УДК 517.938

ІСНУВАННЯ ФУНКЦІЙ ГРІНА – САМОЙЛЕНКА ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Г. М. Кулик

Нац. техн. ун-т України "КПІ"
Україна, 02057, Київ, пр. Перемоги, 37

В. Л. Кулик

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3
Сідлез. техн. ун-т, Польща

We study the question of existence of a Green – Samoilenko function for some linear extensions of dynamical systems.

Досліджуються питання існування функції Гріна – Самойленка для деяких лінійних розширень динамічних систем.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a\cos\varphi + b\sin\varphi,$$
$$\frac{dx}{dt} = \left(a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j\cos j\varphi + b_j\sin j\varphi)\right)x \tag{1}$$

з деякими дійсними коефіцієнтами $a, b, a_j, b_j, j = \overline{0,n}, i = \overline{1,n}$. Задача полягає в тому, щоб знайти умови на ці коефіцієнти, при яких система (1) має безліч різних функцій Гріна – Самойленка. Нагадаємо (див. [1]), що функцією Гріна – Самойленка системи $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\frac{dx}{dt} = A(\varphi)x$, в якій $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in \mathbf{R}^n$, $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$, називається функція вигляду $G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \le 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \tau > 0, \end{cases}$ якщо тільки при деякій неперервній $n \times n$-вимірній матриці $C(\varphi) \in C(\mathcal{T}_m)$ виконується оцінка $\|G_0(\tau,\varphi)\| \le K\exp\{-\gamma|\tau|\}$ з додатними сталими K, γ, не залежними від $\tau \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$. Тут $\varphi_\tau(\varphi))$ — розв'язок задачі Коші $\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$, $\varphi_t(\varphi)\big|_{t=0} = \varphi$, $\Omega_\tau^t(\varphi)$ — матрицант лінійної системи $\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x$, нормований при $t = \tau$, $\Omega_\tau^t(\varphi)\big|_{t=\tau} = I_n$ — одинична матриця. Цікаві глибокі теоретичні дослідження питань існування і властивостей функції $G_0(\tau,\varphi)$ проведено в роботах [2, 3]. Однак навіть у скалярному випадку $n = 1$ і $m = 1$ існують системи, для яких не вдається відповісти на питання: існує функція Гріна – Самойленка $G_0(\tau,\varphi)$ чи не існує? Для системи вигляду (1) вдалося детально виявснити питання існування функції $G_0(\tau,\varphi)$, тобто при довільно фіксованих дійсних числах a, b, a_j, b_j, $j = \overline{0,n}$, $i = \overline{1,n}$, і відповісти на питання: чи існує єдина функція Гріна – Самойленка, чи існує безліч таких функцій, чи взагалі не існує? Дану статтю і присвячено дослідженню цих питань.

Відмітимо, що якщо в системі (1) $a = b = 0$, то ця система може мати лише єдину функцію Гріна при умові $a_0 + \sum\limits_{j=1}^{n} (a_j \cos j\varphi + b_j \sin j\varphi) \neq 0 \ \ \forall \varphi \in \mathbf{R}$.

Припустимо, що $a^2 + b^2 \neq 0$, і позначимо

$$M_1 = a_1 \cos\theta - b_1 \sin\theta + a_3 \cos 3\theta - b_3 \sin 3\theta + \ldots + a_{2l-1} \cos(2l-1)\theta - b_{2l-1} \sin(2l-1)\theta, \tag{2}$$

$$M_2 = a_0 + a_2 \cos 2\theta - b_2 \sin 2\theta + a_4 \cos 4\theta - b_4 \sin 4\theta + \ldots + a_{2m} \cos 2m\theta - b_{2m} \sin 2m\theta, \tag{3}$$

де

$$\max\{2l-1, 2m\} = n, \qquad \sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{4}$$

Має місце наступне твердження.

Теорема. *При виконанні нерівності*

$$|M_1| < |M_2| \tag{5}$$

система (1) має єдину функцію Гріна – Самойленка, а якщо виконується нерівність

$$M_1 > |M_2|, \tag{6}$$

то система (1) має безліч різних функцій Гріна – Самойленка. У всіх інших випадках $|M_1| = |M_2|$, $M_1 < -|M_2|$ *система (1) функцій Гріна – Самойленка не має.*

Доведення. У випадку, коли $a^2+b^2 \neq 0$, систему (1) зведемо до більш простого вигляду

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= \sin\varphi, \\ \frac{dx}{dt} &= \left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j \cos j\varphi + \beta_j \sin j\varphi) \right) x, \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{a_0}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \alpha_j = \frac{a_j}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos j\theta - \frac{b_j}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin j\theta, \\ \beta_j &= \frac{a_j}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin j\theta + \frac{b_j}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos j\theta, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned} \tag{8}$$

При цьому використано позначення (4) і перехід до нових змінних: $\varphi+\theta \to \varphi, t\cdot\sqrt{a^2+b^2} \to$ $\to t$.

Слід зауважити, що існування функції Гріна – Самойленка системи (1) еквівалентно існуванню такої ж функції для системи (7).

Нехай $\varphi_t(\varphi)$ — розв'язок рівняння $\dfrac{d\varphi}{dt} = \sin\varphi$ з початковою умовою $\varphi_t(\varphi)\big|_{t=0} = \varphi$. Оскільки $\varphi_t(\pi n) \equiv \pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, то для довільних значень $t, \tau \in \mathbf{R}$ і для кожного фіксованого значення $\varphi \in \mathbf{R}$ виконується нерівність

$$|\varphi_t(\varphi) - \varphi_\tau(\varphi)| < \pi. \tag{9}$$

На підставі викладеного вище можна стверджувати обмеженість інтеграла:

$$\left| \int\limits_\tau^t f(\sigma,\varphi)\sin\varphi_\sigma(\varphi)d\sigma \right| \le |f|_0 \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int\limits_\tau^t |\sin\varphi_\sigma(\varphi)|\, d\sigma, \quad \tau \le t \\ \displaystyle\int\limits_t^\tau |\sin\varphi_\sigma(\varphi)|\, d\sigma, \quad \tau \ge t \end{array} \right\} \le$$

$$\le |f|_0 |\varphi_t(\varphi) - \varphi_\tau(\varphi)| < \pi |f|_0 \tag{10}$$

для кожної неперервної і обмеженої функції $f(t,\varphi)$, $|f|_0 = \sup|f(t,\varphi)|$.

Позначимо

$$A_1 = \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2l-1}, \quad A_2 = \alpha_0 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2m}, \quad \max\{2l-1, 2m\} = n. \tag{11}$$

Легко переконатися, що мають місце рівності

$$\begin{gathered} \cos(2j+1)\varphi = \cos\varphi - 2\sin(j+1)\varphi\sin j\varphi, \quad j = \overline{1, l-1}, \\ \cos 2i\varphi = 1 - \sin^2 i\varphi, \quad i = \overline{1, m}, \end{gathered} \tag{12}$$

які далі будуть потрібні для оцінок відповідних інтегралів.

Матрицант $\Omega_0^t(\varphi)$ у випадку системи (7) є скалярною функцією

$$\Omega_0^t(\varphi) = \exp\left\{ \int\limits_0^t \left[\left(\alpha_0 + \sum_{j=1}^n (\alpha_j \cos j\varphi_\sigma(\varphi) + \beta_j \sin j\varphi_\sigma(\varphi)) \right) \right] d\sigma \right\},$$

яку з урахуванням позначень (11) і перетворень (12) запишемо у вигляді

$$\Omega_0^t(\varphi) = e^{A_2} t \left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^t \sin^2\frac{\varphi}{2} \right)^{-A_1} F(t,\varphi), \tag{13}$$

де

$$F(t,\varphi) = \exp\left\{ \int\limits_0^t \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_j \sin i\varphi_\sigma(\varphi) - \sum_{j=1}^{l-1} 2\alpha_{2j+1} \sin(j+1)\varphi_\sigma(\varphi) \sin j\varphi_\sigma(\varphi) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{m} 2\alpha_{2i} \sin^2 i\varphi_\sigma(\varphi) \right) d\sigma \right\}.$$

Оскільки $\left|\dfrac{\sin j\varphi}{\sin\varphi}\right| \leq j$, то

$$\int\limits_\tau^t |\sin j\varphi_\sigma(\varphi)|\, d\sigma \leq j\pi, \quad \left| \int\limits_\tau^t |\sin j\varphi_\sigma(\varphi) \sin(j-1)\varphi_\sigma(\varphi)|\, d\sigma \right| \leq (J+1)\pi,$$

а це означає, що функція $F(t,\varphi)$ є обмеженою: $0 < F(t,\varphi) \leq \sup F(t,\varphi) = |f|_0 < \infty$. Слід відмітити, що для будь-якої дійсної сталої A виконується нерівність

$$\left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^t \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^A \leq e^{|At|} \tag{14}$$

при всіх $t \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{R}$. Дійсно, якщо $A > 0$, то маємо

$$\frac{\left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^t \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^A}{e^{|t|A}} = \left(e^{-t-|t|}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{t-|t|} \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^A \leq 1,$$

якщо ж $A < 0$, то

$$\left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^t \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-|A|} \leq e^{|A||t|} \Leftrightarrow \left(e^{-t-|t|}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^{t-|t|} \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^A \geq 1.$$

Тепер повернемось до позначень (11) і припустимо, що виконується нерівність

$$A_2 > |A_1|. \tag{15}$$

Тоді для функції

$$G_t(0,\varphi) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -\Omega_0^t(\varphi), & t < 0, \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ -e^{-A_2 t}\left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^t \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-A_1} F(t,F), & t < 0, \end{cases}$$

буде виконуватись оцінка $|G_t(0,\varphi)| \leq K \exp\{-(A_2 - |A_1|)|t|\}$. Це означає, що система (7) має єдину функцію Гріна – Самойленка $G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} 0, & \tau \leq 0, \\ -\Omega_\tau^0(\varphi), & \tau > 0. \end{cases}$ У випадку виконання нерівності

$$A_2 < |A_1| \tag{16}$$

система (7) також має єдину функцію Гріна – Самойленка $G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi), & \tau \le 0, \\ 0, & \tau > 0. \end{cases}$

Оскільки обидві нерівності (15) і (16) можна записати у вигляді однієї нерівності $|A_2| < < |A_1|$, то, враховуючи позначення (2) – (4) і (8) , приходимо до нерівності (5), виконання якої і дозволяє стверджувати існування єдиної функції Гріна – Самойленка для системи (1).

Тепер спробуємо встановити такі значення сталих A_1, A_1, при яких існує безліч різних скалярних функцій $c(\varphi) \in C(\mathcal{T}_1)$, для яких виконуються одночасно дві оцінки:

$$\begin{aligned} &|\Omega_0^t(\varphi)c(\varphi)| \le Ke^{-\gamma t}, \qquad t \ge 0, \\ &|\Omega_0^t(\varphi)(c(\varphi)-1)| \le Ke^{\gamma t}, \quad t < 0, \end{aligned} \tag{17}$$

при деяких додатних сталих K, γ. Позначимо

$$\omega(t,\varphi;A) = \left(e^{-t}\cos^2\frac{\varphi}{2} + e^t\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{-A} \tag{18}$$

і переконаємося, що для кожного значення $A > 0$ існують функції $c(\varphi) \in (\mathcal{T}_1)$, для яких одночасно виконуються дві оцінки

$$\begin{aligned} &|\omega(t,\varphi;A)c(\varphi)| \le Ke^{-At}, \qquad t \ge 0, \\ &|\omega(t,\varphi;A)(c(\varphi)-1)| \le Ke^{At}, \quad t < 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Якщо такі функції існують, то для них виконуються нерівності

$$\begin{aligned} &|c(\varphi)| \le K\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^A, \\ &|c(\varphi)-1| \le K\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^A. \end{aligned} \tag{20}$$

Зауважимо, що кожна функція $c(\varphi)$, яка задовольняє нерівності (20), буде також задовольняти оцінки (19).

Тепер, позначаючи через $[A]$ цілу частину числа A і вибираючи $k = \max[A], 1$, функції $c(\varphi)$, які задовольняють нерівності (14), запишемо у вигляді тригонометричних многочленів

$$c(\varphi) = \Theta\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right), \quad \Theta(x) = \frac{\int_x^1 \sigma^k(1-\sigma)d\sigma}{\int_0^1 \sigma^k(1-\sigma)d\sigma}.$$

Безпосередньо можна переконатися, що многочлен $\Theta(x)$ має наступні властивості:

$$1-\Theta(x)\equiv\Theta(1-x)=\frac{\int\limits_0^x\sigma^k(1-\sigma)d\sigma}{\int\limits_0^1\sigma^k(1-\sigma)d\sigma}=x^{k+1}M(x),$$

де $M(x)$ — деякий многочлен степеня k. Звідси і випливає, що для функції $\Theta\left(\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right)$ виконуються одночасно дві оцінки (20).

Для функцій $c(\varphi)\in C(\mathcal{T}_1)$, які задовольняють оцінки (20) з додатною сталою $A = A_1$, розглянемо ліву частину нерівностей (17). Враховуючи позначення (13), обмеженість функції $F(t,\varphi)$ і оцінки (19), отримуємо

$$|\Omega_0^t(\varphi)c(\varphi)|\le Ke^{A_2t-A_1t},\qquad t\ge 0,$$
$$|\Omega_0^t(\varphi)(c(\varphi)-1)|\le Ke^{A_2t+A_1t},\quad t<0.$$

Таким чином, для виконання оцінок (17) з багатьма різними скалярними функціями $c(\varphi)$ і додатною сталою γ потрібно виконання нерівностей $A_2-A_1<0$, $A_2+A_1>0$, тобто $A_1>|A_2|$. Ця нерівність для початкової системи (1) і відповідає нерівності (6). Тепер покажемо, що в усіх інших випадках $|A_1|=|A_2|$ і $A_1<|A_2|$ система (7) функцій Гріна – Самойленка не має. Дійсно, якщо $|A_1|=|A_2|$, то при значенні $\varphi=0$ або $\varphi=\pi$ права частина системи (7) перетворюється в тотожний нуль, а це означає, що функція Гріна – Самойленка не існує. Якщо ж виконується нерівність $A_1<|A_2|$, то спряжена до системи (7) система буде мати безліч різних функцій Гріна – Самойленка. Це означає, що система (7) не має жодної функції Гріна – Самойленка.

Теорему доведено.

Як приклад, що ілюструє застосування доведеної теореми, розглянемо систему

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sin\varphi,\quad \frac{dx}{dt}=\left(0,5+\sum_{j=1}^N\frac{1}{j}\sin\left(j\varphi+\frac{\pi}{4}\right)\right)x,$$

яка при $N=4$ має єдину функцію Гріна – Самойленка, а при $N=5$ — безліч таких функцій.

Зауваження. Функції $c(\varphi)$ вигляду

$$c(\varphi)=\Theta_{m,n}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\right),\quad \Theta_{m,n}(z)=\frac{\int\limits_z^1\sigma^{m-1}(1-\sigma)^{n-1}d\sigma}{\int\limits_0^1\sigma^{m-1}(1-\sigma)^{n-1}d\sigma},$$

при натуральних значеннях m, n більших від 1 одночасно задовольняють дві оцінки

$$|c(\varphi)| \leq K\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^n,$$
$$|c(\varphi)-1| \leq K\left(\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)^m$$

з деякою сталою $K > 0$, оскільки функція має властивості

$$\Theta_{m,n}(z) = 1 - \frac{\int\limits_0^z \sigma^{m-1}(1-\sigma)^{n-1}d\sigma}{\int\limits_0^1 \sigma^{m-1}(1-\sigma)^{n-1}d\sigma} = 1 - z^m\Phi_1(z),$$

$$\Theta_{m,n}(1-z) = \frac{\int\limits_0^z \sigma^{m-1}(1-\sigma)^{n-1}d\sigma}{\int\limits_0^1 \sigma^{m-1}(1-\sigma)^{n-1}d\sigma} = z^n\Phi_2(z),$$

де $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ — деякі многочлени.

Якщо, наприклад, $n = 3$, $m = 4$, то функція $c(\varphi)$ вигляду

$$c(\varphi) = -10\cos^{12}\frac{\varphi}{2} + 24\cos^{10}\frac{\varphi}{2} - 15\cos^8\frac{\varphi}{2} + 1$$

задовольняє оцінку $|c(\varphi)| \leq K\sin^6\frac{\varphi}{2}$.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 270 с.
2. *Самойленко А. М.* К вопросу существования единственной функции Грина линейного расширения динамической системы на торе // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 4. — С. 513 – 521.
3. *Бойчук А. А.* Условие существования единственной функции Грина – Самойленко задачи об инвариантном торе // Там же. — 2001. — **53**, № 4. — С. 556 – 559.

Одержано 10.11.2003