УДК 517.9

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Н. В. Плотникова

Одес. нац. ун-т
Украина, 27026, Одесса, ул. Дворянская, 2
e-mail: talie@ukr.net

For linear differential inclusions with impulsive effects at fixed moments, we find conditions for existence of periodic ordinary solutions and R-solutions.

Для лінійних диференціальних включень із імпульсами у фіксовані моменти часу встановлено умови існування періодичних звичайних розв'язків і R-розв'язків.

Исследованию условий существования периодических решений импульсных дифференциальных уравнений посвящено много работ (см., например, [1, 2]). Существование обычных периодических решений импульсных дифференциальных включений рассматривалось в [3, 4]. В теории дифференциальных включений наряду с обычными решениями большой интерес представляют R-решения [5, 6], свойства которых во многих случаях аналогичны свойствам решений дифференциальных уравнений.

Рассмотрим вопрос о существовании периодических R-решений и обычных решений линейных неоднородных периодических дифференциальных включений с импульсным воздействием вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &\in A(t)x + F(t), \quad t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &\in B_i x + P_i, \end{aligned} \tag{1}$$

где $A(t)$ — непрерывная T-периодическая матричная функция, $F : R \to \text{comp}\,(R^n)$ — непрерывное T-периодическое отображение, постоянные матрицы B_i, множества $P_i \in \in \text{conv}\ (R^n)$ и моменты τ_i такие, что при некотором натуральном r

$$B_{i+r} = B_i, \quad P_{i+r} = P_i, \quad \tau_{i+r} = \tau_i + T, \quad i \in N.$$

Предполагается также, что $0 \leq \tau_1 < \ldots < \tau_r < T$ и $\det\,(E + B_i) \neq 0$ для всех $i = \overline{1, r}$.

Пусть $X(t, s)$ — матрицант соответствующей (1) однородной системы, т. е. решение матричной задачи Коши для системы с импульсным воздействием

$$\dot{X} = A(t)X, \quad t \neq \tau_i,$$

$$\Delta X|_{t=\tau_i} = B_i X, \quad X(s, s) = E.$$

Обычное решение $x(t, x_0),\ x(0, x_0) = x_0$ линейного импульсного дифференциального включения (1) представимо в виде

$$x(t, x_0) = X(t, 0)x_0 + \int\limits_0^t X(t, \tau)f(\tau)d\tau + \sum_{0 \le \tau_i < t} X(t, \tau_i)p_i,$$

где $f(t) \in F(t),\ p_i \in P_i$ [1].

Поскольку для линейного дифференциального включения R-решение единственно и совпадает со всем пучком решений [5], использовав понятие интеграла Аумана от многозначного отображения [7], запишем R-решение дифференциального включения (1) в виде

$$R(t, R_0) = X(t, 0)R_0 + \int\limits_0^t X(t, \tau)F(\tau)d\tau + \sum_{0 \le \tau_i < t} X(t, \tau_i)P_i.$$

Таким образом, существование T-периодических R-решений и обычных решений непосредственно связано с существованием решений уравнений

$$R_0 = X(T, 0)R_0 + G, \tag{2}$$

где

$$G = \int\limits_0^T X(T, \tau)F(\tau)d\tau + \sum_{0 \le \tau_i < T} X(T, \tau_i)P_i \in \operatorname{conv}(R^n),$$

и

$$x_0 = X(T, 0)x_0 + g, \tag{3}$$

где

$$g = \int\limits_0^T X(T, \tau)f(\tau)d\tau + \sum_{0 \le \tau_i < T} X(T, \tau_i)p_i \in G.$$

В уравнении (3) различным $f(t) \in F(t)$ и $p_i \in P_i$ соответствуют точки $g \in G$. Если матрица $E - X(T, 0)$ является невырожденной (т. е. среди собственных значений матрицы $X(T, 0)$ нет 1), то обычные периодические решения существуют для всех $g \in G$, т. е. для всех $f(t) \in F(t)$ и $p_i \in P_i$. Если же матрица $E - X(T, 0)$ является вырожденной, то обычные периодические решения существуют для тех $g \in G$, для которых ранг расширенной матрицы $(E - X(T, 0), g)$ равен рангу матрицы $E - X(T, 0)$ [1].

Таким образом, если хотя бы для одного $g \in G$ уравнение (3) имеет решение, то существует обычное T-периодическое решение для задачи (1).

Различным точкам $g \in G$ соответствуют различные начальные точки обычных периодических решений (если периодические решения существуют). Обозначим через X_0 множество начальных точек x_0 обычных периодических решений, т. е.

$$X_0 = \{x_0 \in R^n | x_0 = X(T, 0)x_0 + g,\ g \in G\}.$$

Рассмотрим решение уравнения (2). Для матрицы $X(T,0)$ существует действительная невырожденная матрица M такая, что

$$X(T,0) = M^{-1}JM, \tag{4}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

— действительная каноническая форма [8]. Таким образом, уравнение (2) принимает вид

$$R_0 = M^{-1}JMR_0 + G,$$

$$MR_0 = JMR_0 + MG, \tag{5}$$

$$Z_0 = JZ_0 + D,$$

где $Z_0 = MR_0,\ D = MD \in \operatorname{conv}(R^n)$.

Обозначим через Λ спектральный радиус матрицы $X(T,0)$. Рассмотрим вопрос существования решений уравнения (5) в зависимости от величины Λ.

1. Случай $\Lambda < 1$. Для матрицы J существует диагональная матрица $L = \operatorname{diag}\{1,\varepsilon,\dots$ $\dots,\varepsilon^{n-1}\}$ такая, что $J = L^{-1}J(\varepsilon)L$, где $J(\varepsilon)$ — модифицированная форма [9], т. е. $J_i(\varepsilon) =$ $= J_i$ в случае, когда λ_i — простой корень и

$$J_i(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_i^1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \varepsilon_i^{k-1} & \lambda_i \end{pmatrix}$$

или

$$J_i(\varepsilon) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \operatorname{Re}\lambda_i & -\operatorname{Im}\lambda_i \\ \operatorname{Im}\lambda_i & \operatorname{Re}\lambda_i \end{matrix} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \varepsilon_i^1 E_2 & \begin{matrix} \operatorname{Re}\lambda_i & -\operatorname{Im}\lambda_i \\ \operatorname{Im}\lambda_i & \operatorname{Re}\lambda_i \end{matrix} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \varepsilon_i^{k-1}E_2 & \begin{matrix} \operatorname{Re}\lambda_i & -\operatorname{Im}\lambda_i \\ \operatorname{Im}\lambda_i & \operatorname{Re}\lambda_i \end{matrix} \end{array}\right)$$

в случае кратного (соответственно действительного или комплексного) корня, $\varepsilon_i^j \in$ $\in \{0,\varepsilon\}$, ε — любое положительное число.

В этом случае уравнение (5) преобразуется к виду

$$Z_0(\varepsilon) = J(\varepsilon)Z_0(\varepsilon) + D(\varepsilon), \tag{6}$$

где $Z_0(\varepsilon) = LZ_0,\ D(\varepsilon) = LD \in \mathrm{conv}\,(R^n)$.

Норма матрицы $J(\varepsilon)$, индуцированная евклидовой нормой вектора, равна квадратному корню из спектрального радиуса матрицы $J^T(\varepsilon)J(\varepsilon)$, который является непрерывной функцией переменной ε в точке $\varepsilon = 0$. Поэтому

$$\rho(J^T(\varepsilon)J(\varepsilon)) = \rho(J^T(0)J(0)) + \sigma(\varepsilon) = \Lambda^2 + \sigma(\varepsilon),$$

где $\sigma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Здесь $\rho(M)$ — спектральный радиус матрицы M.

Постоянную $\varepsilon > 0$ выберем так, чтобы $||J(\varepsilon)|| = \sqrt{\Lambda^2 + \sigma(\varepsilon)}$ была меньше 1.

Пространство $\mathrm{conv}\,(R^n)$ является полным [7, 10]. Существование T-периодического R-решения уравнения (1), т. е. существование начального множества $Z_0(\varepsilon)$, удовлетворяющего уравнению (6), связано с существованием неподвижной точки отображения

$$\chi(Z) = J(\varepsilon)Z + D(\varepsilon). \tag{7}$$

Используя свойства расстояния по Хаусдорфу $h(\cdot,\cdot)$ и опорной функции $c(\cdot,\cdot)$ [7], получаем

$$h(\chi(Z_1), \chi(Z_2)) = h(J(\varepsilon)Z_1 + D(\varepsilon), J(\varepsilon)Z_2 + D(\varepsilon)) = h(J(\varepsilon)Z_1, J(\varepsilon)Z_2) =$$

$$= \sup_{||\psi||\le 1} |c(J(\varepsilon)Z_1, \psi) - c(J(\varepsilon)Z_2, \psi)| = |c(Z_1, J^T(\varepsilon)\psi^*) - c(Z_2, J^T(\varepsilon)\psi^*)| \le$$

$$\le ||J^T(\varepsilon)\psi^*||\, h(Z_1, Z_2) \le ||J(\varepsilon)||\, h(Z_1, Z_2) < h(Z_1, Z_2),$$

т. е. отображение $\chi(Z)$ является сжимающим, следовательно, выполнены все условия теоремы Банаха [11], а значит, отображение (7) имеет в $\mathrm{conv}\,(R^n)$ единственную неподвижную точку.

Таким образом, если спектральный радиус матрицы $X(T, 0)$ меньше 1, то линейное импульсное дифференциальное включение (1) для любого T-периодического многозначного отображения $F(t)$ и любой периодической последовательности P_i имеет единственное T-периодическое R-решение $R(t)$, начальное значение которого $R_0 = M^{-1}L^{-1}Z_0(\varepsilon)$, где $Z_0(\varepsilon)$ находится как неподвижная точка отображения (7).

Пример 1. Рассмотрим импульсное дифференциальное включение

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \alpha(1 + \sin t)S_1(0), \quad t \ne (2i-1)\pi,$$

$$\left.\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}\right|_{t=(2i-1)\pi} \in \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}e^{2\pi} - 1 & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2}e^{2\pi} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + pS_1(0),$$

где $\alpha = \dfrac{4}{3e^{\pi} + 1}$, $p = \dfrac{12e^{-2\pi}}{3e^{\pi} + 1}$, $S_r(a) \in \mathrm{conv}\,(R^n)$ — шар радиуса r с центром в точке a.

Начальное множество R_0, соответствующее 2π-периодическому R-решению, удовлетворяет уравнению

$$R_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} R_0 + S_1(0).$$

В силу единственности решения в $\operatorname{conv}(R^2)$ получаем $R_0 = S_2(0)$.

Для нахождения множества X_0 получаем систему

$$x_1^0 = \frac{1}{2}x_1^0 + g_1,$$

$$x_2^0 = -\frac{1}{2}x_2^0 + g_2, \quad g_1^2 + g_2^2 \le 1,$$

из которой следует

$$\frac{(x_1^0)^2}{4} + 9\frac{(x_2^0)^2}{4} \le 1.$$

Таким образом, X_0 — эллипс и $X_0 \subset R_0$.

2. Случай $\Lambda > 1$. Поскольку $\Lambda = \max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i| > 1$, где λ_i — собственные значения матрицы $X(T,0)$, существует $\lambda_{i_0} : |\lambda_{i_0}| > 1$ (далее для простоты записи будем считать, что $i_0 = 1$).

В уравнении (5) рассмотрим отдельно случаи, когда λ_1 является действительным (простым и кратным) и комплексным (простым и кратным).

1. Пусть λ_1 является простым и действительным. Тогда клетка Жордана

$$J_1 = (\lambda_1).$$

Пусть $\text{пр}_{x_1} A$ — проекция множества A на ось x_1, тогда

$$\operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} Z_0) = \operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1}(JZ_0 + D)) = \operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} JZ_0 + \text{пр}_{x_1} D) = \operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} JZ_0) +$$

$$+ \operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} D) = \operatorname{mes}(\lambda_1 \text{пр}_{x_1} Z_0) + \operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} D) = |\lambda_1| \operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} Z_0) + \operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} D).$$

Здесь $\operatorname{mes} A$ — мера Лебега множества A.

Следовательно, уравнение (5) может иметь решения тогда и только тогда, когда $\operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} D) = 0$ и $\operatorname{mes}(\text{пр}_{x_1} Z_0) = 0$, т. е. множество D лежит в гиперплоскости $x_1 = d_1^*$, множество Z_0 — в гиперплоскости $x_1 = x_1^*$, где x_1^* находится из уравнения $x_1^* = \lambda_1 x_1^* + d_1^*$, т. е. $x_1^* = \dfrac{d_1^*}{1 - \lambda_1}$.

В этом случае Z_0 и D можно рассматривать как множества размерности $n-1$ и уравнение (5) сводится к уравнению

$$\tilde{Z}_0 = \tilde{J}\tilde{Z}_0 + \tilde{D},$$

где

$$\tilde{J} = \left(\begin{array}{c|c} J_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \ddots \end{array} \right),$$

$\tilde{Z}_0 = \{(x_2, \ldots, x_n) : (x_1^*, x_2, \ldots, x_n) \in Z_0\}, \ \tilde{D} = \{(d_2, \ldots, d_n) : (d_1^*, d_2, \ldots, d_n) \in D\}.$

Таким образом, получили задачу размерности на 1 меньше, которая исследуется по аналогии с исходной.

Пример 2. Рассмотрим линейное импульсное дифференциальное включение вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \frac{1}{2\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha(1 + \cos t)\tilde{S}_1(0),$$

$$\left. \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix} \right|_{t=(2i-1)\pi} \in \begin{pmatrix} 2e^{-1} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-2\pi} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}e^{-2\pi} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + p\tilde{S}_1(0),$$

где $\tilde{S}_1(0) = \{(x_1, x_2, x_3)^T : \ x_1 = 0, \ (x_2, x_3)^T \in S_1(0) \in \operatorname{conv}(R^2)\}, \ \alpha = \dfrac{2}{2e^{\pi} - e^{-\pi} - 3},$ $p = e^{\pi}.$

Уравнение (2) имеет вид

$$R_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} R_0 + \tilde{S}_1(0).$$

Поскольку $\lambda_1 = 2$ и $\tilde{S}_1(0)$ принадлежит гиперплоскости $x_1 = 0$, R_0 должно принадлежать гиперплоскости $x_1 = 0$ и уравнение (2) сводится к уравнению

$$\tilde{R}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tilde{R}_0 + S_1(0),$$

решением которого является $\tilde{R}_0 = S_2(0)$. Следовательно, $R_0 = \{(x_1, x_2, x_3)^T : \ x_1 = 0, \ (x_2, x_3)^T \in S_2(0)\} = \tilde{S}_2(0)$.

Что касается существования обычных периодических решений, то они существуют для всех $g \in \tilde{S}_1(0)$ и начальные условия находятся из системы

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x_0 + g.$$

Таким образом, множество начальных значений для обычных периодических решений X_0 имеет вид

$$X_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \tilde{S}_1(0) = 2\tilde{S}_1(0) = R_0.$$

Пример 3. Рассмотрим включение из предыдущего примера, только в качестве $F(t)$ и P возьмем $F(t) = \alpha(1+\cos t)S_1(0),\ P = pS_1(0)$. В этом случае $G = S_1(0)$, поэтому, так как $\lambda_1 > 1$, а G не принадлежит гиперплоскости $x_1 = g_1^*$, не существует 2π-периодического R-решения. Обычные T-периодические решения существуют при любом $g \in G$, так как среди собственных значений матрицы $X(T, 0)$ нет единицы; при этом множество X_0 представляет собой эллипсоид.

2. Пусть λ_1 имеет кратность k, тогда клетка J_1 имеет вид

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ e_1^1 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e_1^{k-1} & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

где $e_1^i \in \{0, 1\}$.

В этом случае, по аналогии с предыдущим, получим, что уравнение (5) может иметь решения тогда и только тогда, когда $\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_1} D) = 0$ и $\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_1} Z_0) = 0$, т. е. множество D лежит в гиперплоскости $x_1 = d_1^*$, множество Z_0 — в гиперплоскости $x_1 = x_1^*$. Далее, так как

$$\begin{aligned} \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} Z_0) &= \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}(JZ_0 + D)) = \\ &= \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} JZ_0 + \text{пр}_{x_2} D)) = \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} JZ_0) + \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} D) = \\ &= \mathrm{mes}\,(\lambda_1 \text{пр}_{x_2} Z_0 + e_1^1 x_1^*) + \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} D) = \\ &= |\lambda_1| \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} Z_0) + \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} D), \end{aligned}$$

получим, что уравнение (5) может иметь решения тогда и только тогда, когда $\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} D) = 0$ и $\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2} Z_0) = 0$, т. е. множество D лежит в гиперплоскости $x_2 = d_2^*$, множество Z_0 — в гиперплоскости $x_2 = x_2^*$ и т. д.

Таким образом, уравнение (5) может иметь решения тогда и только тогда, когда множество D лежит в гиперплоскостях $x_i = d_i^*,\ i = \overline{1, k}$, а множество Z_0 — в гиперплоскостях $x_i = x_i^*,\ i = \overline{1, k}$, причем постоянные x_i^* находятся из системы

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_k^* \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_k^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1^* \\ \vdots \\ d_k^* \end{pmatrix}, \tag{8}$$

которая решается последовательно сверху вниз и имеет единственное решение, так как матрица $E - J_1$ является невырожденной.

3. Пусть λ_1 является простым комплексным. Тогда клетка Жордана

$$J_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,\lambda_1 & -\mathrm{Im}\,\lambda_1 \\ \mathrm{Im}\,\lambda_1 & \mathrm{Re}\,\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\text{пр}_{(x_1,x_2)}A$ — проекция множества A на гиперплоскость (x_1, x_2), тогда

$$\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 = \text{пр}_{(x_1,x_2)}(JZ_0 + D).$$

Проекция множества Z_0 на гиперплоскость (x_1, x_2) является выпуклым множеством, поэтому либо $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$ — отрезок, либо среди кругов, содержащихся в $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$, можно найти наибольший по площади (пусть $S_r(a)$).

В первом случае, если $\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{(x_1,x_2)}D) > 0$, уравнение (5) не имеет решения, так как

$$\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{(x_1,x_2)}(JZ_0 + D)) \geq \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{(x_1,x_2)}D) > 0 = \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0).$$

Если же $\text{пр}_{(x_1,x_2)}D$ является отрезком, то очевидно, что отрезок $\text{пр}_{(x_1,x_2)}JZ_0$ должен быть параллелен данному, иначе $\text{пр}_{(x_1,x_2)}(JZ_0 + D)$ является параллелограммом в силу определения суммы двух множеств и не может совпадать с множеством $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$. Обозначим через $(x_1^1, x_2^1)^T,\ (x_1^2, x_2^2)^T$ концы отрезка $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$. Тогда

$$\text{длина }\ \text{пр}_{(x_1,x_2)}(JZ_0 + D) = \text{длина }\ \text{пр}_{(x_1,x_2)}(JZ_0) + \text{длина }\ \text{пр}_{(x_1,x_2)}D =$$

$$= \big[(\mathrm{Re}\,\lambda_1 x_1^1 - \mathrm{Im}\,\lambda_1 x_2^1 - (\mathrm{Re}\,\lambda_1 x_1^2 - \mathrm{Im}\,\lambda_1 x_2^2))^2 + (\mathrm{Im}\,\lambda_1 x_1^1 + \mathrm{Re}\,\lambda_1 x_2^1 -$$

$$- (\mathrm{Im}\,\lambda_1 x_1^2 + \mathrm{Re}\,\lambda_1 x_2^2))^2\big]^{\frac{1}{2}} + \text{длина }\ \text{пр}_{(x_1,x_2)}D = \big[(\mathrm{Re}\,\lambda_1^2 + \mathrm{Im}\,\lambda_1^2)((x_1^1 - x_1^2)^2 +$$

$$+ (x_2^1 - x_2^2)^2)\big]^{\frac{1}{2}} + \text{длина }\ \text{пр}_{(x_1,x_2)}D = |\lambda_1|\text{длина }\ \text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 + \text{длина }\ \text{пр}_{(x_1,x_2)}D.$$

Таким образом, в данном случае уравнение (5) может иметь решение тогда и только тогда, когда длина $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 = 0$ и длина $\text{пр}_{(x_1,x_2)}D = 0$, т. е. $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$ и $\text{пр}_{(x_1,x_2)}D$ являются точками.

Во втором случае, так как $S_r(a) \subset \text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$, $J_1 S_r(a) + \text{пр}_{(x_1,x_2)}D \subset \text{пр}_{(x_1,x_2)}(JZ_0 + D)$. Множество $J_1 S_r(a) + \text{пр}_{(x_1,x_2)}D$ содержит круг

$$J_1 S_r(a) + d = |\lambda_1| \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} S_r(a) + d,$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{Re}\,\lambda_1}{|\lambda_1|},\ \sin\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,\lambda_1}{|\lambda_1|},\ d \in \text{пр}_{(x_1,x_2)}D,$$

т. е. круг радиуса $r_1 = |\lambda_1| r > r$, что в силу уравнения (5) противоречит выбору круга $S_r(a)$.

Таким образом, T-периодическое R-решение может существовать лишь в случае, когда множества пр$_{(x_1,x_2)} Z_0$ и пр$_{(x_1,x_2)} D$ являются одноточечными, причем для нахождения пр$_{(x_1,x_2)} Z_0$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda_1 & -\operatorname{Im}\lambda_1 \\ \operatorname{Im}\lambda_1 & \operatorname{Re}\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1^* \\ d_2^* \end{pmatrix}, \tag{9}$$

определитель которой $(1 - \operatorname{Re}\lambda_1)^2 + \operatorname{Im}\lambda_1^2 > 0$. Следовательно, данная система имеет единственное решение.

Множества Z_0 и D можно рассматривать как множества в пространстве $\operatorname{conv}(R^{n-2})$. Размерность задачи, таким образом, понижается на 2 и вновь полученная задача

$$\tilde{Z}_0 = \tilde{J}\tilde{Z}_0 + \tilde{D},$$

где

$$\tilde{J} = \left(\begin{array}{c|c} J_2 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \ddots \end{array} \right),$$

$$\tilde{Z}_0 = \{(x_3, \ldots, x_n) : (x_1^*, x_2^*, x_3, \ldots, x_n) \in Z_0\},$$

$$\tilde{D} = \{(d_3, \ldots, d_n) : (d_1^*, d_2^*, d_3, \ldots, d_n) \in D\}$$

исследуется по аналогии с исходной.

Пример 4. Рассмотрим линейное импульсное дифференциальное включение вида

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -x_1,$$

$$\dot{x}_3 \in x_3 + \alpha[-1, 1], \quad t \neq (2i-1)\pi,$$

$$\Delta x_1|_{t=(2i-1)\pi} = x_2,$$

$$\Delta x_2|_{t=(2i-1)\pi} = -x_1,$$

$$\Delta x_3|_{t=(2i-1)\pi} \in \left(\frac{1}{2}e^{-2\pi} - 1\right) x_3 + p[-1, 1],$$

где $i \in N$, $\alpha = \dfrac{1}{2e^{\pi} - e^{-\pi} - 1}$, $p = e^{\pi}$.

Уравнение (2) имеет вид

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} R_0 + \overline{S}_1(0).$$

В силу изложенных выше рассуждений, пр$_{(x_1,x_2)}R_0-$ точка, которая находится из системы

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1^* = 0,\ x_2^* = 0$. Уравнение (2) сводится к следующему:

$$\tilde{R}_0 = \frac{1}{2}\tilde{R}_0 + [-1, 1],$$

откуда следует, что $\tilde{R}_0 = [-2, 2]$, а значит, $R_0 = \overline{S}_2(0)$.

Что касается существования обычных периодических решений, то матрица $E - X(T, 0)$ является невырожденной и периодические решения существуют для всех $d \in \overline{S}_1(0)$, причем

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \overline{S}_1(0) = \overline{S}_2(0) = R_0.$$

4. Пусть λ_1 является комплексным кратности k. Тогда клетка

$$J_1 = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} \operatorname{Re}\lambda_1 & -\operatorname{Im}\lambda_1 \\ \operatorname{Im}\lambda_1 & \operatorname{Re}\lambda_1 \end{matrix} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline e_1^1 E_2 & \begin{matrix} \operatorname{Re}\lambda_1 & -\operatorname{Im}\lambda_1 \\ \operatorname{Im}\lambda_1 & \operatorname{Re}\lambda_1 \end{matrix} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & e_1^{k-1} E_2 & \begin{matrix} \operatorname{Re}\lambda_1 & -\operatorname{Im}\lambda_1 \\ \operatorname{Im}\lambda_1 & \operatorname{Re}\lambda_1 \end{matrix} \end{array}\right).$$

Следовательно, по аналогии со случаем простого комплексного корня, проекции множеств Z_0 и D являются точками в гиперплоскости (x_1, x_2), а также (последовательно понижая размерность задачи по аналогии со случаем кратного действительного корня) в гиперплоскостях $(x_{2i-1}, x_{2i}), i \in \overline{2, k}$.

Таким образом, множества Z_0 и D являются множествами размерности $n - 2k$. Для нахождения $x_i^*,\ i = \overline{1, 2k}$, получаем систему

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_{2k}^* \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_{2k}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1^* \\ \vdots \\ d_{2k}^* \end{pmatrix}. \tag{10}$$

3. Случай $\Lambda = 1$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\max_{i=\overline{1,n}} |\lambda_i| = |\lambda_1| = 1$.

1. Пусть λ_1 является простым и действительным, т. е. $\lambda_1 = \pm 1$. В силу уравнения (5) имеем

$$\text{пр}_{x_1} Z_0 = \text{пр}_{x_1}(JZ_0 + D) = \text{пр}_{x_1} JZ_0 + \text{пр}_{x_1} D = \lambda_1 \text{пр}_{x_1} Z_0 + \text{пр}_{x_1} D.$$

Если $\lambda_1 = 1$, то очевидно, что решение уравнения (5) существует тогда и только тогда, когда $\text{пр}_{x_1} D = \{d_1^*\} = 0$. В этом случае $\text{пр}_{x_1} Z_0$ — произвольный отрезок в R^1.

Пусть $\lambda_1 = -1$. Обозначим $\text{пр}_{x_1} Z_0 = [x_1^-, x_1^+]$, $\text{пр}_{x_1} D = [d_1^-, d_1^+]$. Тогда

$$x_1^- = -x_1^+ + d_1^-, \; x_1^+ = -x_1^- + d_1^+,$$

откуда следует, что $d_1^- = d_1^+ = d_1^*$, т. е. D можно рассматривать как множество размерности $n-1$. В этом случае $\text{пр}_{x_1} Z_0 = [x_1^*, d_1^* - x_1^*]$, где $x_1^* \leq \dfrac{d_1^*}{2}$ — произвольная постоянная.

2. Пусть $\lambda_1 = \pm 1$ — корень кратности k. Тогда по аналогии с предыдущим случаем рассмотрим проекции на ось x_1 и получим, что при $\lambda_1 = 1$ множество D должно лежать в гиперплоскости $x_1 = 0$ и $\text{пр}_{x_1} Z_0$ — произвольный отрезок, а при $\lambda_1 = -1$ множество D должно лежать в гиперплоскости $x_1 = d_1^*$ и $\text{пр}_{x_1} Z_0 = [x_1^*, d_1^* - x_1^*]$, где $x_1^* \leq \dfrac{d_1^*}{2}$.

Пусть $e_1^1 = 0$, тогда

$$\text{пр}_{x_2} Z_0 = \text{пр}_{x_2}(JZ_0 + D) = \text{пр}_{x_2} JZ_0 + \text{пр}_{x_2} D = \lambda_1 \text{пр}_{x_2} Z_0 + \text{пр}_{x_2} D.$$

По аналогии с предыдущим при $\lambda_1 = 1$ множество D должно лежать в гиперплоскости $x_2 = 0$ и $\text{пр}_{x_2} Z_0$ — произвольный отрезок, а при $\lambda_1 = -1$ множество D должно лежать в гиперплоскости $x_2 = d_2^*$ и $\text{пр}_{x_2} Z_0 = [x_2^*, d_2^* - x_2^*]$, где $x_2^* \leq \dfrac{d_2^*}{2}$.

Предположим теперь, что $e_1^1 = 1$. Пусть $e_{\nu,\mu} = \left(\dfrac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}}, \dfrac{\mu}{\sqrt{\nu^2 + \mu^2}}, 0, \ldots, 0 \right)^T \in R^n$, $x_{\nu,\mu}$ — прямая в гиперплоскости (x_1, x_2), проходящая через точку $(0,0)$, определяемая вектором $e_{\nu,\mu}$. Тогда

$$\text{mes}(\text{пр}_{x_2} Z_0) = \text{mes}\,(\text{пр}_{x_2}(JZ_0 + D)) = \text{mes}\,(\text{пр}_{x_2} JZ_0) + \text{mes}\,(\text{пр}_{x_2} D) =$$

$$= c(JZ_0, e_{0,1}) + c(JZ_0, -e_{0,1}) + \text{mes}\,(\text{пр}_{x_2} D) = c(Z_0, J^T e_{0,1}) + c(Z_0, -J^T e_{0,1}) +$$

$$+\,\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D) = \left\{ J^T e_{0,1} = (1,\lambda_1,0,\ldots,0)^T = \sqrt{1+\lambda_1^2}\, e_{1,\lambda_1} = \sqrt{2}e_{1,\lambda_1} \right\} =$$

$$= \sqrt{2}[c(Z_0,e_{1,\lambda_1}) + c(Z_0,-e_{1,\lambda_1})] + \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D) = \sqrt{2}\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_{1,\lambda_1}}Z_0) + \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D) =$$

$$= \sqrt{2}(\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_{1,\lambda_1}}JZ_0) + \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_{1,\lambda_1}}D)) + \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D) =$$

$$= \sqrt{2}[c(Z_0,J^Te_{1,\lambda_1}) + c(Z_0,-J^Te_{1,\lambda_1})] + \sqrt{2}\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_{1,\lambda_1}}D) + \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D) =$$

$$= \left\{ J^Te_{1,\lambda_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(2\lambda_1,\lambda_1^2,0,\ldots,0)^T = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}e_{2\lambda_1,\lambda_1^2};\ \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_{1,\lambda_1}}D) = \right.$$

$$\left. = \mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D)|\cos\widehat{e_2,e_{1,\lambda_1}}| = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D) \right\} = \sqrt{5}\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_{2\lambda_1,\lambda_1^2}}Z_0) +$$

$$+\, 2\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D) = \ldots = \sqrt{n^2+1}\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_{n\lambda_1^{n-1},\lambda_1^n}}Z_0) + n\,\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D).$$

При $n\to\infty$ прямая $x_{n\lambda_1^{n-1},\lambda_1^n}$ стремится к прямой x_1, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}\,\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_{n\lambda_1^{n-1},\lambda_1^n}}Z_0)$$

существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_1}Z_0) = 0$, т. е. $\text{пр}_{x_1}Z_0 = \{x_1^*\}$. Таким образом, Z_0 можно рассматривать как множество размерности $n-1$. Кроме того,

$$\mathrm{mes}\,(\text{пр}_{x_2}D) = 0,$$

поэтому $\text{пр}_{x_2}D = \{d_2^*\}$.

Тогда

$$\text{пр}_{x_2}Z_0 = \text{пр}_{x_2}(JZ_0 + D) = \text{пр}_{x_2}JZ_0 + d_2^* = \lambda_1\text{пр}_{x_2}Z_0 + x_1^* + d_2^*.$$

По аналогии со случаем простого корня получим, что при $\lambda_1 = 1$ множество D должно лежать в гиперплоскости $d_2^* = -x_1^*$ и $\text{пр}_{x_2}Z_0$ — произвольный отрезок в R^1, при $\lambda_1 = -1$ множество $\text{пр}_{x_1}Z_0 = \left\{\frac{1}{2}d_1^*\right\}$, а $\text{пр}_{x_2}Z_0 = [x_2^*, (d_2^*+x_1^*) - x_2^*]$, где $x_2^* \le \dfrac{d_2^*+x_1^*}{2}$ — произвольная постоянная.

Таким образом, получим, что $\text{пр}_{x_i}D = \{d_i^*\}$ для всех $i = \overline{1,k}$. Пусть $i_1,\ldots,i_{m-1}$ — множество индексов, для которых $e_1^i = 0$ и $i_m = k$. Тогда $\text{пр}_{x_{i_j}}Z_0$ — произвольный отрезок, удовлетворяющий уравнению $\text{пр}_{x_{i_j}}Z_0 = \lambda_1\text{пр}_{x_{i_j}}Z_0 + x_{i_j-1}^* + d_{i_j}^*$, если $e_1^{i_j-1} = 1$, и $\text{пр}_{x_{i_j}}Z_0 = \lambda_1\text{пр}_{x_{i_j}}Z_0 + d_{i_j}^*$, если $e_1^{i_j-1} = 0$ (при этом полагаем, что $e_1^0 = 0$). Для всех остальных индексов $\text{пр}_{x_j} Z_0 = \{x_j^*\}$, где

$$x_j^* = \begin{cases} -d_{j+1}^*, & \text{если } \lambda_1 = 1, \\ \dfrac{x_{j-1}^* + d_j^*}{2}, & \text{если } \lambda_1 = -1 \text{ и } j \neq i_q + 1, \ q = \overline{1, m-1}, \\ \dfrac{d_j^*}{2}, & \text{если } \lambda_1 = -1 \text{ и } j = i_q + 1, \ q = \overline{1, m-1}. \end{cases}$$

Далее, в силу уравнения (5)

$$c(Z_0, \psi) = c(JZ_0 + D, \psi) = c(Z_0, J^T \psi) + c(D, \psi) \tag{11}$$

для всех $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k, 0, \ldots)^T$.

Пусть $\lambda_1 = 1$. Запишем равенство (11) подробнее:

$$c(Z_0, \psi) = \max_{x \in Z_0} \sum_{i=1}^{k} x_i \psi_i = \max(x_{i_1} \psi_{i_1} + \ldots + x_{i_m} \psi_{i_m}) + \sum_{\substack{i \in \overline{1,k} \\ i \neq i_q}} x_i^* \psi_i,$$

$$c(Z_0, J^T \psi) + c(D, \psi) = \max(x_{i_1} \psi_{i_1} + \ldots + x_{i_m} \psi_{i_m}) + \sum_{\substack{i \in \overline{1,k} \\ i \neq i_q}} x_i^* (\psi_i + \psi_{i+1}) + \sum_{i=1}^{k} d_i^* \psi_i.$$

Поскольку $d_1^* = 0, \ d_{i_q+1}^* = 0, \ q \in \overline{1, m-1}$, и $x_i^* = -d_{i+1}^*$ для всех остальных индексов, равенство (11) означает, что проекция множества Z_0 в пространстве $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$ — произвольный выпуклый компакт.

Пусть $\lambda_1 = -1$ и множество Z таково, что $Z_0 = Z + (x_1^*, \ldots \ldots, x_k^*, 0, \ldots, 0)^T$, где $(x_1^*, \ldots, x_k^*)^T$– решение системы (8). Тогда уравнение (11) эквивалентно уравнению

$$c(Z, \psi) = c(Z, J^T \psi)$$

или

$$\max((x_{i_1} - x_{i_1}^*)\psi_{i_1} + \ldots + (x_{i_m} - x_{i_m}^*)\psi_{i_m}) = \max[-((x_{i_1} - x_{i_1}^*)\psi_{i_1} + \ldots + (x_{i_m} - x_{i_m}^*)\psi_{i_m})].$$

Таким образом, проекция множества Z_0 в пространстве $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$– произвольный выпуклый компакт, симметричный относительно точки $(x_{i_1}^*, \ldots, x_{i_m}^*)$.

3. Пусть λ_1 — простой комплексный корень. Тогда в силу уравнения (5) получим

$$\text{пр}_{(x_1,x_2)} Z_0 = \text{пр}_{(x_1,x_2)} (JZ_0 + D) = J_1 \text{пр}_{(x_1,x_2)} Z_0 + \text{пр}_{(x_1,x_2)} D.$$

В этом случае J_1 — матрица поворота на угол $\varphi : \ \cos\varphi = \operatorname{Re}\lambda_1, \ \sin\varphi = \operatorname{Im}\lambda_1$. Очевидно, что $\operatorname{mes}(\text{пр}_{(x_1,x_2)} D) = 0$. Если $\text{пр}_{(x_1,x_2)} D$– отрезок и $\text{пр}_{(x_1,x_2)} JZ_0$– не отрезок, параллельный $\text{пр}_{(x_1,x_2)} D$, то $\operatorname{mes}(\text{пр}_{(x_1,x_2)}(JZ_0 + D)) > \operatorname{mes}(\text{пр}_{(x_1,x_2)} Z_0)$. Если отрезок

$\text{пр}_{(x_1,x_2)}JZ_0$ параллелен отрезку $\text{пр}_{(x_1,x_2)}D$, то $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$ также должен быть параллелен $\text{пр}_{(x_1,x_2)}JZ_0$, что невозможно, так как $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0$, а значит, угол поворота $\varphi \notin \{0, \pi\}$.

Таким образом, $\text{пр}_{(x_1,x_2)}D = (d_1^*, d_2^*)^T$, множество $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$ таково, что

$$\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 = J_1\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 + (d_1^*, d_2^*)^T. \tag{12}$$

Пусть множество $Z \in \operatorname{conv}(R^2)$ таково, что $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 = Z + (x_1^*, x_2^*)^T$, где $(x_1^*, x_2^*)^T$ — решение системы уравнений

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1^* \\ d_2^* \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Тогда уравнение (12) принимает вид $Z = J_1 Z$.

Пусть $x \in Z$ такова, что $||x|| = h(\{0\}, Z)$. Точка J_1x, получаемая из точки x путем поворота на угол φ относительно точки $(0,0)^T$, также принадлежит границе множества Z.

Таким образом, если $\varphi = 2\pi\dfrac{k}{m}$, где $\dfrac{k}{m}$ — несократимая дробь, то решениями уравнения являются „псевдо m-угольники". Под „псевдо m-угольником" будем понимать выпуклый компакт в R^2, который остается неизменным при повороте на угол $\dfrac{2\pi}{m}$ относительно начала координат. Очевидно, что круг произвольного радиуса с центром в точке $(0,0)^T$ является частным случаем „псевдо m-угольника".

В силу выпуклости множества Z очевидно, что

$$Z_m \subset Z \subset S_{||x||}(0),$$

где Z_m — правильный m-угольник с вершинами в точках $x, J_1x, \ldots, J_1^{m-1}x$.

Если $\varphi \neq 2\pi\dfrac{k}{m}$, то множество граничных точек $\{J_1^n x,\ n \in N\}$ расположено всюду плотно на окружности радиуса $||x||$ с центром в точке $(0,0)^T$. Следовательно, $Z = S_{||x||}(0)$.

4. Пусть λ_1 — комплексный корень кратности k. Тогда по аналогии с предыдущим случаем рассмотрим проекции на гиперплоскость (x_1, x_2) и получим, что множество D должно вырождаться в точку в гиперплоскости (x_1, x_2) и при этом $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0$ — произвольный выпуклый компакт в R^2, удовлетворяющий уравнению

$$\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 + (d_1^*, d_2^*)^T, \tag{14}$$

т. е. либо круг, либо „псевдо m-угольник" с центром в точке $(x_1^*, x_2^*)^T$.

Рассмотрим проекции на гиперплоскость (x_3, x_4). В силу уравнения (5) получим

$$\text{пр}_{(x_3,x_4)}Z_0 = \text{пр}_{(x_3,x_4)}(JZ_0 + D) = \text{пр}_{(x_3,x_4)}JZ_0 + \text{пр}_{(x_3,x_4)}D. \tag{15}$$

Если $e_1^1 = 0$, то по аналогии с предыдущим получим, что множество D должно вырождаться в точку в гиперплоскости (x_3, x_4) и при этом пр$_{(x_3,x_4)}Z_0$ — произвольный выпуклый компакт в R^2, удовлетворяющий уравнению, аналогичному (14), т. е. либо круг, либо „псевдо m-угольник" с центром в точке $(x_3^*, x_4^*)^T$.

Пусть $e_1^1 = 1$ и пр$_{x_1,\ldots,x_4}A$ — проекция множества $A \in \operatorname{conv}(R^n)$ в пространстве $x_1, \ldots, x_4$.

Выберем множество Z так, чтобы пр$_{x_1,\ldots,x_4}Z_0 = Z + (x_1^*, x_2^*, 0, 0)^T$, где $(x_1^*, x_2^*)^T$ — решение системы (13). Тогда из уравнения (15) следует

$$Z = J_* Z + D_1,$$

где

$$D_1 : \text{ пр}_{x_1,\ldots,x_4} D = D_1 + (d_1^*, d_2^*, 0, 0)^T,$$

$$J_* = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Если Z — решение данного уравнения, то Z также является решением уравнения

$$Z = J_*^n Z + (J_*^{n-1} D_1 + \ldots + D_1) \tag{16}$$

для всех $n \in N$. Матрица J_*^i имеет вид

$$J_*^i = \begin{pmatrix} \cos i\varphi & -\sin i\varphi & 0 & 0 \\ \sin i\varphi & \cos i\varphi & 0 & 0 \\ i\cos(i-1)\varphi & -i\sin(i-1)\varphi & \cos i\varphi & -\sin i\varphi \\ i\sin(i-1)\varphi & i\cos(i-1)\varphi & \sin i\varphi & \cos i\varphi \end{pmatrix}.$$

Кроме того, по свойствам операций в $\operatorname{conv}(R^n)$ получим

$$(J_*^{n-1} D_1 + \ldots + D_1) \supset (J_*^{n-1} + \ldots + E) D_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \cos i\varphi & -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \sin i\varphi & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sin i\varphi & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \cos i\varphi & 0 & 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} i\cos(i-1)\varphi & -\sum\limits_{i=2}^{n-1} i\sin(i-1)\varphi & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \cos i\varphi & -\sum\limits_{i=1}^{n-1} \sin i\varphi \\ \sum\limits_{i=2}^{n-1} i\sin(i-1)\varphi & \sum\limits_{i=1}^{n-1} i\cos(i-1)\varphi & \sum\limits_{i=1}^{n-1} \sin i\varphi & \sum\limits_{i=0}^{n-1} \cos i\varphi \end{pmatrix} D_1.$$

Таким образом, для любых точек $x = (x_1, \ldots, x_4)^T \in Z$ и $d = (0, 0, d_3, d_4)^T \in D_1$ точка $y = (y_1, \ldots, y_4)^T = J_*^n x + (J_*^{n-1} + \ldots + E)d \in Z$ для любого $n \in N$.

При этом

$$y_3 = nx_1\cos(n-1)\varphi - nx_2\sin(n-1)\varphi + x_3\cos n\varphi - x_4\sin n\varphi +$$

$$+ d_3\sum_{i=0}^{n-1}\cos i\varphi - d_4\sum_{i=1}^{n-1}\sin i\varphi,$$

$$y_4 = nx_1\sin(n-1)\varphi + nx_2\cos(n-1)\varphi + x_3\sin n\varphi + x_4\cos n\varphi +$$

$$+ d_3\sum_{i=1}^{n-1}\sin i\varphi + d_4\sum_{i=0}^{n-1}\cos i\varphi$$

или, если $x_1^2 + x_2^2 > 0$,

$$y_3 = n\sqrt{x_1^2+x_2^2}\cos((n-1)\varphi + \beta_{12}) + x_3\cos n\varphi - x_4\sin n\varphi +$$

$$+ d_3\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\cos\frac{n-1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} - d_4\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\sin\frac{n-1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$y_4 = n\sqrt{x_1^2+x_2^2}\sin((n-1)\varphi + \beta_{12}) + x_3\sin n\varphi + x_4\cos n\varphi +$$

$$+ d_3\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\sin\frac{n-1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} + d_4\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\cos\frac{n-1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$\cos\beta_{12} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\ \sin\beta_{12} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

В этом случае $y_3^2 + y_4^2 \to \infty$ при $n \to \infty$, что невозможно, так как Z — ограниченное множество. Следовательно, равенство (16) возможно, лишь когда $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z = (0,0)^T$, т. е. $\text{пр}_{(x_1,x_2)}Z_0 = (x_1^*, x_2^*)^T$. Тогда уравнение (15) сводится к следующему:

$$\text{пр}_{(x_3,x_4)}Z_0 = (x_1^*, x_2^*)^T + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\text{пр}_{(x_3,x_4)}Z_0 + \text{пр}_{(x_3,x_4)}D.$$

Аналогично случаю простого комплексного корня получаем $\text{пр}_{(x_3,x_4)}D = (d_3^*, d_4^*)^T$ и множество $\text{пр}_{(x_3,x_4)}Z_0$ — „псевдо m-угольник” или круг с центром в точке $(x_3^*, x_4^*)^T$.

Далее рассмотрим проекции на гиперплоскости $(x_{2i-1}, x_{2i}),\ i \le k$, и т. д. Таким образом, получим $\text{пр}_{(x_{2i-1},x_{2i})}D = (d_{2i-1}^*, d_{2i}^*)^T$ для всех $i = \overline{1,k}$. Пусть $i_1, \ldots, i_{m-1}$ — множество индексов, для которых $e_1^i = 0$ и $i_m = k$. Тогда пр$_{(x_{2i_j-1}, x_{2i_j})} Z_0$, $j \in \overline{1,m}$, — произвольный выпуклый компакт в R^2, удовлетворяющий уравнению, аналогичному (14), т. е. либо круг, либо „псевдо m-угольник” с центром в точке $(x^*_{2i_j-1}, x^*_{2i_j})^T$. Для всех остальных индексов пр$_{(x_{2i-1}, x_{2i})} Z_0 = (x^*_{2i-1}, x^*_{2i})^T$.

Для нахождения x_i^*, $i = \overline{1, 2k}$, получим систему

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_{2k}^* \end{pmatrix} = J_1 \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_{2k}^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1^* \\ \vdots \\ d_{2k}^* \end{pmatrix}.$$

Далее, в силу уравнения (5)

$$c(Z_0, \psi) = c(JZ_0 + D, \psi) = c(Z_0, J^T\psi) + c(D, \psi) \tag{17}$$

для всех $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k, 0, \ldots)^T$.

Пусть множество Z таково, что $Z_0 = Z + (x_1^*, \ldots, x_{2k}^*, 0, \ldots, 0)^T$. Тогда уравнение (17) эквивалентно уравнению

$$c(Z, \psi) = c(Z, J^T\psi) \tag{18}$$

для всех $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k, 0, \ldots)^T$.

Распишем данное равенство подробнее:

$$c(Z, \psi) = \max_{x \in \tilde{Z}} \sum_{i=1}^{2k} x_i \psi_i = \max((x_{2i_1-1} - x^*_{2i_1-1})\psi_{2i_1-1} + (x_{2i_1} - x^*_{2i_1})\psi_{2i_1} + \ldots$$

$$\ldots + (x_{2i_m-1} - x^*_{2i_m-1})\psi_{2i_m-1} + (x_{2i_m} - x^*_{2i_m})\psi_{2i_m}),$$

$$c(Z, J^T\psi) = \max\{(\psi_{2i_1-1}\cos\varphi + \psi_{2i_1}\sin\varphi)(x_{2i_1-1} - x^*_{2i_1-1}) +$$

$$+ (-\psi_{2i_1-1}\sin\varphi + \psi_{2i_1}\cos\varphi)(x_{2i_1} - x^*_{2i_1}) + \ldots$$

$$\ldots + (\psi_{2i_m-1}\cos\varphi + \psi_{2i_m}\sin\varphi)(x_{2i_m-1} - x^*_{2i_m-1}) +$$

$$+ (-\psi_{2i_m-1}\sin\varphi + \psi_{2i_m}\cos\varphi)(x_{2i_m} - x^*_{2i_m})\}.$$

Таким образом, равенство (18) означает, что проекция множества Z_0 в пространстве $x_{2i_1-1}, x_{2i_1}, \ldots, x_{2i_s-1}, x_{2i_s}$ — произвольный выпуклый компакт, сохраняющийся при повороте на угол φ в гиперплоскостях (x_{2i_j-1}, x_{2i_j}), $j = \overline{1,m}$, относительно точек $(x^*_{2i_j-1}, x^*_{2i_j})^T$.

Рассмотрим общий случай. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — различные собственные значения матрицы $X(T, 0)$, по модулю равные 1. Пусть k_j, $j = \overline{1,m}$, — размеры соответствующих клеток Жордана J_j. Найдем проекцию Z_1 множества Z_0 в пространстве $x_1, \dots, x_{m_0}$, где $m_0 = \sum_{j=1}^{m} k_j$. В силу изложенного выше, множество Z_1 по части переменных „вырождается” в точки, по переменным, соответствующим $\lambda = -1$, множество Z_1 симметрично относительно некоторой точки, по парам переменных, соответствующим корням вида $\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi$, множество Z_1 сохраняется при повороте на угол φ относительно некоторой точки.

Выберем произвольную точку $x_1^*, \dots, x_{m_0}^*$, принадлежащую множеству Z_1, и рассмотрим сечение множества Z_0 гиперплоскостями $x_1 = x_1^*, \dots, x_{m_0} = x_{m_0}^*$. В силу структуры матрицы J и множества D для нахождения данного сечения получим уравнение

$$Z_2 = \tilde{J} Z_2 + \tilde{D}, \tag{19}$$

где $\tilde{D}$ — сечение множества D (в силу изложенного выше множество $\tilde{D}$ не зависит от выбора точки $x_1^*, \dots, x_{m_0}^*$), матрица $\tilde{J}$ содержит лишь те клетки Жордана из матрицы J, которые соответствуют собственным значениям, по модулю меньшим 1. Поскольку $\rho(\tilde{J}) < 1$, уравнение (19) имеет единственное решение Z_2, которое не зависит от выбора точки $x_1^*, \dots, x_{m_0}^*$. Таким образом, $Z_0 = Z_1 \times Z_2$.

Пример 5. Рассмотрим линейное импульсное дифференциальное включение вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2\pi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \alpha(1+\cos t)\overline{S}_1(0),$$

$$\left.\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \end{pmatrix}\right|_{t=(2i-1)\pi} \in \begin{pmatrix} e^{-2\pi}-1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi}-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2}e^{-1}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + p\overline{S}_1(0),$$

где $\alpha = \dfrac{1+4\pi^2}{16\pi^3(e^{\frac{3}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})}$, $p = e^{\frac{1}{2}}$.

Уравнение (2) принимает вид

$$R_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} R_0 + \overline{S}_1(0).$$

$\lambda_{1,2} = 1$ и $\overline{S}_1(0)$ принадлежит гиперплоскостям $x_1 = 0,\ x_2 = 0$, поэтому $\text{пр}_{(x_1,x_2)} R_0$ — произвольный выпуклый компакт в R^2 и уравнение сводится к следующему:

$$\overline{R}_0 = \frac{1}{2}\overline{R}_0 + [-1, 1],\ \overline{R}_0 \in R^1,$$

решением которого является $\overline{R}_0 = [-2, 2]$. Таким образом,

$$R_0 = \text{пр}_{(x_1,x_2)} R_0 \times [-2, 2].$$

Что касается существования обычных периодических решений, то матрица $E-X(T,0)$ является вырожденной, однако периодические решения существуют для всех $d \in \overline{S}_1(0)$, так как

$$\operatorname{rank}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} & d_3 \end{array}\right) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = 1.$$

В этом случае система для нахождения x_0 вырождается в уравнение

$$\frac{1}{2}x_3 = d_3,\ d_3 \in [-1,1],$$

поэтому $X_0 = \{(x_1,x_2,x_3)^T : x_1,x_2 \in R,\ x_3 \in [-2,2]\}$.

Замечание 1. Если $\Lambda \geq 1$ и существует $\lambda_i = 1$, то в случае существования периодического R-решения обычные периодические решения существуют для всех $d \in D$.

Действительно, ранг расширенной матрицы

$$(E-J,d) = \left(\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{0} & d_1 \\ -e_i^1 & 0 & \ldots & 0 & \mathbf{0} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & e_i^{k-1} & 0 & \mathbf{0} & d_k \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \ddots & \vdots \end{array}\right)$$

равен рангу матрицы $E-J$ в силу того, что $d_1 = 0$ и $d_{j+1} = 0$ для всех $j \in \{1,\ldots,k-1\}$ таких, что $e_i^j = 0$, в противном случае $d_j = d_j^* = \text{const}$.

4. Соотношение между множествами X_0 и R_0. В силу изложенного выше очевидно, что уравнение (2) может иметь не единственное решение, поэтому введем в рассмотрение множество R^*, представляющее собой объединение множеств R_0, определяемых уравнением (2).

Покажем, что в случае, когда R^* существует, $X_0 \subset R^*$.

Использовав представление (4) для матрицы $X(T,0)$, по аналогии с (5) получим, что уравнение (3) эквивалентно следующему:

$$y = Jy + d, \text{ где } d \in D,\ y = Mx_0.$$

В силу „клеточной” структуры матрицы J это уравнение распадается на s независимых уравнений вида

$$y^i = J_i y^i + d^i,\ i = \overline{1,s}. \tag{20}$$

Для тех i, для которых $|\lambda_i| > 1$, вектор d^i выбирается из одноточечного множества и в силу систем (8) – (10) множества $Y_0 = MX_0$ и $Z^* = MR^*$ совпадают по переменным, соответствующим данному собственному значению. Кроме того, их можно рассматривать как множества более низкой размерности.

Пусть i таково, что $|\lambda_i| = 1$, тогда вектор d^i также выбирается из одноточечного множества, а составляющая множества Z_0 по соответствующим переменным не единственна и объединение множеств Z_0 заполняет все пространство по части переменных (по которым нет единственности). Что касается множества Y_0, то в случае, когда $\lambda_i \neq 1$, оно является одноточечным и, следовательно, Y_0 строго входит в Z^* по переменным, соответствующим данному собственному значению. Если же $\lambda_i = 1$, то в данном случае в системе (20) часть переменных оказываются свободными (а именно те, по которым Z_0 не единственно), поэтому Y_0 совпадает с Z^* по переменным, соответствующим данному собственному значению.

Рассмотрим множество I всех тех i, для которых $|\lambda_i| < 1$. По аналогии с (6) уравнения (20) при $i \in I$ эквивалентны уравнению

$$y^I(\varepsilon) = J_I(\varepsilon)y^I(\varepsilon) + d^I(\varepsilon), \qquad d^I(\varepsilon) \in D^I(\varepsilon) = LD^I,\ y^I = Ly^I, \tag{21}$$

где y^I — вектор, состоящий из векторов $y^i,\ i \in I,\ D^I$ и J_I определяются аналогично.

По данным переменным для каждого $d^I(\varepsilon) \in D^I(\varepsilon)$ решение уравнения (21) единственно, так как матрица $E - J_I(\varepsilon)$ невырождена. Покажем, что $Y(\varepsilon) = LY_0$ является подмножеством $Z^*(\varepsilon) = LZ^*$ по соответствующим переменным.

Множество $Z^I(\varepsilon)$ — непустой выпуклый компакт, поэтому оно является полным метрическим пространством. Отображение $\phi(y) = J_I(\varepsilon)y + d^I(\varepsilon),\ d^I(\varepsilon) \in D^I(\varepsilon)$ является отображением сжатия, так как

$$\rho(\phi(y_1), \phi(y_2)) = \rho(J_I(\varepsilon)y_1 + d^I(\varepsilon), J_I(\varepsilon)y_2 + d^I(\varepsilon)) \leq ||J_I(\varepsilon)||\rho(y_1, y_2),$$

а $||J_I(\varepsilon)|| < 1$. Поэтому ϕ имеет в $Z^I(\varepsilon)$ единственную неподвижную точку. Таким образом, по соответствующим переменным $Y(\varepsilon) \subset Z^*(\varepsilon)$, а следовательно, $X_0 \subset R^*$. Как следует из примера 1, в общем случае множества $Y(\varepsilon)$ и $Z^*(\varepsilon)$ не совпадают.

Замечания. 2. Полученные результаты очевидным образом переносятся на случай измеримых $A(t)$ и $F(t)$.

3. Частными случаями импульсного дифференциального включения (1) являются линейное дифференциальное включение ($B_i = 0,\ P_i = 0$ для всех i) и линейное дискретное включение ($A(t) \equiv 0,\ F(t) \equiv 0$).

4. Если $F(t)$ и P_i являются одноточечными множествами (т. е. (1) — линейное импульсное дифференциальное уравнение), то уравнения (2) и (3) задают различные объекты: (3) — периодическое решение, (2) — периодический пучок решений.

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations // World Sci. Ser. A: Nonlinear Sci., — 1995. — **14**. — 462 p.
2. *Lakshmikantham V., Bainov D. D., and Simeonov P. S.* Theory of impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1989. — 275 p.
3. *Erbe L., Krawcewicz W.* Existence of solutions to boundary value problems for impulsive second order differential inclusions // Rocky Mt. J. Math. — 1992. — **22**, № 2. — P. 519 – 539.
4. *Tarafdar E., Watson P. J.* Periodic solutions of impulsive differential equations. — Moscow: Nauka, 1988. — 448 c.
5. *Панасюк А. И., Панасюк В. И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных систем управления. — Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1977. — 206 с.

6. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.

7. *Благодатских В. И., Филиппов А. Ф.* Дифференциальные включения и оптимальное управление // Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы. — М.: Наука, 1985. — С. 194 – 252.

8. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 475 с.

9. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.

10. *Борисович Ю. Г, Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Многозначные отображения // Итоги науки и техники Мат. анализ / ВИНИТИ. — 1982. — **19**. — С. 127 – 130.

11. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. — М.:Наука, 1988. — 448 с.

Получено 14.09.2004