim_{t \to h+0} u_k(x,t,h) = u_{k-1}(x,h)$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. Даний результат залишається правильним, якщо в (1) $(Au)(x,t) \equiv \equiv (A_0 u)(x,t) + \sum_{k=1}^{m} (A_k u)(x,t)$, де A_k — ПДО з символами a_k: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $0 \le k \le m$, однорідними порядків $\gamma_k > 0$, $0 \le k \le m$, таких, що $\gamma_0 > \gamma_1 > \ldots > \gamma_m$, нескінченно диференційовні по $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, головний символ a_0 задовольняє умову (3), решта символів задовольняють умову (4), або з символами, залежними від часової змінної $t > 0$ і просторових змінних $x \in \mathbb{R}^n$ [6].

Зауваження 2. Результат залишається правильним для системи параболічних псевдодиференціальних рівнянь вигляду (1) з умовою вигляду (2).

1. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.
2. *Гурли А. С., Соу Дж. В.-Х., Ву Дж. Х.* Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика // Совр. математика. Фундам. направления. — 2003. — **1**. — С. 84–120.
3. *Эйдельман С. Д., Дрінь Я. М.* Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений // Приближенные методы математического анализа. — Киев: Изд-во КГПИ им. А. М. Горького, 1974. — С. 60–69.
4. *Дрінь Я. М.* Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — № 1. — С. 19–21.
5. *Дринь Я. М.* Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1977. — № 3. — С. 198–203.
6. *Кочубей А. Н.* Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1988. — **52**, № 5. — С. 909–934.
7. *Дрінь Я. М.* Задача Коші для квазілінійних систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь з відхиленням аргумента // Матеріали Всеукр. наук. конф. „Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці". — Чернівці, 2012. — С. 70.
8. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. — М.: Наука, 1964. — 444 с.
9. *Городецький В. В., Дрінь Я. М.* Дослідження поведінки осцилюючих інтегралів // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика: зб. наук. пр. — 2011. — **1**, № 3. — С. 13–18.

Одержано 12.12.12