УДК 517.9

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І ЛІНІЙНИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТІВ

М. І. Гром'як

Тернопіл. пед. ун-т
Україна, 46009, Тернопіль, вул. Карпенка, 10

We prove a theorem on existence of a solution, which is continuously differentiable and bounded on $\mathbb{R}^2$, of a partial differential system with linearly transformed arguments.

Доведено теорему існування неперервно диференційовного та обмеженого на $\mathbb{R}^2$ розв'язку системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і лінійно перетвореними аргументами.

1. Вступ. У даній роботі досліджуються питання, пов'язані з існуванням неперервно диференційовного та обмеженого на $\mathbb{R}^2$ розв'язку системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і лінійно перетвореними аргументами. Для деяких аналогічних рівнянь ці проблеми розглядались у роботах [1–5].

2. Основна теорема. Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними і лінійно перетвореними аргументами вигляду

$$u_t(t,x) = Au(t,x) + Bu_x(t,x) + Cu(\lambda t + a, \mu x + b) +$$
$$+ Du_t(\lambda t + a, \mu x + b) + Fu_x(\lambda t + a, \mu x + b) + f(t,x), \tag{1}$$

де λ, a, μ, b — деякі дійсні сталі, A, B, C, D, F — сталі $(n \times n)$-матриці, вектор-функція $f(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ є неперервною і обмеженою на $\mathbb{R}^2$ (періодичною по t, x). Основною метою статті є встановлення умов існування неперервно диференційовного по t, x розв'язку $\gamma(t,x)$, що належить класу C^∞ по x і є обмеженим на $\mathbb{R}^2$ (періодичним по t, x).

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) власні значення $\lambda_i, i = 1, \ldots, n$, матриці A такі, що мають місце співвідношення $\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda_1) > 0$, $j = 1, \ldots, p$, $\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda_2) < 0$, $j = p+1, \ldots, n$, де Λ_1, Λ_2 — сталі $(p \times p)$- і $(n-p \times n-p)$-матриці;

2) λ — довільне дійсне число $(\lambda \neq 0), 0 < |\mu| < 1$;

3) $|D| + \dfrac{2L}{a}(|B| + |C + DA| + |F|) < 1$, де L, a — додатні сталі;

4) вектор-функція $f(t,x)$ неперервна по t, належить класу C^∞ по x і

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial^i f(t,x)}{\partial x^i} \right| \leq K, \ \ i = 0, 1, \ldots,$$

де K — деяка додатна стала.

Тоді система рівнянь (1) має обмежений на $\mathbb{R}^2$ розв'язок, що є неперервно диференційовним по t і належить класу C^∞ по x.

Доведення. Розв'язок системи (1) будемо шукати у вигляді

$$u(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\nu(\tau,x)d\tau, \tag{2}$$

де матрична функція $G(t)$ визначається співвідношеннями

$$G(t) = \begin{cases} -S^{-1}\mathrm{diag}(e^{\Lambda_1 t}, 0)S, & t < 0, \\ S^{-1}\mathrm{diag}(0, e^{\Lambda_2 t})S, & t > 0, \end{cases}$$

і $\nu(t,x)$ — деяка, поки що невідома, неперервна і обмежена на $\mathbb{R}^2$ вектор-функція, що належить класу C^∞ по x.

Оскільки

$$u_t(t,x) = Au(t,x) + \nu(t,x), \tag{3}$$

$$u_x(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\nu_x(\tau,x)d\tau, \tag{4}$$

то, підставляючи (2) – (4) в (1), одержуємо

$$\begin{aligned} \nu(t,x) = {} & D\nu(\lambda t + a, \mu x + b) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)B\nu_x(\tau,x)d\tau + \\ & + \lambda(C + DA) \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\nu(\lambda\tau + a, \mu x + b)d\tau + \\ & + \lambda\mu F \int_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\nu_x(\lambda\tau + a, \mu x + b)d\tau + f(t,x). \end{aligned} \tag{5}$$

Таким чином, для доведення теореми достатньо показати, що система рівнянь (5) має неперервний і обмежений на $\mathbb{R}^2$ розв'язок, що належить класу C^∞ по x.

Для побудови розв'язку системи рівнянь (5)застосуємо метод послідовних наближень, які визначимо за допомогою співвідношень

$$\nu^0(t,x) = 0,$$

$$\nu^m(t,x) = D\nu^{m-1}(\lambda t + a, \mu x + b) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)B\nu_x^{m-1}\tau, x)d\tau +$$

$$+ \lambda(C + DA)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\nu^{m-1}(\lambda\tau + a, \mu x + b)d\tau +$$

$$+ \lambda\mu F\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\lambda(t-\tau))\nu_x^{m-1}(\lambda\tau + a, \mu x + b)d\tau + f(t,x), \ m = 1,2,\ldots. \quad (6)$$

Покажемо, що при всіх $m \geq 1$ і $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ виконуються оцінки

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2} |\nu^m(t,x) - \nu^{m-1}(t,x)| \leq K\eta^{m-1},$$

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^i \nu^m(t,x)}{\partial x^i} - \frac{\partial^i \nu^{m-1}(t,x)}{\partial x^i}\right| \leq K\eta^{m-1}, \ i = 1,2,\ldots, \quad (7)$$

де $\eta = |D| + \dfrac{2L}{a}(|B| + |C + DA| + |F|) < 1.$

Дійсно, оскільки на підставі співвідношень (6) при $m = 1$ маємо

$$\nu^1(t,x) - \nu^0(t,x) = f(t,x),$$

$$\frac{\partial^i \nu^1(t,x)}{\partial x^i} - \frac{\partial^i \nu^0(t,x)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i f(t,x)}{\partial x^i}, \ i = 1,2,\ldots,$$

то, беручи до уваги умову 4, одержуємо

$$\left|\nu^1(t,x) - \nu^0(t,x)\right| = |f(t,x)| \leq K,$$

$$\left|\frac{\partial^i \nu^1(t,x)}{\partial x^i} - \frac{\partial^i \nu^0(t,x)}{\partial x^i}\right| = \left|\frac{\partial^i f(t,x)}{\partial x^i}\right| \leq K, \ i = 1,2,\ldots.$$

Звідси випливає

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2} \left|\nu^1(t,x) - \nu^0(t,x)\right| \leq K,$$

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial^i \nu^1(t,x)}{\partial x^i} - \frac{\partial^i \nu^0(t,x)}{\partial x^i}\right| \leq K, \ i = 1,2,\ldots,$$

і, отже, оцінки (7) справджуються при $m = 1$.

Міркуючи за індукцією, припустимо, що оцінки (7) мають місце для деякого $m \geq 1$, і покажемо, що вони не зміняться при переході від m до $m+1$. Справді, враховуючи (6), умову 4 і (7), одержуємо

$$
\begin{aligned}
&| \, \nu^{m+1}(t,x) - \nu^m(t,x) \, | \leq \\
&\leq |D| \left| \nu^m(\lambda t + a, \mu x + b) - \nu^{m-1}(\lambda t + a, \mu x + b) \right| + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)||B| \left| \frac{\partial \nu^m(\tau,x)}{\partial x} - \frac{\partial \nu^{m-1}(\tau,x)}{\partial x} \right| d\tau + \\
&+ \lambda |C + DA| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))| \left| \nu^m(\lambda\tau + a, \mu x + b) - \nu^{m-1}(\lambda\tau + a, \mu x + b) \right| d\tau + \\
&+ \lambda\mu |F| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))| \left| \frac{\partial \nu^m(\lambda\tau + a, \mu x + b)}{\partial x} - \frac{\partial \nu^{m-1}(\lambda\tau + a, \mu x + b)}{\partial x} \right| d\tau \leq \\
&\leq |D| K\eta^{m-1} + |B| K\eta^{m-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| d\tau + \\
&+ \lambda |C + DA| K\eta^{m-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| d\tau + \lambda\mu |F| K\eta^{m-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| d\tau \leq \\
&\leq K\eta^{m-1} \left(|D| + \frac{2L}{a}|B| + \frac{2L}{a}|C + DA| + \frac{2L}{a}|F| \right) = K\eta^m,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^i \nu^{m+1}(t,x)}{\partial x^i} - \frac{\partial^i \nu^m(t,x)}{\partial x^i} \right| \leq \\
&\leq |D||\mu|^i \left| \frac{\partial^i \nu^m(\lambda t + a, \mu x + b)}{\partial x^i} - \frac{\partial^i \nu^{m-1}(\lambda t + a, \mu x + b)}{\partial x^i} \right| + \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)||B| \left| \frac{\partial^{i+1} \nu^m(\tau,x)}{\partial x^{i+1}} - \frac{\partial^{i+1} \nu^{m-1}(\tau,x)}{\partial x^{i+1}} \right| d\tau + \lambda |C + DA||\mu^i| \times \\
&\times \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda(t-\tau))| \left| \frac{\partial^i \nu^m(\lambda\tau + a, \mu x + b)}{\partial x^i} - \frac{\partial^i \nu^{m-1}(\lambda\tau + a, \mu x + b)}{\partial x^i} \right| d\tau +
\end{aligned}
$$

$$+\lambda|F||\mu^{i+1}|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(\lambda(t-\tau))|\left|\frac{\partial^{i+1}\nu^m(\lambda\tau+a,\mu x+b)}{\partial x^{i+1}}-\frac{\partial^{i+1}\nu^{m-1}(\lambda\tau+a,\mu x+b)}{\partial x^{i+1}}\right|d\tau\leq$$

$$\leq|D|K\eta^{m-1}+|B|K\eta^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(t-\tau)|d\tau+\lambda|C+DA|K\eta^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(\lambda(t-\tau))|d\tau+$$

$$+\lambda|F|K\eta^{m-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|G(\lambda(t-\tau))|d\tau\leq$$

$$\leq K\eta^{m-1}\left(|D|+\frac{2L}{a}|B|+\frac{2L}{a}|C+DA|+\frac{2L}{a}|F|\right)=K\eta^m,\ i=1,2,\ldots.$$

Із останніх співвідношень випливає

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2}\left|\nu^{m+1}(t,x)-\nu^m(t,x)\right|\leq K\eta^m,$$

$$\sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^2}\left|\frac{\partial^i\nu^{m+1}(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i\nu^m(t,x)}{\partial x^i}\right|\leq K\eta^m,\ i=1,2,\ldots.$$

Цим самим доведено, що оцінки (7) справжуються при всіх $m\geq 1$ і $(t,x)\in\mathbb{R}^2$.

Із (7) безпосередньо випливає, що ряди

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\nu^m(t,x)-\nu^{m-1}(t,x)\right],$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\partial^i\nu^m(t,x)}{\partial x^i}-\frac{\partial^i\nu^{m-1}(t,x)}{\partial x^i}\right],\ i=1,2,\ldots,$$

і, отже, послідовності $\nu^m(t,x)$, $\dfrac{\partial^i\nu^m(t,x)}{\partial x^i}$, $m=0,1,\ldots,i=1,2,\ldots$, рівномірно збігаються до деякої неперервної функції $\nu(t,x)$, що належить класу C^∞ по x і є розв'язком системи рівнянь (5) (в цьому можна переконатись, якщо перейти в (6) до границі при $m\to\infty$). Оскільки

$$\nu(t,x)=\sum_{m=1}^{\infty}\left[\nu^m(t,x)-\nu^{m-1}(t,x)\right],$$

то на підставі (7) одержимо

$$|\nu(t,x)|\leq\frac{K}{1-\eta},$$

тобто вектор-функція $\nu(t,x)$ є обмеженою при всіх $(t,x) \in \mathbb{R}^2$.

Теорему доведено.

Наслідок. *Якщо виконуються умови теореми 1, λ — довільне ціле число і вектор-функція $f(t,x)$ є T-періодичною по t, то розв'язок*

$$\gamma(t,x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau)\nu(\tau,x)d\tau$$

системи рівнянь (1) є також T-періодичним по t.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови 1, 3, 4 теореми 1, λ — довільне ціле число, $\lambda \geq 0$, $|\mu| = 1$ і вектор-функція $f(t,x)$ є T-періодичною по t і X-періодичною по x. Тоді система рівнянь (1) має T-періодичний по t і X-періодичний по x розв'язок, який є неперервно диференційовним по t і належить класу C^∞ по x.*

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Блащак Н. І.* Про періодичні розв'язки систем диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку з лінійними відхиленнями аргументів // Тези доп. Всеукр. конф. „Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 15 – 18 травня 1996 р.) — Київ, 1996. — С. 20.
3. *Блащак Н. І.* Про періодичні розв'язки диференціальних рівнянь гіперболічного типу. — Київ: Ін-т математики НАН України, 1996.
4. *Митропольский Ю. А., Хома Г. П., Громяк М. И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. — Киев, 1991. — 232 с.
5. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 120 с.

Одержано 27.02.2004