УДК 517.9

ТОПОЛОГІЧНА ЕНТРОПІЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ НА ПРОСТОРІ ОДНОВИМІРНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

С. Ф. Коляда

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3

We study the topological entropy of a dynamical system on the space of continuous maps on the interval. In particular, we show that zero topological entropy of a continuos map $f \in C(I)$ on the interval implies zero topological entropy of the map $F : \phi \mapsto f \circ \phi$, $\phi \in C(I)$ on the space of continuos maps.

Досліджуються властивості топологічної ентропії відображення $F : \phi \mapsto f \circ \phi$, $\phi \in C(I)$, що породжуються фіксованим неперервним відображенням $f \in C(I)$ відрізка прямої. Зокрема, показано, що топологічна ентропія $h(F) > 0$ тоді і тільки тоді, коли $h(f) > 0$.

Нехай $C(X)$ — множина всіх неперервних відображень компактного метричного простору (X, ρ) в себе. Позначимо через $C_U(X)$ та $C_H(X)$ простори на цій множині, що наділені відповідно рівномірною та хаусдорфовою метриками. Розглянемо дві природні можливості задати динамічну систему на цих просторах, що породжуються деяким фіксованим відображенням $f \in C(X)$.

А. Нехай відображення $\Psi \in C(C(X), C(X))$ таке, що $\Psi : \phi \mapsto \phi \circ f$ для будь-якої $\phi \in C(X)$. Безпосередньо за означенням відображення Ψ є рівномірно неперервним на метричному просторі $C_U(X)$. Відповідні динамічні системи топологічно прості в сенсі, що їх топологічна ентропія дорівнює нулю, незалежно від значення топологічної ентропії породжуючого відображення $f : X \to X$. Більш того, якщо f сюр'єктивне, то система $(C_U(X), \Psi)$ є ізометрією. Зазначимо, що коли $\phi \in C(X, \mathbb{C})$, то відповідне відображення Ψ асоціюється з лінійним оператором і має широке застосування, зокрема, в ергодичній теорії (див., наприклад, [1 – 3]).

Б. Нехай відображення $F \in C(C(X), C(X))$ таке, що $F : \phi \mapsto f \circ \phi$ для будь-якої $\phi \in \in C(X)$. Наскільки автору відомо, вперше такого роду відображення (для одновимірного випадку) почали досліджувати О. М. Шарковський та його учні (див., наприклад, [4 – 6]).

Оскільки відображення $F : \phi \mapsto f \circ \phi$ рівномірно неперервне на метричних просторах $C_H(X)$ та $C_U(X)$, то можемо досліджувати його топологічну ентропію (за означенням Боуена – Дінабурга, див.[2]), незважаючи на компактність цих просторів. Питання, що було поставлене автору О. М. Шарковським та спонукало до написання цієї статті, є таким: чи існує залежність між значеннями топологічної ентропії $h(F)$ та $h(f)$, зокрема, коли простір X є відрізком прямої?

Перш ніж сформулювати головний результат роботи, наведемо інший, більш формальний, підхід, в який, зокрема, вкладається спосіб Б.

Нехай X — компактний метричний простір, а 2^X — компактний простір усіх замкнених підмножин із X у топології Хаусдорфа. Для динамічної системи (X, T), де $T \in C(X)$, фактор-відображенням називають неперервне сюр'єктивне відображення $\pi : X \mapsto Y$ таке, що $S \circ \pi = \pi \circ T$ для деякого відображення $S \in C(Y)$. У свою чергу відображення S називають фактором T. Для будь-якої точки $y \in Y$ множина $\pi^{-1}(y)$ блукає по точках множини 2^X і T діє на цих множинах подібно тому, як S на Y. Квазіфактором системи (X, T) називають будь-яку підсистему $(2^X, T)$. Незважаючи на те, що динамічні властивості системи та її факторів пов'язані між собою, цього, взагалі кажучи, не можна сказати про систему та її деякий квазіфактор (більш детально див. [7–10]).

Нехай (X, g) та (X, f) — динамічні системи, де X — компактний метричний простір, а $g, f \in C(X)$. Розглянемо добуток-систему $(X^2, g \times f)$, де $X^2 := X \times X$. Задавши відображення $g \times f$ на просторі X^2, ми тим самим задамо його на будь-якій його підмножині (в тому числі і на всіх множинах, які будуть розглядатися нами пізніше). Більш того, оскільки $g \times f$ — неперервне відображення на X^2, то воно рівномірно неперервне на підмножинах X^2 у метриці Хаусдорфа.

Позначимо через $\mathrm{gr}(\phi)$ графік відображення $\phi \in C(X)$, тобто $\mathrm{gr}(\phi) := \{(x, y) \in X^2 : y \in \phi(x)\}$. Множина графіків усіх неперервних відображень $\mathrm{Gr}(X) := \{\mathrm{gr}(\phi) : \phi \in C(X)\}$ є підмножиною в 2^{X^2}. Коли g — гомеоморфізм, тоді одним із квазіфакторів динамічної системи $(X^2, g \times f)$ є і динамічна система $(\mathrm{Gr}(X), g \times f)$. Зокрема, якщо g — тотожне відображення, то маємо ту саму ситуацію, що і у випадку Б. Далі будемо розглядати лише цей випадок і писати, що маємо відображення $F : \phi \mapsto f \circ \phi$, уточнюючи, коли потрібно, на якому просторі.

Основною метою цієї статті є дослідження такого питання: чи існує взаємозв'язок між топологічною ентропією динамічних систем (X, f) та $(C(X), F)$? Зокрема, дається вичерпна відповідь на поставлене питання для одновимірної динамічної системи (I, f), де I — відрізок прямої.

Теорема 1. *Нехай X — компактний метричний простір, $f \in C(X)$, а $F \in C(C_H(X), C_H(X))$ таке, що $F : \phi \mapsto f \circ \phi$ для довільного $\phi \in C(X)$. Тоді топологічна ентропія $h(F)$ є додатною, якщо $h(f)$ — додатна. Якщо $X = I$, то $h(F) > 0$ тоді і тільки тоді, коли $h(f) > 0$, і може набувати лише значення 0 або $+\infty$.*

Топологічна ентропія. Нагадаємо означення Боуена–Дінабурга топологічної ентропії (див. [2]).

Нехай (Z, ρ) — метричний простір, а $f : Z \to Z$ — рівномірно неперервне відображення. Для будь-якого цілого $n \geq 1$ функція

$$\rho_n(x, y) := \max_{0 \leq j \leq n-1} \rho(f^j(x), f^j(y))$$

задає метрику на Z , що є еквівалентною до ρ.

Зафіксуємо $n \geq 0$ та $\varepsilon > 0$ і нехай K — деякий компакт у Z. Підмножину $E \subset K$ називають (n, f, ε)-*розділеною*, якщо для будь-яких двох різних точок $x, y \in E$ $\rho_n(x, y) > \varepsilon$. Підмножина $F \subset Z$ (n, f, ε)-*стягує* K, якщо для довільної точки $x \in K$ існує точка $y \in F$ така, що $\rho_n(x, y) \leq \varepsilon$. Зауважимо, що оскільки K — компакт, то множини E та F є скінченними.

Позначимо через $s_n(f, \varepsilon; K)$ максимальне число серед потужностей множин, що є (n, f, ε)-розділеними підмножинами з компакту K, а через $r_n(f, \varepsilon; K)$ мінімальне число серед потужностей множин, які (n, f, ε)-стягують компакт K.

Зауважимо, що для довільного $\varepsilon > 0$ та $n \geq 0$

$$r_n(f, \varepsilon; K) \leq s_n(f, \varepsilon; K) \leq r_n(f, \varepsilon/2; K),$$

а величини $\log s_0(f,\varepsilon;K)$ та $\log r_0(f,\varepsilon;K)$ також називають відповідно ε-ємністю та ε-ентропією (K,ρ) за Колмогоровим – Тіхоміровим [11]. Відповідно ε-ємність $(K,\rho_n) = \log s_n(f,\varepsilon;K)$ і ε-ентропія $(K,\rho_n) = \log r_n(f,\varepsilon;K)$.

Визначимо тепер *топологічну ентропію* $h(f,K)$ *для компактної підмножини* $K \subset Z$ як

$$h(f,K) := \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log s_n(f,\varepsilon;K) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(f,\varepsilon;K),$$

або

$$h(f,K) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\varepsilon\text{— ентропія } (K,\rho_n)] = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}[\varepsilon\text{— ємність } (K,\rho_n)].$$

Топологічна ентропія $h(f)$ відображення $f : Z \to Z$ визначається за формулою

$$h_\rho(f) = h(f) := \sup\{h(f,K) : K \subset Z \;\text{ і }\; K \text{ — компакт}\}.$$

Якщо $r'_n(f,\varepsilon;K)$ позначає мінімальне число серед потужностей множин із K, які (n,f,ε)-стягують компакт K, то тоді теж $r'_n(f,\varepsilon;K) \leq s_n(f,\varepsilon;K) \leq r'_n(f,\varepsilon/2;K)$ і $h(f,K) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log r'_n(f,\varepsilon;K)$ (див. [2]).

Відомо також, що для рівномірно еквівалентних метрик ρ_1 та ρ_2 (тобто таких, що відображення $\mathrm{id} : (X,\rho_1) \to (X,\rho_2)$ та $\mathrm{id} : (X,\rho_2) \to (X,\rho_1)$ є рівномірно неперервними) топологічна ентропія $h_{\rho_1}(X,f) = h_{\rho_2}(X,f)$. Коли ж метрика ρ_1 є сильнішою за метрику ρ_2, тоді $h_{\rho_1}(X,f) \geq h_{\rho_2}(X,f)$ (див., наприклад, [2]).

Нагадаємо означення метрик, що використовуються. Нехай $\Delta(\rho,A,B)$ позначає відстань Хаусдорфа між множинами A і B:

$$\Delta(\rho,A,B) := \max\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\rho(a,b); \sup_{a\in B}\inf_{b\in A}\rho(a,b)\}.$$

Тоді метрику

$$d_H(\phi_1,\phi_2) := \Delta(\rho, \mathrm{gr}\,\phi_1, \mathrm{gr}\,\phi_2)$$

називають метрикою Хаусдорфа на множині $C(X)$, а

$$d(\phi_1,\phi_2) := \max_{x\in X}\rho(\phi_1(x),\phi_2(x))$$

— рівномірною метрикою на множині $C(X)$.

Легко перевірити, що відображення $F : \phi \mapsto f\circ\phi$ рівномірно неперервне на обох метричних просторах $C_H(X)$, $C_U(X)$, і ми можемо досліджувати його топологічну ентропію.

Безпосередньо за означенням метрика Хаусдорфа є не слабкішою за рівномірну метрику, тобто $d(\phi_1,\phi_2) \geq d_H(\phi_1,\phi_2)$ для будь-яких $\phi_1,\phi_2 \in C(X)$. Більш того, вони є еквівалентними на будь-якій сім'ї одностайно неперервних відображень з $C(X)$, а отже, і на будь-якій компактній підмножині з $C(X)$. Таким чином, за означення топологічної ентропії $(C_U(X),F)$ та $(C_H(X),F)$ маємо таку рівність:

$$h_U(F) := h(F,C_U(X)) = h(F,C_H(X)) =: h_H(F).$$

Простори $C_U(X)$ та $C_H(X)$ взагалі можуть бути не компактними. Наприклад, коли $X = I$ є відрізком прямої, тоді простір $C_U(X)$ є повним метричним простором, але не цілком обмеженим, в той час як простір $C_H(X)$ не є повним метричним простором, але є цілком обмеженим. Проте навіть у загальному випадку (оскільки X — компактний метричний простір) простір $\overline{C_H(X)} \supset C_H(X)$, що є замиканням підмножини $C(X)$ компактного простору 2^X у метриці Хаусдорфа, є очевидно компактним. Рівномірно неперервне відображення $F : \phi \mapsto f \circ \phi$ на метричному просторі $C_H(X)$ однозначно продовжується до неперервного відображення на компактному просторі $\overline{C_H(X)}$ (для зручності будемо його також позначати через F).

Використавши такий загальний факт: коли компактний простір Y є замиканням простору Z, тоді для довільного неперервного відображення $T \in C(Y)$ топологічна ентропія $h(T, Y) = h(T, Z)$ (див., наприклад, [12]) ; як наслідок маємо

$$h(F) := h_U(F) = h_H(F) = h(F, \overline{C_H(X)}).$$

Виникає питання: чи є залежність між ентропією $h(F)$ та $h(f)$? Оскільки, як ми побачимо трохи пізніше, позитивність топологічної ентропії $h(f)$ є очевидною достатньою умовою для того, щоб $h(F) > 0$, то насправді проблема полягає в тому, чи є ця умова необхідною.

Хоча автор не знає відповіді на питання: які умови повинен задовольняти простір X, щоб умова $h(f) > 0$ була необхідною, коли $X = I$ є відрізком прямої, позитивну відповідь дає теорема 1, до доведення якої ми переходимо.

Доведення теореми 1. Перш за все зауважимо, що $h(F) \geq h(F|_{C_{\mathrm{con}}}(X))$, де $C_{\mathrm{con}}(X) := \{\phi \in C(X) : \phi(x) \equiv c,\ c \in X\}$. Множина $C_{\mathrm{con}}(X)$ є замкненою і F-інваріантною підмножиною в $C_H(X)$. Оскільки в цьому випадку $d_H(\phi_1, \phi_2) = |c_1 - c_2|$, то $h(F|_{C_{\mathrm{con}(X)}}) = h(f)$. Тоді очевидно, що з $h(f) > 0$ випливає $h(F) > 0$.

Для доведення другої частини теореми будемо розглядати компактний метричний простір (I^2, ρ) з евклідовою метрикою ρ. Нам також будуть потрібні допоміжні конструкції, аналогічні до [13] (див. також [14, 15]), де вперше було проведено дослідження ε-ентропії та ε-ємності, зокрема, для простору $C_H(I)$.

Розглянемо множину всіх замкнених кривих $\mathrm{Kp}(I^2) \subset I^2$, що мають такі властивості: якщо $\gamma \in \mathrm{Kp}(I^2)$, то для кожного $x \in I$ в γ існує точка з абсцисою x (тобто для довільного $x \in I$ $\gamma(x) \neq \emptyset$); якщо $\gamma \in \mathrm{Kp}(I^2)$, то множина точок в γ, що мають одну і ту ж фіксовану абсцису, є замкненим відрізком, що може бути точкою (тобто для довільного $x \in I$ $\gamma(x)$ — зв'язна множина).

Множину $\{(x, y) \in I^2 : x \in A, y \in B$, де $A, B \subset I$ є скінченними і включають кінці $I\}$ будемо називати решіткою квадрата I^2, а через $\mathcal{R}$ будемо позначати множину всіх решіток I^2. Далі будемо використовувати множини кривих $K_1 := \{\gamma : \exists\gamma_1 \in \mathrm{Kp}(I^2), \exists\gamma_2 \in \mathcal{R}$ такі, що $\gamma = \gamma_1 \cap \gamma_2$ і $\gamma(x)$ є непорожньою зв'язною множиною для всіх $x \in I\} = \{\gamma : \exists\gamma_0 \in \mathcal{R}$ така, що $\gamma \in \gamma_0$ і $\gamma(x)$ є непорожньою замкненою зв'язною множиною для всіх $x \in I\}$ та $K_2 := \{\gamma : \exists\gamma_0 \in \mathcal{R}$ така, що $\gamma \in \gamma_0$ і $\gamma(x)$ є непорожньою замкненою множиною для всіх $x \in I\}$. Легко перевірити, що $K_1 \subset K_2$.

Очевидно, що будь-яку криву γ з K_1 можна як завгодно точно апроксимувати графіком деякого неперервного відображення з $C(I)$ в метриці Хаусдорфа. Тому вона є графіком деякого (багатозначного) відображення з $\overline{C_H(I)}$. У той час цього не можна сказати про довільну криву γ з $K_2 \setminus K_1$, хоча вона також є графіком деякого (багатозначного) відображення, але такого, що не належить до $\overline{C_H(I)}$.

Позначимо через $C_H^*(I)$ простір всіх (багатозначних) відображень, графіком яких є деяка крива з K_2, що наділений хаусдорфовою метрикою. Зауважимо, що оскільки відображення F є рівномірно неперервним на множині K_2 в хаусдорфовій метриці, то воно рівномірно неперервне і на просторі $C_H^*(I)$.

А. Спочатку доведемо, що з $h(f) > 0$ випливає $h(F) = +\infty$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $n \geq 0$. Розіб'ємо квадрат I^2 максимальним числом вертикальних ліній $x = \alpha_i$ так, щоб відстань між сусідніми була більшою за ε (будемо вважати, що кінці відрізка I також належать до цієї множини, і позначимо кількість цих ліній через $s_0(\varepsilon; I)$). Розіб'ємо його також горизонтальними лініями $y = \beta_i, i = 1, 2, ..., s_n(f, \varepsilon; I)$, де β_i — точки з деякої підмножини $\mathrm{Sep}(n, f, \varepsilon; I) \in I$, що є (n, f, ε)-розділеною і має потужність $s_n(f, \varepsilon; I)$ (максимальну серед усіх (n, f, ε)-розділених підмножин з I). Це розбиття задає відповідну решітку множини

$$\Pi_A = \{(x, y) \in I^2 : x \in I, \min_{1 \leq i \leq s_n(f, \varepsilon; I)} \beta_i \leq y \leq \max_{1 \leq i \leq s_n(f, \varepsilon; I)} \beta_i\}$$

(позначимо її через P_A).

Розглянемо підмножину $K_1(P_A)$ всіх замкнених кривих з K_1, що належать до решітки P_A. Очевидно, що кожна крива з $K_1(P_A)$ є графіком деякого (багатозначного) відображення з $\overline{C_H(I)}$.

Розглянемо підмножину з $\overline{C_H(I)}$, елементами якої є всі відображення, графіком яких є крива з $K_1(P_A)$. Безпосередньо з побудови видно, що ця множина є (n, F, ε)-розділеною. Позначимо її через $\mathrm{Sep}(n, F, \varepsilon; \overline{C_H(I)})$ і наведемо очевидне (хоча і досить грубе) обмеження знизу кількості її елементів. Для зручності позначимо $p = s_n(f, \varepsilon; I),\ q = s_0(\varepsilon; I)$. Тоді

$$\#\,\mathrm{Sep}(n, F, \varepsilon; \overline{C_H(I)}) \geq p^{q-1}.$$

Оскільки $s_n(F, \varepsilon; \overline{C_H(I)}) \geq \#\,\mathrm{Sep}(n, F, \varepsilon; \overline{C_H(I)})$ і за припущенням топологічна ентропія $h(f) := \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} \log r_n(f, \varepsilon; I) > 0$, то

$$h(F) = h(F, \overline{C_H(X)}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(F, \varepsilon; \overline{C_H(I)}) \geq$$

$$\geq \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \#\,\mathrm{Sep}(n, F, \varepsilon; \overline{C_H(I)}) \geq$$

$$\geq \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{s_0(\varepsilon; I) - 1}{n} \log s_n(f, \varepsilon; I) = +\infty.$$

Б. Для доведення теореми залишилось показати, що з $h(f) = 0$ випливає $h(F) = 0$. Знову, як і в попередньому пункті, зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та $n \geq 0$. Розіб'ємо певним чином квадрат I^2 мінімальним числом вертикальних ліній $x = \alpha_i$ так, щоб відстань між сусідніми була не більшою за ε. Позначимо їх кількість через $r_0(\varepsilon; I)$) та будемо вважати, що кінці відрізка I також належать цьому розбиттю. Розіб'ємо також I^2 горизонтальними лініями $y = \beta_i, i = 1, 2, ..., r_n(f, \varepsilon; I)$, де β_i — точки з деякої підмножини $\mathrm{Sp}(n, f, \varepsilon; I) \subset I$, що (n, f, ε)-стягує I і має потужність $r_n(f, \varepsilon; I)$ (мінімальну кількість елементів серед усіх (n, f, ε)-стягуючих підмножин з I).

Це розбиття задає відповідну решітку множини

$$\Pi_B = \{(x, y) \in I^2 : x \in I, \min_{1 \le i \le r_n(f,\varepsilon;I)} \beta_i \le y \le \max_{1 \le i \le r_n(f,\varepsilon;I)} \beta_i\}$$

(позначимо її через P_B).

Із множини кривих K_2 виберемо підмножину $K_2(P_B)$ всіх тих кривих, що належать решітці P_A. Очевидно, що кожна така крива є графіком певного (багатозначного) відображення, що належить до $C_H^*(I)$.

Покажемо, що існує деяка (скінченна) підмножина в $C_H^*(I)$, елементами якої є відображення, графіки яких — деякі множини з $K_2(P_B)$, яка $(n, F, 2\varepsilon)$-стягує компакт $\overline{C_H(I)}$ [1].

Однією з таких $(n, F, 2\varepsilon)$-стягуючих компакт $\overline{C_H(I)}$ множин може бути підмножина відображень (позначимо її через $\mathrm{Sp}(n, F, 2\varepsilon; \overline{C_H(I)})$), відповідною множиною графіків якої є підмножина з $K_2(P_B)$ (позначимо її через Sp_B)

$$\{\gamma \in K_2(P_B) : \gamma(x) \equiv A_i, x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \text{ де } A_i \subset \mathrm{Sp}(n, f, \varepsilon; I), i = 1, ..., r_0(\varepsilon; I)\}.$$

Щоб довести це, достатньо довільному відображенню з $\overline{C_H(I)}$ вказати деякий елемент із множини $\mathrm{Sp}(n, F, 2\varepsilon; \overline{C_H(I)})$, який $(n, F, 2\varepsilon)$-стягує його, що ми зараз і зробимо.

Нехай ϕ — довільне відображення з $\overline{C_H(I)}$. Для деякої компактної підмножини $A \subset \subset I$ позначимо через $\mathrm{Sp}(n, f, \varepsilon; A)$ підмножину тих елементів множини $\mathrm{Sp}(n, f, \varepsilon; I)$, що (n, f, ε)-стягують A. Визначимо множину

$$\xi(\phi) := \{(x, y) : y = A_i \ \forall x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}], \ \text{ де } A_i = \mathrm{Sp}(n, f, \varepsilon; \phi(x)), i = 1, ..., r_0(\varepsilon; I)\}.$$

Тоді, очевидно, $\xi(\phi) \in \mathrm{Sp}_B$ і є графіком певного відображення $\xi \in \mathrm{Sp}(n, F, 2\varepsilon; \overline{C_H(I)})$. З побудови ξ видно, що для будь-якої точки $z_\phi \in \mathrm{gr}(\phi)$

$$\rho_n(z_\phi, \mathrm{gr}(\xi)) := \max_{0 \le j \le n-1} \rho(F^j(z_\phi), \mathrm{gr}(F^j(\xi))) \le \varepsilon,$$

а для будь-якої точки $z_\xi \in \mathrm{gr}(\xi)$

$$\rho_n(z_\xi, \mathrm{gr}(\phi)) := \max_{0 \le j \le n-1} \rho(F^j(z_\xi), \mathrm{gr}(F^j(\phi))) < 2\varepsilon.$$

Звідси випливає, що множина $\mathrm{Sp}(n, F, 2\varepsilon; \overline{C_H(I)})$ $(n, F, 2\varepsilon)$-стягує $\overline{C_H(I)}$.

Незважаючи на те, що точні оцінки потужності (кількості елементів) множини $\mathrm{Sp}(n, F, 2\varepsilon; \overline{C_H(I)})$ отримати важко, наведемо очевидне обмеження зверху, достатнє для наших цілей. Для зручності позначимо $p = r_n(f, \varepsilon; I), \ q = r_0(\varepsilon; I)$. Тоді

$$\# \, \mathrm{Sp}(n, F, 2\varepsilon; \overline{C_H(I)}) \le \left(\binom{p}{2} + p \right)^{q-1} \le p^{2(q-1)}.$$

[1] Зауважимо, що знайти в явному вигляді таку множину в самому просторі $\overline{C_H(I)}$, здається, досить важко.

Оскільки $r_n(F,2\varepsilon;\overline{C_H(I)}) \le \#\operatorname{Sp}(n,F,2\varepsilon;\overline{C_H(I)})$ і за припущенням топологічна ентропія $h(f) := \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\log r_n(f,\varepsilon;I) = 0$, то

$$h(F) = h(F,\overline{C_H(X)}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(F,2\varepsilon;\overline{C_H(I)}) \le$$

$$\le \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\#\operatorname{Sp}(n,F,2\varepsilon;\overline{C_H(I)}) \le$$

$$\le \lim_{\varepsilon\to 0}\limsup_{n\to\infty}\frac{2(r_0(\varepsilon,I)-1)}{n}\log r_n(f,\varepsilon;I) = 0.$$

Теорему доведено.

Споріднені питання та зауваження. 1. Деколи відображення $f \in C(I)$ називають топологічно хаотичним, якщо воно має періодичну орбіту, період якої не є степенем 2. Безпосередньо це пов'язано з порядком Шарковського на множині $\mathbb{N}\cup\{2^\infty\}$:

$$3 \succ 5 \succ 7 \succ \cdots \succ 2\cdot 3 \succ 2\cdot 5 \succ 2\cdot 7 \succ \cdots \succ 4\cdot 3 \succ 4\cdot 5 \succ 4\cdot 7 \succ \cdots \succ \cdots$$

$$\cdots \succ 2^n\cdot 3 \succ 2^n\cdot 5 \succ 2^n\cdot 7 \succ \cdots \succ \cdots \succ 2^\infty \succ \cdots \succ 2^n \succ \cdots \succ 4 \succ 2 \succ 1.$$

Нехай для $t \in \mathbb{N}\cup\{2^\infty\}$ $S(t) = \{k \in \mathbb{N} : t \succeq k\}$ ($S(2^\infty)$ — позначення для множини $\{1,2,4,\ldots,2^k,\ldots\}$) і для $f \in C(I)$ $P(f)$ — множина періодів його періодичних точок. Якщо $P(f) = S(t)$, то говорять, що відображення f має *тип* t.

Коли говорять про типи відображень, тоді розглядають їх впорядкованими за порядком Шарковського. Так, за згаданим означенням хаотичності відображення відрізка має додатну топологічну ентропію (топологічно хаотичне) тоді і тільки тоді, коли його тип є більшим ніж 2^∞ (теорема Місюревіча, див. [16, с.231]).

Зауважимо, що доведення теореми 1 тривіально узагальнюється для динамічної системи $(J\times I, \mathrm{id}\times f)$, де J, I — довільні замкнені відрізки прямої, а $f \in C(I)$. Позначимо відповідно через $C_H(J,I)$ простір на множині $C(J,I)$ неперервних відображень простору J у простір I, що наділений хаусдорфовою метрикою. Звідси отримуємо такий наслідок, що в свою чергу є узагальненням теореми 3 з [6][2].

Наслідок 1. *Нехай $f \in C(I)$, а $F \in C(C_H(J,I), C_H(J,I))$ таке, що $F : \phi \mapsto f\circ\phi$ для довільного $\phi \in C(J,I)$. Тоді топологічна ентропія $h(F) > 0$ тоді і тільки тоді, коли тип відображення f є більшим ніж 2^∞, і може набувати лише значення 0 або $+\infty$.*

2. Насамкінець повернемось знову до пункту Б. Нехай (I,g) та (I,f) — динамічні системи, де $g, f \in C(I)$. Розглянемо добуток-систему $(I^2, g\times f)$. Множина графіків усіх неперервних відображень на просторі I, тобто $\operatorname{Gr}(I) := \{\operatorname{gr}\phi := \{(x,y) \in I^2 : y \in \phi(x)\}; \phi \in C(I)\}$, є підмножиною в 2^{I^2}. Коли g — гомеоморфізм, тоді квазіфактором динамічної системи $(I^2, g\times f)$ є динамічна система $(\operatorname{Gr}(I), g\times f)$. Зокрема, коли g — тотожне відображення, тоді, як ми щойно показали, топологічна ентропія динамічної системи $(\operatorname{Gr}(I), \mathrm{id}\times f)$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли топологічна ентропія $(I^2, \mathrm{id}\times f)$

[2] Перша частина формулювання теореми 3 містить описку, замість $0 \le i < \infty$ повинно бути $0 \le i < k, k \in \mathbb{N}$ (див. зауваження 3 після доведення цієї теореми).

дорівнює нулю. Що можна сказати про топологічну ентропію квазіфакторів динамічної системи $(I^2, g \times f)$ у більш загальних випадках?

Автор висловлює щиру подяку О. М. Шарковському за цікаві стимулюючі дискусії, Max-Planck-Institut für Mathematik в Бонні (де ця стаття в основному була написана) за чудову атмосферу та сердечну підтримку, F. Blanchard, M. Lemanczyk за те, що привернули увагу до роботи [8], а також Ю. Томілову та L. Snoha за ряд суттєвих зауважень.

1. *Szlenk W.* On weakly* conditionally compact dynamical systems // Stud. Math. — 1979. — **66**. — P. 25 – 32.
2. *Walters P.* An introduction to ergodic theory. — New York: Springer, 1982. — ix+250 p.
3. *Weiss B.* Single orbit dynamics // CBMS Region. Conf. Ser. Math. 95. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. — x+113 p.
4. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1986. (Engl. transl.: Difference Equations and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer acad. publ., 1993. — xii+358 p.)
5. *Романенко О. Ю., Шарковський О. М.* Від одновимірних до нескінченновимірних динамічних систем: ідеальна турбулентність // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 12. — С. 1817 – 1842.
6. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Difference equations and dynamical systems generated by certain classes of boundary value problems // Proc. Steklov Inst. Math. — 2004. — **244**. — P. 264 – 279.
7. *Bauer W., Sigmund K.* Topological dynamics of transformations induced on the space of probability measures // Monatsh. Math. — 1975. — **79**. — P. 81 – 92.
8. *Glasner E., Weiss B.* Quasifactors of zero entropy systems // J. Amer. Math. Soc. — 1995. — **8**. — P. 665 – 686.
9. *Glasner E.* Quasifactors of minimal systems // Top. Meth. Nonlinear Anal. — 2000. — **16**. — P. 351 – 370.
10. *Glasner E.* Quasifactors of positive entropy systems // Isr. J. Math. — 2003. — **134**. — P. 365 – 380.
11. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-Энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. — 1959. — **14**. — P. 3 – 86. (Engl. transl.: ε-Entropy and ε-capacity of sets in functional spaces. Selected Works of A.N. Kolmogorov. — Dobrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. — **3**. — P. 3 – 86.)
12. *Kolyada S., Snoha L.* Topological entropy of nonautonomous dynamical systems // Random Comput. Dynam. — 1996. — **4**. — P. 205 – 233.
13. *Сендов Б. Х., Пенков Б. И.* ε-Энтропия и ε-емкость множества непрерывных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. — 1962. — **3**. — С. 15 – 18.
14. *Панов А. А.* Вычисление ε-энтропии для пространства непрерывных функций с хаусдорфовой метрикой // Мат. заметки. — 1977. — **21**. — С. 39 – 50.
15. *Бронштейн Е. М.* Метрическая энтропия некоторых множеств // Сиб. мат. журн. — 1997. — **38**. — С. 42 – 45.
16. *Alseda L., Llibre J., and Misiurewicz M.* Combinatorial dynamics and entropy in dimension one. — River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1993. (Second edition. — 2000. — xvi+415 p.)

Отримано 15.12.2003,
після доопрацювання — 28.05.2004