УДК 517.9

ПРО ПОБУДОВУ РОЗВ'ЯЗКУ ВИРОДЖЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ОКОЛІ ІРРЕГУЛЯРНОЇ ОСОБЛИВОЇ ТОЧКИ

О. А. Шепель

Ніжин. пед. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

We investigate the asymptotics of the general solution of a linear system of differential equations with an irregular singular point,

$$x^{-h}B(x)\frac{dy}{dx} = A(x)y,$$

in the case where the boundary matrix of the derivative is singular. Using the Newton diagram method, a general solution of the system is constructed in the case where the regular bundle of matrices $\mathcal{L}(\lambda) = A_0 - \lambda B_0$, has multiple finite and infinite elementary divisors.

Досліджується асимптотика загального розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою вигляду

$$x^{-h}B(x)\frac{dy}{dx} = A(x)y$$

у випадку виродження граничної матриці при похідній. З допомогою методу діаграм Ньютона побудовано загальний розв'язок вказаної системи у випадку, коли регулярна в'язка матриць $\mathcal{L}(\lambda) = A_0 - \lambda B_0$ має кратні скінченний і нескінченний елементарні дільники.

Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою вигляду

$$x^{-h}B(x)\frac{dy(x)}{dx} = A(x)y(x), \tag{1}$$

у якій $y(x)$ — шуканий n-вимірний вектор, $h \in N$, $A(x)$ і $B(x)$ – $(n \times n)$-матриці.

Нехай виконуються такі умови:

1) матриці $A(x)$ та $B(x)$ допускають у секторі $S = \{x_0 <\mid x \mid< \infty,\ \alpha < \arg x < \beta\}$ (α, β — фіксовані дійсні числа) рівномірні асимптотичні розвинення за степенями незалежної змінної x, тобто

$$A(x) = \sum_{k\geq 0} x^{-k}A_k, \quad B(x) = \sum_{k\geq 0} x^{-k}B_k,\ x \to \infty,\ x \in S; \tag{2}$$

2) $\det B_0 = 0$.

Системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою досліджувались у роботах [1–4]. Зокрема, в [1, 2] розглядалась система з одиничною матрицею при похідній.

© О. А. Шепель, 2004

Наявність при похідній матриці $B(x)$, яка вироджується при $x \to \infty$, зумовлює значні труднощі при розв'язанні систем вигляду (1). Можливість побудови її асимптотичних розв'язків залежить від поведінки коренів характеристичного рівняння

$$\det(A_0 - \lambda B_0) = 0 \tag{3}$$

і структури елементарних дільників в'язки матриць

$$\mathcal{L}(\lambda) = (A_0 - \lambda B_0). \tag{4}$$

Вироджена система (1) розглядалась у роботах [3, 4], де побудовано асимптотичні розвинення її розв'язків за дробовими степенями x. При цьому в [3] використовувався метод неозначених коефіцієнтів, а в [4] — інший підхід до асимптотичного аналізу системи (1) — метод діаграм Ньютона. Хоча останній досить широко використовується при побудові розв'язків алгебраїчних рівнянь та диференціальних рівнянь з малим параметром, проте його застосування до систем вигляду (1) в [4] наведено вперше.

У даній роботі з використанням основної ідеї [4] розглянемо особливий випадок, коли матриця при похідній тотожно вироджена, а саме, проведемо асимптотичний аналіз загального розв'язку системи рівнянь вигляду

$$x^{-h} B_0 \frac{dy(x)}{dt} = A_0 y(x) \tag{5}$$

для одновимірного випадку, коли в'язка матриць (4) має по одному скінченному і нескінченному елементарному дільнику.

Як і в [4], вважатимемо, що в'язка матриць $\mathcal{L}(\lambda)$ є регулярною і має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0)^p$ кратності $p > 1$ та нескінченний — кратності q, причому вказані елементарні дільники вичерпують увесь спектр в'язки (4).

Згідно з теорією вироджених систем, розробленою в [5], розв'язки системи рівнянь (5) поділяються на дві групи:

1) розв'язки, що відповідають скінченному елементарному дільнику

$$y(x) = u(x) \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} x^h (\lambda_0 + \lambda(x)) dx\right), \tag{6}$$

2) розв'язки, що відповідають нескінченному елементарному дільнику

$$y(x) = w(x) \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} x^h \xi^{-1}(x) dx\right). \tag{7}$$

Наше завдання полягає у відшуканні вигляду вектор-функцій $u(x),\ w(x)$ і скалярних функцій $\lambda(x)$ та $\xi(x)$.

У роботі [4] доведено, що система (1) має розв'язок вигляду (6) тоді і тільки тоді, коли функція $\lambda(x)$ задовольняє рівняння розгалуження

$$\lambda^p + \sum_{k=p+1}^{\infty} L_{k0}\left[\lambda^k\right] + \sum_{s=1}^{\infty} x^{-s} L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} x^{-s} L_{ks}\left[\lambda^k\right] = 0, \tag{8}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$L_{k0}\left[\lambda^k\right] = \lambda^k (B_0 (HB_0)^{k-1}\varphi, \psi), \quad k \geq 1,$$

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j (P_j^s (H\Gamma)\varphi, \psi), \quad s \geq 1, \tag{9}$$

$$L_{ks}\left[\lambda^k\right] = \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]} \sum_{j=0}^{s-hi} (-1)^j D_0^i \left[\lambda^k\right] (P_{i+k\,,\,j}^{s-hi} (HB; H\Gamma)\varphi, \psi) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\left[\frac{s-h}{h+1}\right]} \sum_{i=1}^{\left[\frac{s-m(h+1)}{h}\right]} \sum_{j=0}^{s-h(i+m)-m} (-1)^{j+m} D_m^i \left[\lambda^k\right] \left(P_{i+k+m\,,\,j}^{s-h(i+m)-m} (HB; H\Gamma)\varphi, \psi\right),$$

$$k \geq 1, \ s \geq 1,$$

де H — напівобернена матриця для матриці $A_0 - \lambda_0 B_0$, φ — власний вектор цієї в'язки матриць, ψ — нуль матриці $(A_0 - \lambda_0 B_0)^*$, спряженої з матрицею $A_0 - \lambda_0 B_0$. Символом $P_{i,j}^k (HB; H\Gamma)$ позначено суму всіх можливих добутків i множників $HB_{r_1}, \ldots, HB_{r_i}$ та j множників $H\Gamma_{s_1}, \ldots, H\Gamma_{s_j}$, $\Gamma_i = A_i - \lambda_0 B_i$, сума індексів яких $r_1 + \ldots + r_i + s_1 + \ldots + s_j = k$, причому індекси r_i — це набори цілих невід'ємних чисел, а індекси s_j — набори лише натуральних чисел. Вираз $P_j^k(H\Gamma)$ є сумою всіх можливих „добутків" j множників $H\Gamma_{s_1}, \ldots, H\Gamma_{s_j}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює k (усі доданки виразів $P_j^s(H\Gamma)$, $P_{i+k,j}^{s-hi}(HB; H\Gamma)$ не містять першого множника H),

$$D_q^p\left[\lambda^k\right] = \Big((p + q - 1) + q - 1\Big) D_{q-1}^p\left[\lambda^k\right] + D\left(D_q^{p-1}\left[\lambda^k\right]\right) + \lambda D_q^p\left[\lambda^{k-1}\right], \tag{10}$$

причому

$$D_0^0\left[\lambda^k\right] = \lambda^k; \quad D_q^p\left[\lambda^0\right] = 0; \quad D_q^0\left[\lambda^k\right] = 0, \qquad q \neq 0; \quad D_{-1}^p\left[\lambda^k\right] = 0, \tag{11}$$

D — оператор диференціювання по змінній x.

Оскільки в системі (5) всі A_i, B_i дорівнюють нулю при $i \geq 1$, рівняння розгалуження (8) для розв'язків першої групи системи (5) набирає вигляду

$$\lambda^p + \sum_{k=1}^{p-1} x^{-(p-k)h} L_{k,(p-k)h}\left[\lambda^k\right] = 0. \tag{12}$$

Використовуючи формули (9) для побудови відповідної діаграми Ньютона, приходимо до висновку, що $\lambda(x) = x^{-h}\lambda_1$, де λ_1 — корінь визначального рівняння

$$\lambda_1^p + \sum_{i=1}^{p-1} D_0^i\left[\lambda_1^{p-i}\right] = 0, \tag{13}$$

і нам потрібно знайти його p різних розв'язків $\lambda_1^{(j)}$, $j=\overline{1,p}$.

Теорема 1. *Функції*

$$\lambda_1^{(j)} = (j-1)x^{-1},\ j=\overline{1,p}, \tag{14}$$

є розв'язками рівняння (13).

Доведення. Виконаємо в рівнянні (13) заміну змінних $\lambda_1=\alpha x^{-1}$, де α — стала. Доведемо методом математичної індукції, що

$$\lambda_1^k+\sum_{i=1}^{k-1}D_0^i\left[\lambda_1^{k-i}\right] = x^{-k}\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i). \tag{15}$$

При $k=2$ рівність є очевидною. Припустимо, що рівність (15) виконується для всіх $k=\overline{2,s}$, тобто

$$\lambda_1^s+\sum_{i=1}^{s-1}D_0^i\left[\lambda_1^{s-i}\right] = x^{-s}\prod_{i=0}^{s-1}(\alpha-i), \tag{16}$$

і доведемо її справедливість при $k=s+1$.

З урахуванням (10) дістанемо

$$\lambda_1^{s+1}+\sum_{i=1}^{s}D_0^i\left[\lambda_1^{s+1-i}\right] = \lambda_1^{s+1}+\sum_{i=1}^{s}\left(\lambda_1 D_0^i\left[\lambda_1^{s-i}\right]+D\left(D_0^{i-1}\left[\lambda_1^{s+1-i}\right]\right)\right).$$

Враховуючи властивості оператора диференціювання $D=\dfrac{d}{dx}$, отримуємо

$$\lambda_1^{s+1}+\sum_{i=1}^{s}D_0^i\left[\lambda_1^{s+1-i}\right] = \lambda\left(\lambda_1^s+\sum_{i=1}^{s}D_0^i\left[\lambda_1^{s-i}\right]\right)+D\left(\sum_{i=1}^{s}D_0^{i-1}\left[\lambda_1^{s+1-i}\right]\right).$$

Виконуючи в останньому доданку заміну $i+1=i$ та беручи до уваги (11), приходимо до виразу

$$\lambda_1^{s+1}+\sum_{i=1}^{s}D_0^i\left[\lambda_1^{s+1-i}\right] = \lambda\left(\lambda_1^s+\sum_{i=1}^{s-1}D_0^i\left[\lambda_1^{s-i}\right]\right)+D\left(\lambda_1^s+\sum_{i=1}^{s-1}D_0^i\left[\lambda_1^{s-i}\right]\right).$$

Враховуючи (16), дістаємо

$$\lambda_1^{s+1}+\sum_{i=1}^{s}D_0^i\left[\lambda_1^{s+1-i}\right] = \lambda_1 x^{-s}\prod_{i=0}^{s-1}(\alpha-i)+D\left(x^{-s}\prod_{i=0}^{s-1}(\alpha-i)\right).$$

Оскільки $\lambda_1=\alpha x^{-1},\ Dx^{-s}=-sx^{-s-1}$, то

$$\lambda_1^{s+1}+\sum_{i=1}^{s}D_0^i\left[\lambda_1^{s+1-i}\right] = \alpha x^{-s-1}\prod_{i=0}^{s-1}(\alpha-i)-sx^{-s-1}\prod_{i=0}^{s-1}(\alpha-i),$$

звідки й отримуємо кінцевий результат:

$$\lambda_1^{s+1} + \sum_{i=1}^{s} D_0^i\big[\lambda_1^{s+1-i}\big] = x^{-s-1} \prod_{i=0}^{s} (\alpha - i). \tag{17}$$

Аналізуючи (15), приходимо до висновку, що корені рівняння (13) мають вигляд (14).

Теорему доведено.

Теорема 2. *Векторна функція $u^{(j)}(x)$, що відповідає кореню $\lambda^{(j)}(x) = (j-1)x^{-h-1}$, $j = \overline{1,p}$, рівняння (12), має вигляд*

$$u^{(j)}(x) = \varphi + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(j-1)!}{(j-k-1)!} x^{-kh-k} (HB_0)^k \varphi, \; j = \overline{1,p}. \tag{18}$$

Доведення. З [4] випливає, що для системи (5)

$$u(x) = \varphi + \sum_{k=1}^{p-1} \lambda^k (HB_0)^k \varphi + \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{s=1}^{k-1} x^{-sh} H\widetilde{L}_{k-s,sh}\big[\lambda^{k-s}\big]\varphi, \tag{19}$$

де

$$H\widetilde{L}_{k-s,sh}\big[\lambda^{k-s}\big] = D_0^s\big[\lambda^{k-s}\big](HB_0)^k.$$

Формулу (19) можна записати у вигляді

$$u(x) = \varphi + \sum_{k=1}^{p-1} \left(\lambda^k + \sum_{s=1}^{k-1} x^{-sh} D_0^s\big[\lambda^{k-s}\big] \right) (HB_0)^k \varphi,$$

і оскільки при $\lambda(x) = \alpha x^{-h-1}$ завдяки рівності (15)

$$\lambda^k + \sum_{s=1}^{k-1} x^{-sh} D_0^s\big[\lambda^{k-s}\big] = x^{-kh-k} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i),$$

то

$$u^{(j)}(x) = \varphi + \sum_{k=1}^{j-1} x^{-kh-k} \prod_{i=0}^{k-1} (j-i)(HB_0)^k \varphi, \; j = \overline{1,p},$$

що збігається з формулою (18).

Теорему доведено.

Слід зазначити, що знайдені за формулою (18) векторні функції $u^{(j)}(x)$ є лінійно незалежними як власні вектори, які відповідають різним власним значенням $\lambda_0 + \lambda^{(j)}(x)$ оператора $A_0 - x^{-h} B_0 \dfrac{d}{dx}$.

Враховуючи (14) та (18), p лінійно незалежних розв'язків системи (5), що відповідають скінченному елементарному дільнику $(\lambda-\lambda_0)^p$ в'язки матриць (4), можна записати у вигляді

$$y^{(j)}(x) = x^{j-1}\left(\varphi+\sum_{k=1}^{j-1}\frac{(j-1)!}{(j-k-1)!}x^{-kh-k}(HB_0)^k\varphi\right)\exp\left(\frac{\lambda_0 x^{h+1}}{h+1}\right),\ j=\overline{1,p}.$$

Перейдемо до відшукання розв'язків системи (5), що відповідають нескінченному елементарному дільнику в'язки матриць (4). Згідно з [4] функція $\xi(x)$ задовольняє рівняння

$$\xi^q+\sum_{k=q+1}^{\infty}\xi^k M_{k0}\left[\xi^k\right]+\sum_{s=1}^{\infty}x^{-s}M_{0s}+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}x^{-s}M_{ks}\left[\xi^k\right]=0, \tag{20}$$

коефіцієнти якого знаходяться за формулами

$$M_{k0}\left[\xi^k\right]=\xi^k\big(A_0(GA_0)^{k-1}\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\big),\ k\geq 1,$$

$$M_{0s}=\sum_{j=1}^{s}(-1)^j\big(P_j^s(G\widetilde{B})\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\big),\ s\geq 1,$$

$$M_{1s}\left[\xi\right]=\sum_{i=0}^{s}(-1)^j\xi\big(P_{1,i}^s(GA;G\widetilde{B})\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\big),\ s\geq 1,$$

$$M_{ks}\left[\xi^k\right]=\sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-hi}(-1)^{i+j}\xi^2\widetilde{D}_0^i\left[\xi^{k-2}\right]\big(P_{k-i\,,\,j}^{s-hi}(GA;G\widetilde{B})\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\big)+$$

$$+\sum_{m=1}^{\left[\frac{s-h}{h+1}\right]}\sum_{i=1}^{\left[\frac{s-m(h+1)}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-h(i+m)-m}(-1)^{i+j}\widetilde{D}_m^i\left[\xi^{k-2}\right]\big(P_{k-m-i\,,\,j}^{s-h(i+m)-m}(GA;G\widetilde{B})\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}\big),$$

$$k\geq 2,\ s\geq 1,$$

де G — напівобернена матриця для матриці $B_0, \widetilde{\varphi}$ — власний вектор матриці B_0, що відповідає її нульовому власному значенню, $\widetilde{\psi}$ — нуль матриці B_0^*, спряженої з матрицею B_0, вирази $P_j^s(G\widetilde{B}),\ P_{i,j}^k(GA;G\widetilde{B})$ утворюються за тим самим правилом, що й аналогічні вирази $P_j^s(H\varGamma),\ P_{i+k,j}^{s-hi}(HB;H\varGamma)$,

$$\widetilde{D}_q^p\left[\xi^k\right]=((p+q-1)+q-1)\xi\widetilde{D}_{q-1}^p\left[\xi^{k-1}\right]+D\big(\xi\widetilde{D}_q^{p-1}\left[\xi^{k-1}\right]\big)+\xi\widetilde{D}_q^p\left[\xi^{k-1}\right],$$

причому

$$\widetilde{D}_0^1\left[\xi\right]=D\xi;\ \widetilde{D}_0^0\left[\xi^k\right]=\xi^k;\ \widetilde{D}_q^p\left[\xi^0\right]=0;\ \widetilde{D}_q^0\left[\xi^k\right]=0,\ q\neq 0;\ \widetilde{D}_{-1}^p\left[\xi^k\right]=0;\ \widetilde{D}_q^p\left[\xi^k\right]=0$$

при $p>k$.

Оскільки всі A_i, B_i дорівнюють нулю при $i \geq 1$, то рівняння розгалуження (20) для розв'язків другої групи системи (5) набирає вигляду

$$\xi^q(x) = 0, \tag{21}$$

тому що всі $M_{ks}\left[\xi^k\right] \equiv 0 \ \forall\, s$ та $k < q$.

Це рівняння має нульовий розв'язок кратності q, тому система (5) не має жодного ненульового розв'язку другої групи.

Аналогічно [5] можна показати, що останнє твердження узгоджується із загальною теорією вироджених систем, згідно з якою всього існує $q-m$ лінійно незалежних розв'язків системи рівнянь (1), де m – довжина жорданового ланцюжка матриці $B(x)$ відносно оператора $\xi\left(A(x) - x^{-h}B(x)\dfrac{d}{dx}\right)$, яка в даному випадку збігається з кратністю нульового кореня рівняння розгалуження (21).

Таким чином, загальний формальний розв'язок системи рівнянь (5) має вигляд

$$y(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j y^{(j)}(x),$$

де c_j — довільні сталі, $y^{(j)}(x)$ — лінійно незалежні розв'язки системи (5), що відповідають скінченному елементарному дільнику в'язки матриць $A_0 - \lambda B_0$.

Отже, справедливою є така теорема.

Теорема 3. *Якщо в'язка матриць $A_0 - \lambda B_0$ має один скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0)^p$ кратності $p > 1$ та нескінченний — кратності $q = n - p$, то загальний розв'язок системи рівнянь (5) має вигляд*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{p} c_j x^{j-1}\left(\varphi + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(j-1)!}{(j-k-1)!} x^{-kh-k}(HB_0)^k \varphi\right) \exp\left(\frac{\lambda_0 x^{h+1}}{h+1}\right).$$

1. *Коддингтон Е. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.

2. *Шкіль М. І., Григоренко В. К.* Про загальний формальний розв'язок для системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою // Допов. АН УРСР. – 1972. – № 1. – С. 29 – 34.

3. *Єлішевич М. А.* Асимптотичне інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння з виродженням та особливою точкою в банаховому просторі // Вісн. Київ. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 1997. – Вип.4. – С. 36 – 41.

4. *Яковець В. П., Шепель О. А.* Побудова загального розв'язку виродженої лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою // Нелінійні коливання. – 2002. – **5,** № 4. – С. 560 – 577.

5. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.

Одержано 17.02.2004