УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Ронто

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3
e-mail: ar@imath.kiev.ua

We obtain exact, in a sence, conditions suffucient for the unique solvability of the Cauchy problem for systems of linear functional-differential equations of a general form. Efficient criteria of the unique solvability of the initial-value problem for systems of equations with deviated argument are given.

Одержано точні у певному сенсі умови, достатні для однозначної розв'язності задачі Коші для систем лінійних функціонально-диференціальних рівнянь загального вигляду. Вказано ефективні ознаки однозначної розв'язності початкової задачі для систем рівнянь з аргументом, що відхиляється.

1. Введение. Целью настоящей работы является получение оптимальных, в определенном смысле, условий, достаточных для однозначной разрешимости начальной задачи вида

$$u_k'(t) = (l_k u)(t) + q_k(t), \qquad t \in [a,b],\ k = 1,2,\ldots,n, \tag{1}$$

$$u_k(\tau) = c_k, \qquad k = 1,2,\ldots,n. \tag{2}$$

Здесь $l_k : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R})$, $k = 1,2,\ldots,n$, — ограниченные линейные операторы, τ — заданная точка из промежутка $[a,b]$, $-\infty < a \le \tau \le b < +\infty$, c_k, $k = 1,2,\ldots,n$, — некоторые вещественные постоянные, а $q_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,n$, — функции, интегрируемые по Лебегу.

Под решением задачи (1), (2), как обычно [1], понимаем абсолютно непрерывную вектор-функцию $u = (u_k)_{k=1}^n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющую свойство (2) и удовлетворяющую соотношению (1) при почти всех t из $[a,b]$ и каждом $k = 1,2,\ldots,n$.

Напомним, что в виде (1) можно представить [1] разнообразные системы дифференциально-разностных и интегро-дифференциальных уравнений, в том числе и таких, в которых преобразования аргумента зависимой переменной могут выводить за пределы исходного промежутка $[a,b]$, и, следовательно, в постановку задачи должны входить так называемые начальные функции [2–4]. Например, задачу об отыскании абсолютно непрерывной функции $u : [a,b] \to \mathbb{R}$, удовлетворяющей соотношениям

$$u'(t) = r(t)\, u(\eta(t)) + g(t), \quad t \in [a,b], \tag{3}$$

$$u(s) = \psi(s) \quad \text{при } s \notin [a,b], \tag{4}$$

где $r : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\eta : [a, b] \to \mathbb{R}$, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $\psi : \mathbb{R} \setminus [a, b] \to \mathbb{R}$ — некоторые заданные функции, естественно записывать в виде уравнения

$$u'(t) = h(t)\, u(\omega(t)) + q(t), \quad t \in [a, b], \tag{5}$$

в котором $h(t) := \chi_\eta(t) r(t)$, $\omega(t) := \eta(t)\chi_\eta(t) + a\,(1 - \chi_\eta(t))$, функция $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ определена формулой

$$q(t) := \begin{cases} g(t) & \text{при } \eta(t) \in [a, b], \\ g(t) + r(t)\psi(\eta(t)) & \text{при } \eta(t) \notin [a, b], \end{cases}$$

а $\chi_\eta : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ — функция, заданная соотношением

$$\chi_\eta(t) := \begin{cases} 1 & \text{при } \eta(t) \in [a, b], \\ 0 & \text{при } \eta(t) \notin [a, b] \end{cases} \tag{6}$$

для $t \in [a, b]$. Для того чтобы уравнение (5) имело смысл, достаточно предполагать интегрируемость функций r и g, измеримость функции η в (3) и непрерывность ψ в (4). Важно отметить, что в (5) функция ω преобразует отрезок $[a, b]$ в себя, благодаря чему там уже не требуется задавать дополнительные условия вида (4).

Уравнение (5) является типичным представителем класса линейных функционально-дифференциальных уравнений вида (1) и имеет многие характерные для таких уравнений свойства, отсутствующие в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, нет однозначного ответа на вопрос о существовании решения уравнения (5) с заданными начальными данными. Например, если $h(t) = 1/(b - a)$ и $\omega(t) = b$ для почти всех t из $[a, b]$, из (5) получаем простейшее уравнение с постоянным коэффициентом

$$u'(t) = \frac{u(b)}{b - a} + q(t), \quad t \in [a, b], \tag{7}$$

которое ни при какой интегрируемой функции $q : [a, b] \to \mathbb{R}$ со свойством

$$\int_a^b q(s)\, ds \neq 0$$

не имеет решений u, удовлетворяющих начальному условию

$$u(a) = 0. \tag{8}$$

Пример задачи (7), (8) показывает, что задача Коши (2) для системы (1) разрешима, вообще говоря, лишь при выполнении тех или иных дополнительных условий. Эффективных условий такого рода в настоящее время весьма мало; можно указать лишь несколько работ, появившихся на протяжении последних лет и посвященных исследованию этого вопроса (см. [5 – 9] и приведенную в них библиографию).

В настоящей статье получены новые конструктивные признаки однозначной разрешимости начальной задачи (1), (2), которые являются в определенном смысле неулучшаемыми, и приведены их приложения к исследованию указанного вопроса для широкого класса систем уравнений с отклоняющимся аргументом.

2. Обозначения. В работе используются следующие обозначения:

1) $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$;

2) $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство непрерывных вектор-функций $u = (u_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$C([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto \max_{k=1,2,\dots,n} \max_{t \in [a,b]} |u_k(t)|\,;$$

3) $L_1([a, b], \mathbb{R}^n)$ — банахово пространство интегрируемых по Лебегу вектор-функций $u = (u_k)_{k=1}^n : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ с нормой

$$L_1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni u \longmapsto \max_{k=1,2,\dots,n} \int\limits_a^b |u_k(t)|\, dt.$$

Здесь и далее $[a, b]$ — некоторый ограниченный интервал вещественной прямой.

3. Теоремы о разрешимости задачи (16), (17). Для сокращения записи предварительно введем некоторые обозначения и определения. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а ϵ_k, $k = 1, 2, \dots, n$, — некоторые заданные числа, каждое из которых равно $1, -1$ либо 0, и

$$\boldsymbol{\epsilon} := \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Для векторов $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$ будем писать $x \geq_{\boldsymbol{\epsilon}} y$ тогда и только тогда, когда $\epsilon_k (x_k - y_k) \geq$ ≥ 0 для каждого $k = 1, 2, \dots, n$. Аналогично можно определить соотношения вида $x >_{\boldsymbol{\epsilon}} y$ и $x =_{\boldsymbol{\epsilon}} y$, из которых последнее означает, что $x_k = y_k$ при всех тех $k = 1, 2, \dots, n$, для которых $\epsilon_k \neq 0$. Иными словами, соотношение $x \geq_{\boldsymbol{\epsilon}} y$ (соответственно, $x >_{\boldsymbol{\epsilon}} y$ или $x =_{\boldsymbol{\epsilon}} y$) имеет место тогда и только тогда, когда все компоненты вектора $D(\boldsymbol{\epsilon})\,(x - y)$, где

$$D(\boldsymbol{\epsilon}) := \operatorname{diag}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n\},$$

неотрицательны (соответственно, положительны или равны нулю).

Естественно предполагать, что имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^n |\epsilon_k| \neq 0, \tag{10}$$

ибо в противном случае введенные выше соотношения тривиальны и не представляют интереса.

Определение 1. *Будем говорить, что оператор $l : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ является $(\boldsymbol{\epsilon},\tau)$-положительным, если условие*

$$(lu)(t)\,\mathrm{sign}\,(t-\tau) \geq_{\boldsymbol{\epsilon}} 0 \quad \textit{при п. в.} \quad t \in [a,b]$$

выполнено для любой непрерывной функции $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей соотношению

$$u(t) \geq_{\boldsymbol{\epsilon}} 0 \quad \textit{при всех} \quad t \in [a,b]. \tag{11}$$

Аналогично, оператор $l : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ назовем $(\boldsymbol{\epsilon},\tau)$-отрицательным, если при каждой непрерывной функции $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ со свойством (11) выполняется условие

$$(lu)(t)\,\mathrm{sign}\,(t-\tau) \leq_{\boldsymbol{\epsilon}} 0 \quad \textit{при п. в.} \quad t \in [a,b].$$

Замечание 1. Из теоремы 2 работы [10] следует, что каждый $(\boldsymbol{\epsilon},\tau)$-положительный относительно некоторого вектора (9) с компонентами $\{\epsilon_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \{1,-1\}$ линейный оператор $l : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ ограничен.

Очевидно, что произвольный оператор $l : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ является как $(0,\tau)$-положительным, так и $(0,\tau)$-отрицательным в смысле определения 1, каково бы ни было τ. Поэтому имеет смысл рассматривать указанные понятия только при условии, что выполнено неравенство (10).

Легко видеть, что в одномерном случае (т. е. когда $n = 1$) свойство, описываемое определением 1, не зависит от выбора ненулевого числа ϵ_1, и в этом случае достаточно говорить, например, об $(1,\tau)$-положительности оператора.

Определение 2. *Векторы $u \in \mathbb{R}^n$, имеющие свойство $u \geq_{\boldsymbol{\epsilon}} 0$, а также функции $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию (11), будем называть $\boldsymbol{\epsilon}$-положительными. Аналогично, любую функцию $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, для которой выполнено условие*

$$u(t) >_{\boldsymbol{\epsilon}} 0 \quad \textit{при всех} \quad t \in [a,b],$$

будем называть строго $\boldsymbol{\epsilon}$-положительной.

Пусть Π — некоторое линейное многообразие непрерывных функций $[a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Будем говорить, что непрерывная функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ строго $\boldsymbol{\epsilon}$-положительна относительно Π, если для произвольной функции $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, принадлежащей множеству Π, можно указать такое число $\beta_u \in [0,+\infty)$, что*

$$-\beta_u y(t) \leq_{\boldsymbol{\epsilon}} u(t) \leq_{\boldsymbol{\epsilon}} \beta_u y(t) \quad \textit{для всех} \quad t \in [a,b]. \tag{12}$$

Несложно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 1. *Непрерывная функция $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ строго $\boldsymbol{\epsilon}$-положительна относительно всего пространства $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда она является строго $\boldsymbol{\epsilon}$-положительной в смысле определения 2.*

Свойство вектор-функции $[a,b] \to \mathbb{R}^n$, описываемое определением 3, является обобщением свойства ее ϵ-положительности. Это подтверждается следующим утверждением.

Предложение 2. *Пусть ϵ — вектор вида (9) с компонентами $\{\epsilon_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \subset \{1, -1, 0\}$, а Π — некоторое линейное многообразие в пространстве $C([a,b], \mathbb{R}^n)$, не состоящее целиком из функций $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, имеющих свойство*

$$u(t) =_{\epsilon} 0 \quad \textit{для всех} \quad t \in [a,b]. \tag{13}$$

Тогда любая строго ϵ-положительная относительно Π непрерывная функция y : $[a,b] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию

$$y(t) \geq_{\epsilon} 0 \quad \textit{для всех} \quad t \in [a,b]. \tag{14}$$

Доказательство. Согласно определению 3, для любой функции $u \in C([a,b], \mathbb{R}^n)$, принадлежащей множеству Π, можно указать такое неотрицательное число β_u, что верно соотношение (12). Хотя бы для одной функции u из Π среди таких чисел имеется строго положительное. Действительно, в противном случае из (12) следует, что

$$0 \leq_{\epsilon} u(t) \leq_{\epsilon} 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [a,b]$$

независимо от выбора u из Π. Иными словами, в этом случае каждая функция u из Π удовлетворяет условию (13), что противоречит сделанному предположению относительно множества Π.

Из (12) следует, что аналогичному неравенству удовлетворяет и функция $-u$:

$$-\beta_u y(t) \leq_{\epsilon} -u(t) \leq_{\epsilon} \beta_u y(t) \quad \text{для всех} \quad t \in [a,b]. \tag{15}$$

Складывая (12) и (15), получаем

$$\beta_u y(t) \geq_{\epsilon} 0, \quad t \in [a,b],$$

откуда вытекает (14), если $\beta_u > 0$.

Замечание 2. Из существования хотя бы одной непрерывной функции $[a,b] \to \mathbb{R}^n$, являющейся строго ϵ-положительной относительно данного линейного многообразия $\Pi \subseteq \subseteq C([a,b], \mathbb{R}^n)$, вытекает, что каждая функция u из Π допускает оценку вида

$$u(t) \leq_{\epsilon} h_u(t), \quad t \in [a,b],$$

где $h_u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ непрерывна и такова, что

$$h_u(t) \geq_{\epsilon} 0, \quad t \in [a,b].$$

В статье рассматривается случай, когда задающий систему уравнений (1) линейный оператор $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a,b], \mathbb{R}^n)$ допускает представление в виде

$$l = p_1 - p_2,$$

где $p_m : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $m = 1,2,$ — некоторые ограниченные линейные операторы, являющиеся $(\boldsymbol{\epsilon},\tau)$-положительными в смысле определения 1 относительно заданной в начальном условии (2) точки τ и некоторого вектора (9). В этом случае задача (1), (2) имеет вид

$$u'(t) = (p_1 u)(t) - (p_2 u)(t) + q(t), \qquad t \in [a,b], \tag{16}$$

$$u(\tau) = c, \tag{17}$$

и для нее имеет место следующая общая теорема об однозначной разрешимости.

Теорема 1. *Пусть задающие функционально-дифференциальное уравнение (16) линейные операторы* $p_m : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$*,* $m = 1,2$*, являются* $(\boldsymbol{\epsilon},\tau)$*-положительными относительно некоторого вектора (9) с компонентами* $\{\boldsymbol{\epsilon}_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \{1,-1,0\}$*, причем*

$$(p_1 u)(t) = 0 \text{ и } (p_2 u)(t) = 0 \text{ для п. в. } t \in [a,b] \tag{18}$$

всегда, когда непрерывная функция $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию (13). Предположим, что найдутся некоторые постоянная* $\alpha \in [0,1)$ *и непрерывная функция* $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$*, удовлетворяющие условию*

$$\int_\tau^t [(p_1 y)(s) + (p_2 y)(s)]\, ds \leq_{\boldsymbol{\epsilon}} \alpha y(t) \quad \text{для всех } t \in [a,b]. \tag{19}$$

Пусть, кроме того, в пространстве $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ *существует некоторое линейное многообразие* Π*, относительно которого функция* $y(\cdot)$ *строго* $\boldsymbol{\epsilon}$*-положительна и для которого имеет место следующее свойство:*

$$\int_\tau^{\cdot} [(p_1 u)(s) - (p_2 u)(s)]\, ds \in \Pi \tag{20}$$

для произвольной непрерывной функции $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$*, не удовлетворяющей условию (13).*

Тогда начальная задача (16), (17) имеет единственное абсолютно непрерывное решение $u_{q,c}$ *для произвольных* $q \in L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ *и* $c \in \mathbb{R}^n$*, и это решение представимо в виде равномерно сходящегося на* $[a,b]$ *функционального ряда*

$$u_{q,c}(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} w_{m;\,q,c}(t), \quad t \in [a,b], \tag{21}$$

где

$$w_{0;\,q,c}(t) := c + \int_\tau^t q(s)\, ds, \qquad t \in [a,b], \tag{22}$$

и

$$w_{m;\,q,c}(t) := \int\limits_{\tau}^{t} \left[(p_1 w_{m-1;\,q,c})(s) - (p_2 w_{m-1;\,q,c})(s)\right] ds, \quad t \in [a,b], \tag{23}$$

при $m = 1, 2, \ldots$. *Кроме того, если последовательность интегрируемых функций* $q_m = (q_{mk})_{k=1}^n : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *и последовательность числовых векторов* $c_m = (c_{mk})_{k=1}^n$, $m = 1, 2, \ldots$, *таковы, что*

$$\lim_{m\to+\infty} \max_{k=1,2,\ldots,n} \int\limits_a^b |q_{mk}(s)|\, ds = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m\to+\infty} \max_{k=1,2,\ldots,n} |c_{mk}| = 0, \tag{24}$$

то определенная формулой (21) последовательность абсолютно непрерывных функций u_{q_m,c_m}, $m = 1, 2, \ldots$, *являющихся решениями соответствующих задач Коши*

$$u'(t) = (p_1 u)(t) - (p_2 u)(t) + q_m(t), \quad t \in [a,b],$$

$$u(\tau) = c_m,$$

равномерно на промежутке $[a,b]$ *сходится к нулю.*

Теорема 1 доказывается в п. 6. Заметим, что из нее очевидным образом вытекает такое важное следствие.

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 однородная задача Коши*

$$u'(t) = (p_1 u)(t) - (p_2 u)(t), \quad t \in [a,b], \tag{25}$$

$$u(\tau) = 0 \tag{26}$$

не имеет нетривиальных решений.

В случаях, когда отыскание линейного многообразия Π с указанными в теореме 1 свойствами затруднительно или нежелательно, можно воспользоваться приводимым ниже видоизменением этой теоремы, в котором упомянутые свойства проверять не нужно, но вместе с тем на функцию y накладывается несколько более жесткое ограничение. Это ограничение, как будет видно из дальнейшего, весьма естественно и не препятствует получению эффективных условий разрешимости начальной задачи для конкретных классов уравнений.

Теорема 2. *Пусть в функционально-дифференциальном уравнении (16) ограниченные линейные операторы* $p_m : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $m = 1, 2$, *являются* $(\boldsymbol{\epsilon},\tau)$-*положительными относительно некоторого вектора (9) с компонентами* $\{\epsilon_k \mid k = 1, 2, \ldots, n\} \subset \{1, -1, 0\}$, *причем из справедливости для непрерывной функции* $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *условия (13) всегда следует (18). Предположим также, что найдутся некоторые постоянная* $\alpha \in [0,1)$ *и строго* $\boldsymbol{\epsilon}$-*положительная непрерывная функция* $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, *для которой выполнено условие (19).*

Тогда имеет место заключение теоремы 1.

Доказательство. Согласно предложению 1, в принятых предположениях функция y строго ϵ-положительна относительно всего пространства $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, включение (20) выполнено для произвольных u при $\Pi := C([a,b],\mathbb{R}^n)$. Поэтому требуемое заключение вытекает из теоремы 1.

Всюду ниже приводятся утверждения, вытекающие именно из теоремы 2.

Следствие 2. *Предположим, что при некотором векторе (9) с компонентами* $\{\epsilon_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \{1,-1\}$ *линейные операторы* $p_m : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $m = 1,2$, *задающие уравнение (16), являются* (ϵ,τ)*-положительными. Пусть, кроме того, при некоторых постоянной* $\alpha \in [0,1)$ *и строго* ϵ*-положительной непрерывной функции* $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *выполнено условие (19).*

Тогда для задачи Коши (16), (17) справедливо заключение теоремы 1.

Доказательство. Поскольку, по предположению, каждое из чисел ϵ_k, $k = 1,2,\ldots,n$, отлично от нуля, функция $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (13) тогда и только тогда, когда она равна тождественно нулю на $[a,b]$. В частности, из (13) всегда следует (18), и поэтому можно применить теорему 2.

Из изложенного выше вытекает, в частности, следующее утверждение об однозначной разрешимости задачи (16), (17), главное условие в котором содержит значения задающих уравнение (16) операторов на некоторых постоянных функциях.

Следствие 3. *Пусть задающие уравнение (16) ограниченные линейные операторы* $p_m : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $m = 1,2$, *являются* (ϵ,τ)*-положительными относительно некоторого вектора (9) с компонентами* $\{\epsilon_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \{1,-1,0\}$, *причем из справедливости для непрерывной функции* $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *условия (13) всегда следует (18). Если, кроме того, выполнено неравенство*

$$\max_{k:\,\epsilon_k\neq 0}\max\left\{-\epsilon_k\int_a^\tau [(p_{1k}\epsilon)(s)+(p_{2k}\epsilon)(s)]\,ds,\ \epsilon_k\int_\tau^b [(p_{1k}\epsilon)(s)+(p_{2k}\epsilon)(s)]\,ds\right\} < 1, \tag{27}$$

то относительно начальной задачи (16), (17) имеет место заключение теоремы 1.

Здесь $p_{mk} : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R})$, $k = 1,2,\ldots,n$, $m = 1,2$, — соответствующие компоненты операторов p_1 и p_2, а $p_{mk}\epsilon$, $k = 1,2,\ldots,n$, $m = 1,2$, — их значения на функции, тождественно равной величине (9) на всем промежутке $[a,b]$. Максимум в (27), очевидно, можно брать и по всем значениям $k = 1,2,\ldots,n$.

Доказательство следствия 3. Положим

$$y(t) := \epsilon, \quad t \in [a,b]. \tag{28}$$

Эта функция, очевидно, непрерывна и ϵ-положительна. Кроме того, существует такая постоянная α, $0 \le \alpha < 1$, при которой для функции (28) выполняется условие (19). Действительно, согласно определению бинарного отношения $\geq_\epsilon$, условие (19) для функции (28) выполнено тогда и только тогда, когда имеет место поточечное и покомпонентное неравенство

$$D(\epsilon)\int_\tau^t [(p_1\epsilon)(s)+(p_2\epsilon)(s)]\,ds \le D(\epsilon)\,\epsilon, \quad t \in [a,b],$$

или, что то же,

$$\max_{k:\,\epsilon_k\neq 0}\max_{t\in[a,b]}\epsilon_k\int_{\tau}^{t}\left[(p_{1k}\epsilon)(s)+(p_{2k}\epsilon)(s)\right]ds\leq\alpha.$$

Заметим теперь, что, ввиду (ϵ,τ)-положительности операторов p_1 и p_2, при всех $k = 1,2,\ldots,n$, $m = 1,2$ и почти всех $s\in[a,b]$ имеет место неравенство

$$\epsilon_k\,(p_{mk}\epsilon)(s)\,\mathrm{sign}\,(s-\tau)\geq 0.$$

Следовательно, при всех $k = 1,2,\ldots,n$ и $m = 1,2$ справедливы оценки

$$\max_{t\in[\tau,b]}\epsilon_k\int_{\tau}^{t}(p_{mk}\epsilon)(s)\,ds\leq\epsilon_k\int_{\tau}^{b}(p_{mk}\epsilon)(s)\,ds$$

и

$$\max_{t\in[a,\tau]}\epsilon_k\int_{\tau}^{t}(p_{mk}\epsilon)(s)\,ds\leq\epsilon_k\int_{\tau}^{a}(p_{mk}\epsilon)(s)\,ds.$$

Поскольку предполагается выполненным неравенство (27), отсюда заключаем, что функция (28) удовлетворяет условию (19) при

$$\alpha:=\max_{k:\,\epsilon_k\neq 0}\max\left\{-\epsilon_k\int_{a}^{\tau}\left[(p_{1k}\epsilon)(s)+(p_{2k}\epsilon)(s)\right]ds,\ \epsilon_k\int_{\tau}^{b}\left[(p_{1k}\epsilon)(s)+(p_{2k}\epsilon)(s)\right]ds\right\},\qquad(29)$$

и для получения требуемого утверждения остается применить следствие 2.

Для задач Коши с условиями в начале или в конце заданного промежутка, т. е. с условиями вида

$$u(a)=c\qquad(30)$$

и

$$u(b)=c\qquad(31)$$

соответственно, имеем такое утверждение.

Следствие 4. *Пусть каждый из ограниченных линейных операторов* $p_m : C([a,b],\mathbb{R}^n)\to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $m = 1,2$, *в уравнении (16) является* (ϵ,a)*-положительным (соответственно,* (ϵ,b)*-положительным) относительно некоторого вектора (9) с компонентами* $\{\varepsilon_k\mid k=1,2,\ldots,n\}\subset\{1,-1,0\}$, *причем для любой непрерывной функции* $u:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ *со свойством (13) выполнено условие (18). Если, кроме того,*

$$\max_{k:\,\epsilon_k\neq 0}\int_{a}^{b}\left|(p_{1k}\epsilon)(s)+(p_{2k}\epsilon)(s)\right|ds<1,\qquad(32)$$

то начальная задача (16), (30) (соответственно, (16), (31)) при произвольных функции $q \in L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$ и векторе $c \in \mathbb{R}^n$ имеет единственное решение.

Доказательство. При $\tau = a$ и $\tau = b$ условие (27) имеет соответственно вид

$$\max_{k:\,\epsilon_k\neq 0} \epsilon_k \int_a^b [(p_{1k}\epsilon)(s) + (p_{2k}\epsilon)(s)]\, ds < 1 \tag{33}$$

и

$$\max_{k:\,\epsilon_k\neq 0} \left[-\epsilon_k \int_a^b [(p_{1k}\epsilon)(s) + (p_{2k}\epsilon)(s)]\, ds\right] < 1. \tag{34}$$

Поскольку, в силу (ϵ, a)-положительности (соответственно, (ϵ, b)-положительности) операторов p_1 и p_2, при всех $k = 1,2,\ldots,n$, $m = 1,2$ и почти всех $s \in [a,b]$ величина $\epsilon_k (p_{mk}\epsilon)(s)$ неотрицательна (соответственно, неположительна), каждое из неравенств (33) и (34) в данном случае означает, что имеет место (32). Таким образом, достаточно воспользоваться следствием 3 с $\tau = a$ (соответственно, $\tau = b$).

4. Задача Коши для системы с отклоняющимся аргументом. Указанные выше утверждения дают возможность установить различные легко проверяемые условия, достаточные для однозначной разрешимости начальной задачи для широких классов систем линейных функционально-дифференциальных уравнений вида (1). Приведем некоторые такие условия для системы

$$u_k'(t) = \sum_{j=1}^n h_{kj}(t)\, u_j(\omega_{kj}(t)) + q_k(t), \quad t \in [a,b],\ k = 1,2,\ldots,n, \tag{35}$$

где $h_{kj} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, и $q_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,n$, — интегрируемые по Лебегу функции, а ω_{kj}, $k,j = 1,2,\ldots,n$, — измеримые преобразования промежутка $[a,b]$ в себя.

Теорема 3. *Пусть интегрируемые функции $h_{kj} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, таковы, что*

$$h_{kj}(t) = 0 \quad \text{при п. в.} \quad t \in [a,b] \quad \text{и всех} \quad j \in J \quad \text{и} \quad k = 1,2,\ldots,n, \tag{36}$$

где $J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ — некоторое заданное множество. Тогда при выполнении условия

$$\max_{k\notin J} \max\left\{-\sum_{j\notin J} \int_a^\tau |h_{kj}(t)|\, dt,\ \sum_{j\notin J} \int_\tau^b |h_{kj}(t)|\, dt\right\} < 1 \tag{37}$$

задача Коши (35), (2) имеет единственное решение при произвольных постоянных c_k, $k = 1,2,\ldots,n$, измеримых функциях $\omega_{kj} : [a,b] \to [a,b]$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, и интегрируемых функциях $q_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Для доказательства сформулированной теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $\omega_{kj} : [a,b] \to [a,b]$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, *— измеримые, а* $h_{kj} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, *— интегрируемые функции, удовлетворяющие условиям (36) и, кроме того, такие, что*

$$\epsilon_k \sum_{j \notin J} \epsilon_j \, h_{kj}(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0 \quad \textit{для всех } k \notin J \textit{ и п. в. } t \in [a,b]$$

при некоторых $\{\epsilon_k \mid k = 1,2,\ldots,n\} \subset \{1,-1,0\}$.

Тогда линейный оператор $l = (l_k)_{k=1}^n : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, *заданный формулой*

$$(l_k u)(t) := \sum_{j=1}^{n} h_{kj}(t)\, u_j(\omega_{kj}(t)), \quad t \in [a,b],\ k = 1,2,\ldots,n, \tag{38}$$

является (ϵ,τ)*-положительным относительно вектора (9) с компонентами, равными данным числам* $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$.

Указанное утверждение нетрудно установить непосредственными вычислениями.

Доказательство теоремы. Для $\sigma \in \{0,1\}$ и $k,j = 1,2,\ldots,n$ положим

$$h_{kj}^{[\sigma]}(t) := \begin{cases} \max\{\sigma h_{kj}(t), 0\} & \text{при } t \geq \tau, \\ -\max\{-\sigma h_{kj}(t), 0\} & \text{при } t \leq \tau \end{cases} \tag{39}$$

и определим операторы $p_m = (p_{mk})_{k=1}^n : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to L_1([a,b],\mathbb{R}^n)$, $m = 1,2$, равенствами

$$(p_{mk} u)(t) := \sum_{j=1}^{n} h_{kj}^{[-(-1)^m \epsilon_k \epsilon_j]}(t)\, u_j(\omega_{kj}(t)), \quad t \in [a,b],\ k = 1,2,\ldots,n,\ m = 1,2, \tag{40}$$

где

$$\epsilon_k := \begin{cases} 0 & \text{при } k \in J, \\ 1 & \text{при } k \notin J. \end{cases} \tag{41}$$

Легко видеть, что имеют место следующие свойства функций (39):

$$h_{kj}^{[\sigma]}(t) - h_{kj}^{[-\sigma]}(t) = h_{kj}(t), \tag{42}$$

$$h_{kj}^{[\sigma]}(t) + h_{kj}^{[-\sigma]}(t) = |h_{kj}(t)| \tag{43}$$

и

$$h_{kj}^{[\sigma]}(t) \operatorname{sign}(t-\tau) \geq 0 \tag{44}$$

для всех $k,j = 1,2,\ldots,n$, $\sigma \in \{0,1\}$ и почти всех t из $[a,b]$. Из (42), в частности, вытекает, что при каждом $k = 1,2,\ldots,n$ разность операторов p_{1k} и p_{2k} совпадает с оператором (38).

Иными словами, система уравнений (35) имеет вид (16), где операторы $p_1 = (p_{1k})_{k=1}^n$ и $p_2 = (p_{2k})_{k=1}^n$ определены согласно равенствам (40).

В принятых условиях оба оператора p_1 и p_2 являются $(\boldsymbol{\epsilon}, \tau)$-положительными относительно вектора (9) с компонентами $\boldsymbol{\epsilon}_1, \boldsymbol{\epsilon}_2, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_n$. Действительно, из условия (36) и леммы 1 следует, что оператор p_m, $m = 1, 2$, будет $(\boldsymbol{\epsilon}, \tau)$-положительным, если

$$\boldsymbol{\epsilon}_k \sum_{j \notin J} \boldsymbol{\epsilon}_j h_{kj}^{[-(-1)^m \boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j]}(t) \operatorname{sign}(t - \tau) \geq 0 \tag{45}$$

для каждого $k \notin J$ и почти всех t из $[a, b]$. Однако, в силу (39) и (41),

$$\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j \, h_{kj}^{[-(-1)^m \boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j]}(t) = h_{kj}^{[-(-1)^m \boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j]}(t) = \begin{cases} h_{kj}^{[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j]}(t) & \text{для } m = 1, \\ h_{kj}^{[-\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j]}(t) & \text{для } m = 2 \end{cases} \tag{46}$$

при всех $k, j = 1, 2, \ldots, n$ (в случаях, когда $\{k, j\} \cap J \neq \varnothing$, все указанные величины равны нулю). Следовательно, из (44) вытекает справедливость соотношения (45) для всех $k \notin J$ и почти всех $t \in [a, b]$, а это, как было отмечено выше, означает $(\boldsymbol{\epsilon}, \tau)$-положительность оператора p_m, $m = 1, 2$.

Согласно (40), имеем

$$(p_{mk}\boldsymbol{\epsilon})(t) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\epsilon}_j \, h_{kj}^{[-(-1)^m \boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j]}(t), \quad t \in [a, b], \ k = 1, 2, \ldots, n, \ m = 1, 2,$$

и поэтому, ввиду соотношений (43) и (41), для почти всех t из $[a, b]$ и всех $k = 1, 2, \ldots, n$ справедливы равенства

$$(p_{1k}\boldsymbol{\epsilon})(t) + (p_{2k}\boldsymbol{\epsilon})(t) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\epsilon}_j \left[h_{kj}^{[\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j]}(t) + h_{kj}^{[-\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon}_j]}(t) \right] = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\epsilon}_j \, |h_{kj}(t)| =$$

$$= \sum_{j \notin J} |h_{kj}(t)|.$$

Таким образом, для системы (35), записанной указанным выше способом в виде (16), выполнено условие (27) при векторе-столбце $\boldsymbol{\epsilon}$ с компонентами $\boldsymbol{\epsilon}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, заданными формулой (41). Для завершения доказательства теоремы остается сослаться на следствие 3.

Аналогично следствию 4, для задач Коши с условиями в начале и конце заданного промежутка из теоремы 3 вытекает такое следствие.

Следствие 5. *Предположим, что интегрируемые функции* $h_{kj} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *удовлетворяют условию (36) при некотором выборе множества* $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, *и, кроме того, выполнено неравенство*

$$\max_{k \notin J} \sum_{j \notin J} \int_a^b |h_{kj}(t)| \, dt < 1. \tag{47}$$

Тогда каждая из задач Коши (35), (30) и (35), (31) имеет единственное решение при произвольных постоянных c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *измеримых функциях* $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *и интегрируемых функциях* $q_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В тех случаях, когда матрица коэффициентов h_{kj}, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, системы (35) не имеет „перфорированной” структуры, описываемой условием (36), можно воспользоваться таким признаком разрешимости задачи (35), (2).

Следствие 6. *Если интегрируемые функции* $h_{kj} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *в системе (35) удовлетворяют условию*

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \max\left\{ -\sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{\tau} |h_{kj}(t)|\, dt,\ \sum_{j=1}^{n} \int_{\tau}^{b} |h_{kj}(t)|\, dt \right\} < 1, \tag{48}$$

то задача Коши (35), (2) имеет единственное решение при произвольных постоянных c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *измеримых функциях* $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *и интегрируемых функциях* $q_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. В случае, когда множество J пусто, неравенство (37) имеет вид (48), а условие (36) выполняется тривиальным образом. Поэтому для получения требуемого утверждения достаточно применить теорему 3 при $J := \varnothing$.

Для задач (35), (30) и (35), (31) из следствия 5 очевидным образом вытекает такое следствие.

Следствие 7. *Если интегрируемые функции* $h_{kj} : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *в системе (35) удовлетворяют условию*

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \int_{a}^{b} |h_{kj}(t)|\, dt < 1, \tag{49}$$

то задачи Коши (35), (30) и (35), (31) однозначно разрешимы при произвольных постоянных c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *измеримых функциях* $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, *и интегрируемых функциях* $q_k : [a, b] \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Важно отметить, что в установленных выше признаках не налагается никаких условий на измеримые функции $\omega_{kj} : [a, b] \to [a, b]$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, которые определяют отклонения аргумента и лишь благодаря наличию которых система (35) может не принадлежать классу обыкновенных дифференциальных систем. Это странное, на первый взгляд, обстоятельство объясняется наличием достаточно жестких ограничений на поведение коэффициентов h_{kj}, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, — например, условия (49) в следствии 7. В п. 5, однако, показывается, что эти условия в определенном смысле неулучшаемы.

Приведем еще одно условие разрешимости задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в постановке, восходящей к более ранним работам по теории функционально-дифференциальных уравнений и содержащей начальные функции (см. библиографию в [2, 3]):

$$u_k'(t) = \sum_{j=1}^{n} r_{kj}(t)\, u_j(\eta_{kj}(t)) + g_k(t), \quad t \in [a,b],\ k = 1,2,\ldots,n, \tag{50}$$

$$u_k(s) = \psi_k(s) \quad \text{при } s \notin [a,b]. \tag{51}$$

Здесь $r_{kj} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, и $g_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,n$, — интегрируемые, а $\eta_{kj} : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, — измеримые функции.

Следствие 8. *При выполнении условия*

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \max \left\{ -\sum_{j=1}^{n} \int\limits_{[a,\tau]\cap\eta_{kj}^{-1}([a,b])} |r_{kj}(t)|\, dt,\ \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{[\tau,b]\cap\eta_{kj}^{-1}([a,b])} |r_{kj}(t)|\, dt \right\} < 1 \tag{52}$$

задача (50), (51), (2) имеет единственное решение для произвольных постоянных c_k, $k = 1,2,\ldots,n$, и интегрируемых функций $g_k : [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,n$, независимо от выбора начальных функций $\psi_k : \mathbb{R} \setminus [a,b] \to \mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,n$.

Доказательство. Аналогично тому, как это было сделано в п. 1 для уравнения (3), (4), систему (50), (51) можно записать в виде (35), если для всех $k,j = 1,2,\ldots,n$, и почти всех $t \in [a,b]$ положить $\omega_{kj}(t) := \chi_{\eta_{kj}}(t)\eta_{kj}(t) + t_*(1 - \chi_{\eta_{kj}}(t))$ и

$$h_{kj}(t) := \chi_{\eta_{kj}}(t) r_{kj}(t), \tag{53}$$

$$q_k(t) := g_k(t) + \sum_{\nu=1}^{n} r_{k\nu}(t)(1 - \chi_{\eta_{k\nu}}(t))\, \psi_\nu\big(\chi_{\eta_{k\nu}}(t)\eta_{k\nu}(t) + t^*(1 - \chi_{\eta_{k\nu}}(t))\big),$$

где $t_* \in [a,b]$ и $t^* \notin [a,b]$ — произвольным образом фиксированные точки, а функции $\chi_{\eta_{kj}} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$, $k,j = 1,2,\ldots,n$, определены формулой (6). Согласно (6), равенство (53) означает, что h_{kj} равно нулю на множестве тех точек, в которых значение функции η_{kj} не принадлежит промежутку $[a,b]$. Поэтому (52) гарантирует, что для соответствующей системы (35) выполнению условие (48). Применение следствия 6 завершает доказательство.

5. Оптимальность условий. Для функционально-дифференциальных уравнений систем (1) размерности $n \geq 2$ условие (19) в теоремах 1 и 2 неулучшаемо в том смысле, что неравенство $0 \leq \alpha < 1$ для входящей в него постоянной α, вообще говоря, нельзя заменить соответствующим нестрогим неравенством $0 \leq \alpha \leq 1$. Более того, точны оценки во всех утверждениях, полученных для системы (55), (56), которая, очевидно, является частным случаем системы (35). Так, строгое неравенство (47) в следствии 5, вообще говоря, нельзя заменить соответствующим нестрогим неравенством

$$\max_{k \notin J} \sum_{j \notin J} \int\limits_a^b |h_{kj}(t)|\, dt \leq 1$$

и т. д.

Действительно, рассмотрим однородную начальную задачу

$$u_1(a) = 0, \qquad u_2(a) = 0 \tag{54}$$

для системы двух линейных функционально-дифференциальных уравнений

$$u_1'(t) = \frac{1}{2\,(b-a)}\left[u_1(b) - u_2(b)\right], \tag{55}$$

$$u_2'(t) = \frac{1}{2\,(b-a)}\left[u_2(b) - u_1(b)\right], \qquad t \in [a,b], \tag{56}$$

заданной на некотором ограниченном промежутке $[a,b]$. Система (55), (56), очевидно, примет вид (35), если положить $n := 2$, $\omega_{kj}(t) := b$ и

$$h_{kj}(t) := \frac{(-1)^{k+j}}{2\,(b-a)}$$

для почти всех t из $[a,b]$ и всех $\{k,j\} \subset \{1,2\}$. Ясно также, что условие (54) означает не что иное, как (26) с $\tau = a$.

Для задачи (55), (56), (54), записанной указанным выше способом в виде (35), (26), неравенство (49) не выполняется, поскольку имеет место равенство

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_a^b |h_{kj}(t)|\, dt = 1.$$

Легко убедиться в том, что для произвольного ненулевого λ пара функций

$$u_1(t) = \lambda\,(t-a)\,, \qquad u_2(t) = -\lambda\,(t-a)\,, \qquad t \in [a,b],$$

является нетривиальным решением однородной задачи (55), (56), (54), и, таким образом, замена в следствии 7 строгого неравенства (49) соответствующим нестрогим неравенством

$$\max_{k=1,2,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_a^b |h_{kj}(t)|\, dt \leq 1$$

приводит к тому, что упомянутое утверждение теряет силу. Аналогичное заключение справедливо и для каждого из остальных результатов пп. 3, 4.

При $n = 1$ пример указанного выше типа построить невозможно; это следует из результатов работы [5].

6. Доказательство основной теоремы. Основным при доказательстве теоремы 1 является следующее утверждение (см. [11]).

Теорема 4. *Пусть E — вещественное банахово пространство, K — собственный клин в E, а $A_1 : E \to E$ и $A_2 : E \to E$ — вполне непрерывные линейные операторы, удовлетворяющие условиям*

$$A_1(K) \cup A_2(K) \subset K, \tag{57}$$

$$K \cap (-K) \subset \ker(A_1 - A_2). \tag{58}$$

Предположим, кроме того, что при некотором линейном многообразии $\Pi \subseteq E$, содержащем в себе образ дополнения множества $K \cap (-K)$ при отображении $A_1 - A_2$, соответствующее множество

$$Q_\Pi(K) := \Big\{ f \in K \mid \forall x \in \Pi \; \exists \beta_x \in (0, +\infty) : \{\beta_x f + x, \; \beta_x f - x\} \subset K \Big\} \tag{59}$$

непусто.

Тогда спектральный радиус $r(A_1 - A_2)$ оператора $A_1 - A_2$ допускает оценку

$$r(A_1 - A_2) \le \inf \big\{ \gamma \in (0, +\infty) \mid \gamma f - A_1 f - A_2 f \in K \text{ при некотором } f \in Q_\Pi(K) \big\}. \tag{60}$$

В (57) используется стандартное обозначение $A(M) := \{Ax \mid x \in M\}$, $M \subseteq E$. Напомним также, что под клином понимается такое непустое замкнутое подмножество $K \subset E$, для которого $\alpha_1 K + \alpha_2 K \subset K$ при произвольных $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset (0, +\infty)$ (см., например, [12, 13]). Здесь, как обычно, $\alpha_1 K + \alpha_2 K$ означает множество элементов вида $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$, где $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subset \mathbb{R}$ и $\{u_1, u_2\} \subset K$.

Нам потребуется также следующее утверждение [6, 14].

Лемма 2. *Для любого ограниченного линейного оператора $l : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to L_1([a,b], \mathbb{R}^n)$ соответствующий линейный оператор $I_\tau l : C([a,b], \mathbb{R}^n) \to C([a,b], \mathbb{R}^n)$, где $\tau \in [a, b]$, $I_\tau : L_1([a,b], \mathbb{R}^n) \to C([a,b], \mathbb{R}^n)$,*

$$L_1([a,b], \mathbb{R}^n) \ni v \longmapsto I_\tau v := \int_\tau^{\cdot} v(s)\, ds, \tag{61}$$

вполне непрерывен.

Заметим, что в приводимом ниже доказательстве теоремы 1 без леммы 2 можно обойтись, если в формулировку теоремы 1 не включать утверждение о представимости решения задачи (16), (17) в виде ряда (21). Указанное обстоятельство объясняется тем, что и без предположения о полной непрерывности операторов A_m, $m = 1, 2$, при выполнении всех прочих условий теоремы 4 число 1 не является собственным значением ограниченного линейного оператора $A_1 - A_2$.

Доказательство теоремы 1. Определим K как множество всех ϵ-положительных непрерывных функций $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. При выполнении неравенства (10) это множество, очевидно, образует собственный клин в пространстве $E := C([a,b], \mathbb{R}^n)$, причем

$$K \cap (-K) = \{u \in C([a,b], \mathbb{R}^n) \mid u(t) =_\epsilon 0 \quad \text{при всех} \quad t \in [a,b]\}.$$

Зададим операторы $A_m : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to C([a,b],\mathbb{R}^n)$, $m = 1,2$, формулой

$$A_m := I_\tau p_m, \quad m = 1,2,$$

где $I_\tau : L_1([a,b],\mathbb{R}^n) \to C([a,b],\mathbb{R}^n)$ — оператор интегрирования (61). Согласно лемме 2, эти операторы вполне непрерывны.

Легко проверить, что при таком определении клина K и операторов A_1 и A_2 свойство $(\boldsymbol{\epsilon},\tau)$-положительности операторов p_1 и p_2 обеспечивает выполнение включения (57). Предположение о том, что из (13) всегда вытекает (18), гарантирует выполнение условия (58). Кроме того, из определения множества K ясно, что в силу справедливости включения (20) для всех непрерывных функций $u : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, не удовлетворяющих соотношению (13), функция $f := y$ является элементом соответствующего рассматриваемому случаю множеству (59). Заметив теперь, что интегральное неравенство (19) в данном случае означает справедливость соотношения

$$\gamma f - A_1 f - A_2 f \in K$$

с $\gamma := \alpha$, заключаем, что можно воспользоваться теоремой 4. Утверждение о представимости единственного решения задачи (16), (17) в виде (21) является следствием известного свойства резольвенты.

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — 2-е изд. — М.: Наука, 1972. — 352 с.
3. *Беллман Т., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.
4. *Kolmanovskii V., Myshkis A.* Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. — 648 p.
5. *Bravyi E., Hakl R., and Lomtatidze A.* Optimal conditions for unique solvability of the Cauchy problem for first order linear functional differential equations // Czech. Math. J. — 2002. — **52**, № 3. — P. 513–530.
6. *Hakl R., Lomtatidze A., and Stavroulakis J.* On boundary value problems for scalar linear functional differential equations // Abstrs and Appl. Anal. — 2004. — № 1. — P. 45–67.
7. *Дильная Н. З., Ронто А. Н.* Некоторые новые условия разрешимости задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2004. — **57**, № 7. — С. 867–884.
8. *Ронто А. Н.* Точные условия разрешимости задачи Коши для систем линейных функционально-дифференциальных уравнений первого порядка, задаваемых $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n; \tau)$-положительными операторами // Там же. — 2003. — **55**, № 11. — С. 1541–1568.
9. *Dilnaya N., Rontó A.* Multistage iterations and solvability of linear Cauchy problems // Miskolc Math. Notes. — 2003. — **4**, № 2. — P. 89–102.
10. *Бахтин И. А., Красносельский М. А., Стеценко В. Я.* О непрерывности линейных положительных операторов // Сиб. мат. журн. — 1962. — **3**, № 1. — С. 156–160.
11. *Rontó A.* On the unique solvability of linear equations determined by monotone decomposable operators // Miskolc Math. Notes. — 2004. — **5**, № 1. — P. 71–82.
12. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи мат. наук. — 1948. — **3**, № 1(23). — С. 3–95.
13. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. Метод положительных операторов. — М.: Наука, 1985. — 254 с.
14. *Данфорд Н., Шварц Д. Т.* Линейные операторы (общая теория). — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — Т. 1. — 895 с.

Получено 10.01.2005