УДК 517.962.2

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Г. П. Пелюх

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, вул. Терещенківська, 3

О. А. Сивак

Нац. техн. ун-т України „КПІ”
Україна, 03057, просп. Перемоги, 37

For a system of nonlinear functional equations, we establish conditions for existence of continuous T-periodic solutions, and a method for their construction has been investigated.

Получены условия существования непрерывных T-периодических решений систем нелинейных функциональных уравнений и разработан метод их построения.

У цій роботі досліджуються питання існування і єдиності неперервних періодичних розв'язків систем нелінійних функціональних рівнянь вигляду

$$x(t) = F(t, x(q_1 t + f_1(t, x(t))), \ldots, x(q_k t + f_k(t, x(t)))), \tag{1}$$

де $F : R \times R^n \times \ldots \times R^n \to R^n$, $q_i = \text{const} \neq 0$, $f_i : R \times R^n \to R$, $i = 1, \ldots, k$. Такі системи вивчалися багатьма математиками (див. [1–3] і наведену в них бібліографію) і на даний час ряд важливих питань (в тому числі питання існування та єдиності періодичних розв'язків) їх теорії досить добре досліджено [4–7]. Проте існують широкі класи нелінійних функціональних рівнянь, для яких невідомими є навіть умови існування періодичних розв'язків. Саме такі умови для системи рівнянь (1) встановлено в наступній теоремі, яка є основним результатом даної роботи.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) q_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, — цілі додатні числа;

2) вектор-функція $F(t, x^1, \ldots, x^k)$ і функції $f_i(t, x)$, $i = 1, \ldots, k$, є неперервними при всіх $t \in R$, $x^i \in R^n$, $i = 1, \ldots, k$, $x \in R^n$, T-періодичними по t і має місце співвідношення

$$\sup_{t \in R,\ x^i \in R^n,\ i=\overline{1,k}} |F(t, x^1, \ldots, x^k)| = M < \infty;$$

3) вектор-функція $F(t, x^1, \ldots, x^k)$ і функції $f_i(t, x)$, $i = 1, \ldots, k$, задовольняють умови

$$|F(\bar{t}, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k) - F(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^1, \ldots, \bar{\bar{x}}^k)| \leq L_0 |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + \sum_{i=1}^{k} L_i |\bar{x}^i - \bar{\bar{x}}^i|,$$

$$|f_i(\bar{t}, \bar{x}) - f_i(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}})| \leq l_i' |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l_i'' |\bar{x} - \bar{\bar{x}}|, \quad i = 1, \ldots, k,$$

де L_i, $i = \overline{0,k}$, $l_i^{'}$, $l_i^{''}$, $i = \overline{1,k}$, *— деякі додатні сталі,* $(\bar{t}, \bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^k)$, $(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}^1, \ldots, \bar{\bar{x}}^k) \in$ $\in R \times R^{kn}$;

4) при достатньо малих L_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, $l_i^{'}$, $l_i^{''}$, $i = \overline{1,k}$, *виконуються співвідношення*

$$\frac{L_0}{l} + L^*(q + l^* + l^* l) \leq 1, \quad L^* + l l^* L^* = \Delta < 1,$$

де $L^* = \sum_{i=1}^{k} L_i$, $l^* = \max_i\{l_i^{'}, l_i^{''}\}$, $q = \max_i\{q_i\}$, $l > 0$.

Тоді система рівнянь (1) має єдиний неперервний T*-періодичний розв'язок, що задовольняє умову*

$$|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}}) \leq l|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|,$$

де $\bar{t}, \bar{\bar{t}} \in R$.

Доведення. Позначимо через C^0 множину неперервних і T-періодичних вектор-функцій $x(t)$. За допомогою співвідношення

$$\rho(x(t), y(t)) = \|x(t) - y(t)\| = \max_{t \in [0,T]} |x(t) - y(t)|$$

введемо в C^0 метрику ρ. Тоді, очевидно, множина вектор-функцій C^0 із метрикою ρ є повним метричним простором.

У просторі C^0 виділимо множину $C^{0,l}$ вектор-функцій $x(t)$, які задовольняють умови

$$|x(t)| \leq M, \tag{2}$$

$$|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})| \leq l|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|, \tag{3}$$

де $t, \bar{t}, \bar{\bar{t}} \in R$. Легко показати, що множина $C^{0,l}$ є компактною в собі.

На множині $C^{0,l}$ визначимо відображення S:

$$Sx(t) = F\left[t, x(q_1 t + f_1(t, x(t))), \ldots, x(q_k t + f_k(t, x(t)))\right] \tag{4}$$

і доведемо, що воно є відображенням стиску множини $C^{0,l}$ в себе.

Дійсно, нехай $x(t)$ належить $C^{0,l}$. Тоді на підставі (4) та умов 1, 2 вектор-функція $Sx(t)$ є неперервною, задовольняє умову (2) і умову T-періодичності:

$$Sx(t+T) = F[t+T, x(q_1 t + q_1 T + f_1(t+T, x(t+T))), \ldots$$
$$\ldots, x(q_k t + q_k T + f_k(t+T, x(t+T)))] =$$
$$= F[t, x(q_1 t + f_1(t, x(t))), \ldots, x(q_k t + f_k(t, x(t)))] = Sx(t).$$

Крім цього, з огляду на умову 3 отримуємо

$$
\begin{aligned}
|Sx(\bar{t}) - Sx(\bar{\bar{t}})| &\le L_0|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + \sum_{i=1}^{k} L_i |x(q_i\bar{t} + f_i(\bar{t}, x)) - x(q_i\bar{\bar{t}} + f_i(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}))| \le \\
&\le L_0|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + \sum_{i=1}^{k} L_i l |q_i\bar{t} + f_i(\bar{t}, x(\bar{t})) - q_i\bar{\bar{t}} - f_i(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}))| \le \\
&\le L_0|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + \sum_{i=1}^{k} L_i l \left[q_i|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + |f_i(\bar{t}, x(\bar{t})) - f_i(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}))| \right] \le \\
&\le L_0|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l \sum_{i=1}^{k} L_i \left[q_i|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l_i^{'}|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l_i^{''}|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})| \right] \le \\
&\le L_0|\bar{t} - \bar{\bar{t}}| + l \sum_{i=1}^{k} L_i \left(q_i + l_i^{'} + l l_i^{''} \right) |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le \\
&\le \left[L_0 + l \sum_{i=1}^{k} L_i \left(q + l^* + l^* l \right) \right] |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le \\
&\le \left[L_0 + l L^* \left(q + l^* + l^* l \right) \right] |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le \\
&\le l \left[\frac{L_0}{l} + L^*(q + l^* + l^* l) \right] |\bar{t} - \bar{\bar{t}}| \le l|\bar{t} - \bar{\bar{t}}|.
\end{aligned}
$$

Таким чином, $Sx(t)$ належить $C^{0,l}$ і для завершення доведення теореми залишилося показати, що відображення S є відображенням стиску. Дійсно, нехай $x(t)$, $y(t)$ належать $C^{0,l}$. Тоді маємо

$$
\begin{aligned}
|Sx(t) - Sy(t)| &= |F\left[t, x(q_1 t + f_1(t, x(t))), \ldots, x(q_k t + f_k(t, x(t)))\right] - \\
&\quad - F\left[t, y(q_1 t + f_1(t, y(t))), \ldots, y(q_k t + f_k(t, y(t)))\right]| \le \\
&\le \sum_{i=1}^{k} L_i |x(q_i t + f_i(t, x(t))) - y(q_i t + f_i(t, y(t)))| \le \\
&\le \sum_{i=1}^{k} L_i |x(q_i t + f_i(t, x(t))) - x(q_i t + f_i(t, y(t)))| + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{k} L_i |x(q_i t + f_i(t, y(t))) - y(q_i t + f_i(t, y(t)))| \le \\
&\le l \sum_{i=1}^{k} L_i l_i^{''} \|x(t) - y(t)\| + \sum_{i=1}^{k} L_i \|x(t) - y(t)\| \le
\end{aligned}
$$

$$\leq \left(l \sum_{i=1}^{k} L_i l_i'' + \sum_{i=1}^{k} L_i \right) \|x(t) - y(t)\| \leq \Delta \|x(t) - y(t)\|,$$

звідки безпосередньо випливає

$$\rho(Sx(t), Sy(t)) \leq \Delta\rho(x(t), y(t)).$$

Отже, відображення S є відображенням стиску, має єдину нерухому точку $x(t) \in C^{0,l}$ і виконується співвідношення

$$x(t) = \lim_{m\to\infty} S^m x_0(t),$$

де $x_0(t)$ — довільна вектор-функція із $C^{0,l}$.

Теорему доведено.

1. *Kuczma M., Choczewski B., Ger R.* Iterative functional equations. — Cambridge Univ. Press, 1990. — 552 p.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1985. — 216 с.
3. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. — 280 с.
4. *Пелюх Г. П.* К теории линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Докл. АН. — 1994. — **336**, № 4. — С. 451 – 452.
5. *Пелюх Г. П.* О существовании и единственности непрерывных и ограниченных на вещественной оси решений нелинейных функциональных уравнений // Укр. мат. журн. — 2000. — **52**, № 3. — С. 416 – 418.
6. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Про періодичні розв'язки систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Доп. НАН України. —2009. — № 8. — С. 24 – 28.
7. *Пелюх Г. П., Сівак О. А.* Неперервні розв'язки нелінійних функціонально-різницевих рівнянь і їх властивості // Нелінійні коливання. — 2009. — **12**, № 4. — С. 515 – 529.

Одержано 29.10.12