УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Л. И. Каранджулов

София, Болгария

For linear singularly perturbed systems of ordinary differential equations, we construct an asymptotic expansion of the solution by using the method of boundary functions. Using pseudoinverse matrices and projections we find all terms in the asymptotic expansion in the noncritical case.

Для лінійних сингулярно збурених систем звичайних диференціальних рівнянь побудовано асимптотичне розвинення розв'язку методом примежових функцій. За допомогою псевдообернених матриць і проекторів визначено всі члени асимптотичного розвинення у некритичному випадку.

1. Постановка задачи. В настоящей работе получены условия существования решения при $\varepsilon \to 0$ линейных краевых задач

$$\varepsilon \dot{x} = Ax + \varepsilon A_1(t)x + \varphi(t), \; t \in [a,b], \; 0 < \varepsilon \ll 1, \tag{1}$$

$$lx(\cdot) = h, \; h \in \mathrm{R}^m, \tag{2}$$

удовлетворяющих условиям:

У$_1$) $A_1(t)$ — $(n \times n)$-мерная матрица, $A_1(t) \in C^\infty[a,b], \varphi(t)$ — n-мерная вектор-функция, $\varphi(t) \in C^\infty[a,b]$;

У$_2$) A — $(n \times n)$-мерная постоянная матрица; если $\lambda_i, \; i = \overline{1,p}$, — собственные числа матрицы A кратности $k_i, k_1 + \ldots + k_p = n$, то предполагаем, что $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$;

У$_3$) l — линейный, m-мерный, ограниченный векторный функционал

$$l = \operatorname{col}(l^1, \ldots, l^m), l \in (C[a,b] \to R^n, R^m)\,.$$

При $\varepsilon = 0$ получаем вырожденную систему $Ax_0(t) + \varphi(t) = 0$. Из условия У$_2$) следует, что $\det A \neq 0$, поэтому вырожденная система имеет единственное решение $x_0(t) = -A^{-1}\varphi(t)$ (некритический случай). Это решение в общем случае нельзя подчинить краевому условию $lx_0(\cdot) = h$, и поэтому порождающая для (1), (2) краевая задача не имеет решений при любых $\varphi(t) \in C^\infty[a,b]$ и $h \in R^m$.

В настоящей работе получены условия разрешимости и построено асимптотическое решение задачи (1), (2). Найдены условия, при которых краевая задача (1), (2) имеет решение с одним пограничным слоем в окрестности точки $t = a$.

Отметим, что критический случай рассмотрен в работах [1, 2].

2. Асимптотическое разложение. Асимптотическое разложение решений задачи (1), (2) будем искать в виде ряда

$$x(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} [x_i(t) + \Pi_i(\tau)]\varepsilon^i, \quad \tau = \frac{t-a}{\varepsilon}, \tag{3}$$

где $x_i(t)$ и $\Pi_i(\tau)$ — неизвестные n-мерные вектор-функции. Через $\Pi_i(\tau)$ [3] обозначены пограничные функции в окрестности точки $t = a$. Они будут построены так, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ на сегменте $[a, b]$ выполняются неравенства

$$\|\Pi_i(\tau)\| \leq \gamma_i \exp(-\alpha_i \tau), \tag{4}$$

где γ_i и α_i, $i = 0, 1, 2, \ldots,$ — некоторые положительные постоянные, $\tau \geq 0$.

Формально подставляя ряд (3) в систему (1), для $x_i(t)$ получаем рекуррентные выражения

$$x_i(t) = \begin{cases} -A^{-1}\varphi(t), & i = 0; \\ A^{-1}(Lx_{i-1})(t), & i = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{5}$$

где L — дифференциальный оператор $Lx = \dfrac{d}{dt}x - A_1(t)x$.

Пограничные функции $\Pi_i(\tau)$ получаем как решения дифференциальных задач

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_i(\tau) = A\Pi_i(\tau) + f_i(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_b], \quad \tau_b = \frac{b-a}{\varepsilon}, \tag{6}$$

где

$$f_i(\tau) = \begin{cases} 0, & i = 0; \\ \sum\limits_{q=i-1}^{0} \dfrac{1}{q!}\tau^q A_1^{(q)}(a)\Pi_{i-1-q}(\tau), & i = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{7}$$

Подставим (3) в краевое условие (2). Тогда коэффициенты разложения (3) удовлетворяют краевым условиям

$$lx_i(\cdot) + l\Pi_i\left(\frac{(\cdot) - a}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} h, & i = 0; \\ 0, & i = 1, 2, \ldots . \end{cases} \tag{8}$$

Введем обозначения: $X(\tau) = \exp(A\tau)$ — нормальная фундаментальная матрица системы $\dfrac{dx}{d\tau} = Ax$, $\tau \in [0, \tau_b]$; $D(\varepsilon) = lX(\cdot) = lX\left(\dfrac{(\cdot) - a}{\varepsilon}\right)$ — $(m \times n)$-мерная матрица.

В зависимости от структуры матрицы $D(\varepsilon)$ можно рассмотреть следующие случаи:

$$D(\varepsilon) = D_0 + O\left(\varepsilon^q \exp(-\alpha/\varepsilon)\right), \ q \in N, \ \alpha > 0;$$

$$D(\varepsilon) = D_0 + \sum_{k=0}^{s} D_k\varepsilon^k + O\left(\varepsilon^q \exp(-\alpha/\varepsilon)\right), \ q \in N, \ \alpha > 0,$$

$D_k - (m \times n)$ – мерные постоянные матрицы;

$$D(\varepsilon) = D_0 + D_1(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + D_2(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right) + \ldots + D_s(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_s}{\varepsilon}\right), \tag{9}$$

где α_i — положительные постоянные такие, что $0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s$.

Первый случай рассмотрен в [4], второй — в [5]. В настоящей работе рассмотрим третий случай.

Обозначим $\alpha = \min\limits_i(\alpha_i)$ и $k = \max\limits_i(k_i)$.

При рассмотрении двухточечной или многоточечной краевой задачи действие оператора l приводит к виду (9).

Матрицы $D_i(\varepsilon)$ — $(m \times n)$-мерные, при этом D_0 — постоянная матрица. Элементы матрицы $D_i(\varepsilon)$, $i = \overline{1, s}$, — полиномы относительно ε^{-1} степени не выше $k-1$.

Рассмотрим систему (6) — (8) при $i = 0$. Тогда краевая задача относительно $\Pi_0(\tau)$ примет вид

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_0(\tau) = A\Pi_0(\tau), \quad l\Pi_0(\cdot) = h - lx_0(\cdot). \tag{10}$$

Общее решение $\Pi_0(\tau) = X(\tau)c_0$, $c_0 \in R^n$, системы (10) подставим в краевое условие и получим алгебраическую систему относительно c_0

$$D(\varepsilon)c_0 = h_0, \tag{11}$$

где $h_0 = h - l(x_0)$.

Учитывая вид $D(\varepsilon)$ (9), вектор c_0 ищем в виде

$$c_0 = c_{00} + c_{01}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + c_{02}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right) + \ldots + c_{0s}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_s}{\varepsilon}\right). \tag{12}$$

Из (11) получаем систему

$$Q(\varepsilon)\overline{c}_0(\varepsilon) = \overline{h}_0, \tag{13}$$

где $Q(\varepsilon)$ — $(qm \times (s+1)n)$-мерная блочная матрица, $2s+1 \leq q \leq \frac{1}{2}(s+1)(s+2)$, $s \in N$. Элементы матрицы $Q(\varepsilon)$ зависят от ε, но не имеют экспоненциально малых слагаемых. Вид блочной матрицы $Q(\varepsilon)$ весьма сложный. Например, при $s = 1$ имеем $q = 3m$, и если порядок приравнивания перед экспонентами такой :

$$\exp(0),\ \exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right),\ \exp\left(-\frac{\alpha_1+\alpha_1}{\varepsilon}\right),$$

то $(3m \times 2n)$-мерная матрица $Q(\varepsilon)$ имеет вид

$$Q(\varepsilon) = \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ D_1 & D_0 \\ 0 & D_1 \end{bmatrix}.$$

Если $\alpha_i = i\alpha_1$, $i = \overline{2, s}$, то $q = (2s+1)$, и если порядок приравнивания перед экспонентами такой :

$$\exp(0),\ \exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right),\ \exp\left(-\frac{2\alpha_1}{\varepsilon}\right),\ \ldots\ ,\exp\left(-\frac{(s+1)\alpha_1}{\varepsilon}\right),$$

то $((2s+1)m \times (s+1)n)$-мерная матрица $Q(\varepsilon)$ имеет вид

$$Q(\varepsilon) = \begin{bmatrix} D_0 & & & & \\ D_1(\varepsilon) & D_0 & & \mathbf{0} & \\ D_2(\varepsilon) & D_1(\varepsilon) & D_0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_s(\varepsilon) & D_{s-1}(\varepsilon) & D_{s-2}(\varepsilon) & \dots & D_0 \\ & D_s(\varepsilon) & D_{s-1}(\varepsilon) & \dots & D_1(\varepsilon) \\ & & D_s(\varepsilon) & \dots & D_2(\varepsilon) \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \vdots \\ & & & & D_s(\varepsilon) \end{bmatrix}.$$

Вектор $\overline{c}_0(\varepsilon)$ — $(s+1)n$-мерный,

$$\overline{c}_0 = (c_{00}, c_{01}(\varepsilon), c_{02}(\varepsilon), \dots, c_{0s}(\varepsilon))^T,$$

а вектор $\overline{h}_0$ — qm-мерный,

$$\overline{h}_0 = (h_0, \underbrace{0, \dots, 0, 0, \dots, 0}_{(q-1)m}).$$

Норму $(l \times m)$-мерной матрицы $B = [b_{ij}]$ определяем стандартным образом:

$$\|B\| = \max_i \sum_{j=1}^{m} |b_{ij}|.$$

2.1. Пусть выполнено условие

У$_4$) $\operatorname{rank} Q(\varepsilon) = qm = (s+1)n \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Тогда $\det Q(\varepsilon) \neq 0$. Поскольку $\|Q(\varepsilon)\| \leq K_1 \varepsilon^{-(k-1)}, K_1 > 0$, получим $\|Q^{-1}(\varepsilon)\| \leq$ $\leq K_2 \varepsilon^{k-1}$, $K_2 > 0$.

Решение (13) имеет вид

$$\overline{c}_0(\varepsilon) = Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_0 \Longrightarrow c_{0i}(\varepsilon) = \left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_0\right]_{n_{i+1}}, \ i = \overline{0, s},$$

где $\left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_0\right]_{n_1}$ — первые n_1 компонент, $\left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_0\right]_{n_2}$ — вторые n_2 компонент и так далее $(s+1)n$-мерного вектора $Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_0$.

Из (12) находим

$$c_0 = \sum_{i=0}^{s} \left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_0\right]_{n_{i+1}} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right), \ \alpha_0 = 0.$$

Очевидно, $\|c_0\| \le \beta_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right), \ \beta_0 > 0.$

Для $\Pi_0(\tau)$ получаем

$$\Pi_0(\tau) = X(\tau) \sum_{i=0}^{p} \left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_0\right]_{n_{i+1}} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right), \ \alpha_0 = 0. \tag{14}$$

Ясно, что пограничная функция $\Pi_0(\tau)$ экспоненциально убывает

$$\|\Pi_0(\tau)\| \le c_1 \exp(-\alpha\tau)\beta_0 \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) = c_0^* \exp\left(-\alpha\left(\tau + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right), \ c_0^* = c_1\beta > 0.$$

Рассмотрим краевую задачу относительно $\Pi_1(\tau)$

$$\frac{d}{d\tau}\Pi_1(\tau) = A\Pi_1(\tau) + f_1(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_b], \quad l\Pi_1 = -lx_1(\cdot), \tag{15}$$

где $f_1(\tau) = A_1(a)\Pi_0(\tau)$.

Подставляя общее решение

$$\Pi_1(\tau) = X(\tau)c_1 + \int_0^{\tau} X(\tau)X^{-1}(s)f_1(s)ds \tag{16}$$

дифференциальной системы (15) в краевое условие, получаем систему относительно c_1, аналогичную (11):

$$D(\varepsilon)c_1 = h_1(\varepsilon), \ c_1 \in R^n, \tag{17}$$

где

$$h_1(\varepsilon) = -lx_1(\cdot) - l \int_0^{\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}} X\left(\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}\right) X^{-1}(s)f_1(s)ds.$$

Поскольку $D(\varepsilon)$ имеет вид (9), а

$$h_1(\varepsilon) = h_{10} + h_{11}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + h_{12}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right) + \ldots + h_{0q}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{2\alpha_s}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ O\left(\varepsilon^p \exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\right), \ p \in Z, \ \beta > 2\alpha,$$

c_1 ищем в виде

$$c_1 = c_{10} + c_{11}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + \ldots + c_{1s}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_s}{\varepsilon}\right).$$

Из (17) получаем систему

$$Q(\varepsilon)\overline{c}_1 = \overline{h}_1, \tag{18}$$

где

$$\overline{c}_1 = (c_{10}, c_{11}(\varepsilon), c_{12}(\varepsilon), \ldots , c_{1s}(\varepsilon))^T \text{ — } (s+1)n\text{-мерный вектор,}$$

$$\overline{h}_1(\varepsilon) = (h_{10},\ h_{11}(\varepsilon), \ldots , h_{1q}(\varepsilon))^T \text{ — } qm\text{-мерный вектор.}$$

Решение системы (18)

$$\overline{c}_1 = Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_1(\varepsilon) \Longrightarrow c_{1i} = \left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_1\right]_{n_{i+1}},\ i = \overline{0, s},$$

подставляем в c_1 и из (16) получаем окончательное представление для $\Pi_1(\tau)$

$$\Pi_1(\tau) = X(\tau)\sum_{i=0}^{s}\left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_1(\varepsilon)\right]_{n_{i+1}}\exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right) + \int\limits_0^\tau X(\tau)X^{-1}(s)f_1(s)ds. \tag{19}$$

Пограничные функции $\Pi_i(\tau)$ строятся аналогично $\Pi_0(\tau)$ и $\Pi_1(\tau)$. Предположим, что определены пограничные функции $\Pi_k(\tau),\ k = \overline{0, i-1}$. Определим $\Pi_i(\tau)$.

Общее решение системы (6)

$$\Pi_i(\tau) = X(\tau)c_i + \int\limits_0^\tau X(\tau)X^{-1}(s)f_i(s)ds, \tag{20}$$

где $f_i(s)$ — выражение из (7), подставим в краевое условие (8) и для c_i получим алгебраическую систему

$$D(\varepsilon)c_i = h_i(\varepsilon),\ c_i \in R^n. \tag{21}$$

При этом

$$h_i(\varepsilon) = -lx_i(\cdot) - l\int\limits_0^{\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}} X\left(\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}\right)X^{-1}(s)f_i(s)ds.$$

Поскольку

$$h_i(\varepsilon) = h_{i0} + h_{i1}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + h_{i2}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}\right) + \ldots + h_{iq}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{2\alpha_s}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ O\left(\varepsilon^p\exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\right),\ p \in Z,\ \beta > 2\alpha,$$

c_i ищем в виде

$$c_i(\varepsilon) = c_{i0} + \sum_{k=1}^{s} c_{ik}(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\alpha_k}{\varepsilon}\right).$$

Из (21) получаем систему

$$Q(\varepsilon)\overline{c}_i = \overline{h}_i(\varepsilon), \tag{22}$$

где

$$\overline{c}_i = (c_{i0}, c_{i1}(\varepsilon), c_{i2}(\varepsilon), \ldots, c_{is}(\varepsilon))^T \text{ — } (s+1)\text{-мерный вектор},$$

$$\overline{h}_i(\varepsilon) = (h_{i0}, h_{i1}(\varepsilon) \ldots, h_{iq}(\varepsilon))^T \text{ — } qm\text{-мерный вектор}.$$

Решение системы (22)

$$\overline{c}_i = Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_i(\varepsilon) \Longrightarrow c_{ik} = \left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_i\right]_{n_k}, \quad i = \overline{0, s},$$

подставим в c_i и из (20) получим окончательное представление для $\Pi_i(\tau)$

$$\Pi_i(\tau) = X(\tau) \sum_{k=0}^{s} \left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_i(\varepsilon)\right]_{n_k} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right) + \int_0^{\tau} X(\tau)X^{-1}(s)f_i(s)ds. \tag{23}$$

Отметим, что $\alpha_0 = 0$.

Лемма [5]. *Пусть для матрицы A выполнено условие У$_2$), а для вектор-функции $f(t) \in C[0, +\infty)$ — неравенство $\|f(t)\| \leq c^* \exp(-\alpha^* t)$ при $t \geq 0$, $c^* > 0$, $\alpha^* > 0$. Тогда существуют положительные постоянные c и γ такие, что система $\frac{dx}{dt} = Ax + f(t)$ имеет частное решение вида*

$$\overline{x}(t) = \int_0^{+\infty} K(t,s)f(s)ds,$$

удовлетворяющее неравенству

$$\|\overline{x}(t)\| \leq ce^{-\gamma t}, \ t \geq 0, \tag{24}$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} X(t)X^{-1}(s), & \text{если } 0 \leq s \leq t < \infty; \\ 0, & \text{если } 0 < t < s \leq \infty. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия У$_1$) — У$_4$). Краевая задача (1), (2) имеет единственное асимптотическое разложение решения вида (3). Коэффициенты разложения*

$x_i(t)$ и $\Pi_i(\tau)$ имеют представления (5) и (14), (23) соответственно. Пограничные функции $\Pi_i(\tau)$ экспоненциально убывают при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Изложенное выше и перечисленные условия показывают, что коэффициенты разложение (3) для краевой задачи (1), (2) действительно имеют представления (5), (14), (23). Докажем, что функции $\Pi_i(\tau),\ i = 0, 1, \ldots$, экспоненциально убывают. Это справедливо для $\Pi_0(\tau)$.

Поскольку $f_1(s)$ — ограниченная функция , $\|c_1(\varepsilon)\| \le \beta_1 \exp(-\alpha/\varepsilon),\ \beta_1 \ge 0$, и выполнены неравенства $\|X(\tau)\| \le c_1 \exp(-\alpha\tau),\ \ \|X(\tau)X^{-1}(s)\| \le c_2 \exp(-\alpha(\tau - s))$, $0 \le s \le \le \tau < \infty$, применяя лемму, из (19) получаем оценку

$$\|\Pi_1(\tau)\| \le \|X(\tau)\| \left\| \sum_0^s \left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_1(\varepsilon)\right]_{n_{i+1}} \right\| \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ \int_0^\tau \|X(\tau)X^{-1}(s)\| \|f_1(s)\| ds \le$$

$$\le c_1 \exp(-\alpha\tau)\beta_1 \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ \int_0^\tau c_2 \exp\left(-\alpha\tau + \alpha s\right) a_1 c_0^* \exp(-\alpha s) \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) ds \le$$

$$\le c_1^*(\tau) \exp\left(-\alpha\left(\tau + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right),$$

где $c_1^*(\tau) = c_{10} + \tau c_{11},\ c_{10} = c_1\beta_1,\ c_{11} = c_2 a_1 c_0^*$.

Но $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} c_1^*(\tau) \exp\left(-\alpha\left(\tau + \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right) = 0$, т. е. пограничная функция $\Pi_1(\tau)$ экспоненциально убывает при $\varepsilon \to 0$.

Далее, пусть неравенство $\|\Pi_k(\tau)\| \le c_k^*(\tau) \exp(-\alpha(\tau + 1/\varepsilon))$ выполняется для $\tau \ge 0$ и $k = \overline{1, i-1}$. Поскольку

$$\|f_i(s)\| \le \left\| \sum_{q=i-1}^{0} \left[\frac{1}{q!} A_1^{(q)}(a) \Pi_{i-1-q}(s)\right] \right\| \le$$

$$\le a_{i-1}\|\Pi_0(s)\| + a_{i-2}\|\Pi_1(s)\| + \ldots + a_1\|\Pi_{i-1}(s)\| \le$$

$$\le \left[a_{i-1}c_0^* + a_{i-2}c_1^*(s) + \ldots + a_1 c_{i-1}^*(s)\right] \exp(-\alpha s) \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right),$$

из (23) и леммы получаем

$$\|\Pi_i(\tau)\| \le \|X(\tau)\| \left\| \sum_{k=0}^{p} \left[Q^{-1}(\varepsilon)\overline{h}_i(\varepsilon)\right]_{n_k} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right) \right\| +$$

$$+ \int\limits_0^\tau \|X(\tau)X^{-1}(s)\| \|f_i(s)\| ds \le$$

$$\le c_1 \exp(-\alpha\tau)\beta_i \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) + \sum_{k=1}^{i} c_{ik}\tau^i \exp(-\alpha\tau) \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \le$$

$$\le c_i^*(\tau) \exp(-\alpha\tau) \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right),$$

где $c_i^*(\tau) = \sum_{k=0}^{i} c_{ik}\tau^i$. Очевидно, $\lim\limits_{\tau\to\infty} \Pi_i(\tau) = 0$.

Можно доказать (см., например, [5]), что выполнена оценка

$$\|x(t,\varepsilon) - X_n(t,\varepsilon)\| \le O\left(\varepsilon^{n+1}\right),$$

где $X_n(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \left[x_i(t) + \Pi_i(\tau)\right] \varepsilon^i$. Это показывает, что ряд (3) с коэффициентами (5), (14), (23) асимптотический.

Теорема доказана.

2.2. Пусть выполнено условие

У$_5$) $\operatorname{rank} Q(\varepsilon) = n_1 < qm = (s+1)n \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Пусть $d = qm - n_1$, $r = (s+1)n - n_1$. Очевидно, $d = r$. Через $Q^+(\varepsilon)$ обозначим единственную псевдообратную матрицу к матрице $Q(\varepsilon)$ (см., например, [6, 7]). Поскольку $Q(\varepsilon) = P(\varepsilon)R(\varepsilon)$, где $P(\varepsilon)$ — $(qm \times n_1)$-мерная матрица, $R(\varepsilon)$ — $(n_1 \times (s+1)m)$-мерная матрица, то $\|Q(\varepsilon)\| \le K_1\varepsilon^{-2(k-1)}$, $K_1 > 0$. Тогда получаем $\|Q^+(\varepsilon)\| \le K_2\varepsilon^{2(k-1)}$, $K_2 > 0$. Введем матрицы-ортопроекторы $P_Q(\varepsilon) = E_{(s+1)n} - Q^+(\varepsilon)Q(\varepsilon)$, $P_{Q^*}(\varepsilon) = E_{qm} - Q(\varepsilon)Q^+(\varepsilon)$, для которых выполнены оценки $\|P_Q(\varepsilon)\| \le K_3$, $K_3 > 0$, $\|P_{Q^*}(\varepsilon)\| \le K_4$, $K_4 > 0$, для каждого ε. Ясно, что $\operatorname{rank} P_Q(\varepsilon) = r$ и $\operatorname{rank} P_{Q^*}(\varepsilon) = d$. Пусть $P_{Q_r}(\varepsilon)$ — $((s+1)n \times r)$-мерная матрица, составленная из r линейно независимых столбцов матрицы $P_Q(\varepsilon)$, и $P_{Q_d^*}(\varepsilon)$ — $(d \times qm)$-мерная матрица, составленная из d линейно независимых столбцов матрицы P_{Q^*}. Тогда для матриц $P_{Q_r}(\varepsilon)$ и $P_{Q_d^*}(\varepsilon)$ выполнены оценки $\|P_{Q_r}(\varepsilon)\| \le K_3$ и $\|P_{Q_d^*}(\varepsilon)\| \le K_4$.

В этом случае решение системы (13) имеет вид

$$\overline{c_0} = P_{Q_r}(\varepsilon)\xi_0 + Q^+(\varepsilon)\overline{h}_0, \ \xi_0 \in R^r \Longrightarrow c_{0i} = \left[P_{Q_r}(\varepsilon)\right]_{n_i} \xi_0 + \left[Q^+(\varepsilon)\overline{h}_0\right]_{n_i}$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие

У$_6$) $P_{Q_d^*}(\varepsilon)\overline{h}_0 = 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Из (12) получаем

$$c_0 = B_{00}(\varepsilon)\xi_0 + B_{01}(\varepsilon), \tag{25}$$

где

$$B_{00}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{s} [P_{Q_r}(\varepsilon)]_{n_i} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right), \ B_{01}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{s} \left[Q^+(\varepsilon)\overline{h}_0\right]_{n_i} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right).$$

Следовательно, выполнены неравенства

$$\|B_{00}(\varepsilon)\| \le \beta_2 \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right), \ \|B_{01}(\varepsilon)\| \le \beta_3 \varepsilon^{2(k-1)} \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right).$$

После подстановки (25) в $\Pi_0(\tau)$ пограничная функция примет вид

$$\Pi_0(\tau) = X(\tau)B_{00}(\varepsilon)\xi_0 + g_0(\tau), \ g_0(\tau) = X(\tau)B_{01}(\varepsilon). \tag{26}$$

Вектор ξ_0 определим с помощью $\Pi_1(\tau) = X(\tau)c_1 + \int\limits_0^\tau X(\tau)X^{-1}f_1(s,\xi_0)ds$, где

$$f_1(s,\xi_0) = A_1(a)X(\tau)B_{00}\xi_0 + A_1(a)g_0(s,\varepsilon).$$

Подставляя $\Pi_1(\tau)$ в краевое условие (15), для постоянного вектора получаем алгебраическую систему

$$D(\varepsilon)c_1 = h_1(\varepsilon,\xi_0),$$

где

$$h_1(\varepsilon,\xi_0) = -lx_1(\varepsilon) - l\int\limits_0^{\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}} X\left(\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}\right)X^{-1}(\varepsilon)B_{00}(\varepsilon)ds\xi_0 -$$

$$-l\int\limits_0^{\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}} X\left(\frac{(\cdot)-a}{\varepsilon}\right)X^{-1}(\varepsilon)A_1(a)g_0(s)ds.$$

Для $h_1(\varepsilon,\xi_0)$ имеем представление

$$h_1(\varepsilon,\xi_0) = \left(\tilde{h}_{11}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + \ldots + \tilde{h}_{1,q}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{2\alpha_s}{\varepsilon}\right)\right)\xi_0 +$$

$$+h_{10} + h_{11}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + \ldots + h_{1,q}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{2\alpha_s}{\varepsilon}\right) +$$

$$+O\left(\varepsilon^p\exp\left(-\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\right), \ p \in Z, \ \beta > 2\alpha.$$

Тогда c_1 ищем в виде

$$c_1(\varepsilon) = c_{10} + \sum_{k=1}^{s} c_{1k}(\varepsilon) \exp\left(-\frac{\alpha_k}{\varepsilon}\right).$$

Получаем систему

$$Q(\varepsilon)\overline{c}_1 = \overline{h}_1(\varepsilon, \xi_0), \tag{27}$$

где

$$\overline{h}_1(\varepsilon, \xi_0) = \left(h_{10},\ h_{11}(\varepsilon) + \tilde{h}_{11}(\varepsilon)\xi_0, \ldots, h_{1,q}(\varepsilon) + \tilde{h}_{1,q}(\varepsilon)\xi_0\right)^T.$$

Из условие разрешимости системы (27) $P_{Q_d^*}(\varepsilon)\overline{h}_1(\varepsilon, \xi_0) = 0 \ \forall \varepsilon$ находим систему для получение ξ_0

$$\overline{D}(\varepsilon)\xi_0 = \overline{b}_1(\varepsilon), \tag{28}$$

где

$$\overline{D}(\varepsilon) = P_{Q_d^*}(\varepsilon)\left(0, \tilde{h}_{11}(\varepsilon), \ldots, \tilde{h}_{1,q}(\varepsilon)\right)^T - (d \times r)\text{-мерная матрица,}$$
$$\overline{b}_1(\varepsilon) = P_{Q_d^*}(\varepsilon)\left(h_{10},\ h_{11}(\varepsilon) + \ldots + h_{1,q}(\varepsilon)\right)^T - qm\text{-мерный вектор.}$$

Отметим, что в $\overline{D}(\varepsilon)$, где $d = r$, и $\overline{b}_1(\varepsilon)$ не фигурируют экспоненциально малые элементы.

Пусть выполнено условие

У$_7$) $\det \overline{D}(\varepsilon) \neq 0$.

Тогда уравнение (28) имеет единственное решение

$$\xi_0 = \overline{D}^{-1}(\varepsilon)\overline{b}_1(\varepsilon),$$

которое подставим в (26), и для $\Pi_0(\tau)$ окончательно получим выражение

$$\Pi_0(\tau) = X(\tau)B_{00}(\varepsilon)\overline{D}^{-1}(\varepsilon)\overline{b}_1(\varepsilon) + g_0(\tau). \tag{29}$$

Поскольку выполнены неравенства

$$\|X(\tau)\| \leq c_1 \exp(-\alpha\tau),\ \|B_{00}(\varepsilon)\| \leq \beta_2 \exp(-\alpha/\varepsilon),\ \beta_2 > 0,$$

$$\|\overline{D}^{-1}(\varepsilon)\overline{b}_1(\varepsilon)\| \leq \beta_4\varepsilon^{s_1},\ \beta_4 > 0, \quad \|g_0(\tau)\| \leq \beta_3\varepsilon^{2(k-1)} \exp\left(-\alpha\left(\tau + 1/\varepsilon\right)\right), \qquad \beta_3 > 0,$$

существует постоянная $c_0^* > 0$ такая, что имеет место оценка

$$\|\Pi_0(\tau)\| \leq c_0^*\varepsilon^{\mu} \exp\left(-\alpha\left(\tau + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right).$$

Пограничная функция $\Pi_0(\tau)$ экспоненциально убывает при $\varepsilon \to 0$, так как

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\mu} \exp\left(-\alpha\left(\tau + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = 0.$$

Определим $\Pi_1(\tau)$. С помощью решения системы (27)

$$\overline{c_1} = P_{Q_r}(\varepsilon)\xi_1 + Q^{+}(\varepsilon)\overline{h}_1,\ \xi_1 \in R^r \Longrightarrow c_{1i} = \left[P_{Q_r}(\varepsilon)\right]_{n_i}\xi_1 + \left[Q^{+}(\varepsilon)\overline{h}_1\right]_{n_i}$$

получим

$$c_1 = B_{00}(\varepsilon)\xi_1 + B_{11}(\varepsilon),\ B_{11}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^{s}[Q^{+}(\varepsilon)\overline{h}_(\varepsilon)]_{n_i} \exp\left(-\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right).$$

Тогда $\Pi_1(\tau)$ примет вид

$$\Pi_1(\tau) = X(\tau)B_{00}(\varepsilon)\xi_1 + g_1(\tau,\varepsilon), \tag{30}$$

где

$$g_1(\tau,\varepsilon) = X(\tau)B_{11}(\varepsilon) + \int_0^{\tau} X(\tau)X^{-1}(s)f_1(s,\xi_0)ds.$$

Определим постоянный вектор ξ_1 с помощью пограничной функции $\Pi_2(\tau)$. Из (7) при $i = 2$ получим

$$f_2(\tau) = A_1(a)X(\tau)B_{00}(\varepsilon)\xi_1 + \tau A_1'(a)\Pi_0(\tau) + A_1(a)g_1(\tau,\varepsilon).$$

Подставив $\Pi_2(\tau)$ в краевое условие $l\Pi_2(\cdot) = -lx_2(\cdot)$, будем иметь

$$D(\varepsilon)c_2 = h_2(\varepsilon,\xi_1),$$

где

$$h_2(\varepsilon,\xi_1) = \left(\tilde{h}_{11}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + \ldots + \tilde{h}_{1,q}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{2\alpha_s}{\varepsilon}\right)\right)\xi_0 +$$

$$+\ h_{20} + h_{21}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_1}{\varepsilon}\right) + \ldots + h_{2,q}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{2\alpha_s}{\varepsilon}\right).$$

Тогда c_2 ищем в виде

$$c_2(\varepsilon) = c_{20} + \sum_{k=1}^{s} c_{2k}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{\alpha_k}{\varepsilon}\right).$$

Получаем систему

$$Q(\varepsilon)\overline{c}_2 = \overline{h}_2(\varepsilon, \xi_1), \tag{31}$$

где

$$\overline{h}_2(\varepsilon, \xi_1) = \Big(h_{20},\ h_{21}(\varepsilon) + \tilde{h}_{11}(\varepsilon)\xi_1, \dots, h_{2,q}(\varepsilon) + \tilde{h}_{1,q}(\varepsilon)\xi_1\Big)^T.$$

Из условия разрешимости уравнения (31)

$$P_{Q_d^*}(\varepsilon)\overline{h}_2(\varepsilon, \xi_1) = 0$$

получим

$$\overline{D}(\varepsilon)\xi_1 = \overline{b}_2(\varepsilon), \tag{32}$$

где $\overline{b}_2(\varepsilon) = P_{Q_d^*}(\varepsilon)\,(h_{20},\ h_{21}(\varepsilon), \dots, h_{2,q}(\varepsilon))^T$ — qm-мерный вектор.

Из условия $\text{У}_6)$ следует, что (32) имеет решение

$$\xi_1 = \overline{D}^{-1}(\varepsilon)\overline{b}_2(\varepsilon),$$

которое подставим в (30). В результате получим

$$\Pi_1(\tau) = X(\tau)B_{00}(\varepsilon)\overline{D}^{-1}(\varepsilon)\overline{b}_2(\varepsilon) + g_1(\tau, \xi_0). \tag{33}$$

Остальные пограничные функции определяются аналогичным способом.

Поскольку выполнены неравенства

$$\|\overline{D}^{-1}(\varepsilon)\overline{b}_2(\varepsilon)\| \le \beta_5\varepsilon^{s_1},\ \beta_5 > 0,\ \|X(\tau)B_{11}(\varepsilon)\| \le \beta_6\varepsilon^{s}\exp\left(-\alpha(\tau + 1/\varepsilon)\right),\ \beta_6 > 0,$$

$$\|f_1(\tau, \xi_0)\| \le \gamma_1\varepsilon^{\overline{s}}\exp(-\alpha(\tau + 1/\varepsilon)),$$

$$\left\|\int\limits_0^\tau X(\tau)X^{-1}(s)f_1(s, \xi_0)ds\right\| \le c_2\gamma_1\varepsilon^{\overline{s}}\tau\exp(-\alpha(\tau + 1/\varepsilon)),$$

существуют положительные постоянные $c_1^*,\ \mu_1$ такие, что

$$\|\Pi_1(\tau)\| \le c_1^*\varepsilon^{\mu_1}\exp\left(-\alpha\left(\tau + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right),$$

т. е. пограничная функция $\Pi_1(\tau)$ экспоненциально убывает при $\varepsilon \to 0$.

Асимптотическая оценка устанавливается, как в [5].

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия У1) – У3), У5) – У7). Краевая задача (1), (2) имеет единственное асимптотическое разложение решения вида (3). Коэффициенты разложения* $x_i(t)$ *и* $\Pi_0(\tau)$, $\Pi_1(\tau)$ *имеют представления (5) и (29), (33) соответственно. Пограничные функции экспоненциально убывают.*

Замечание 1. Случай, когда $qm \neq (s+1)n$, рассматривается аналогично. Например, если $\operatorname{rank} Q(\varepsilon) = qm < (s+1)n$, то задача (1), (2) имеет единственное асимптотическое решение при определенных условиях. Если $\operatorname{rank} Q(\varepsilon) = (s+1)n < qm$, то задача (1), (2) имеет семейство пограничных функций, а следовательно, и семейство асимптотических решений.

1. *Самойленко А. М., Бойчук А. А., Каранджулов Л. И.* Линейные нетеровы краевые задачи с сингулярным возмущением // Дифференц. уравнения. — 2001. — **37**, № 9. — С. 1186 – 1193.
2. *Karandzhulov L. I.* Critical case for singularly perturbed linear boundary-value problems of ordinary differential equations // Univ. Mishcolc, Inst. Math., Math. Notes. — 2004. — **5**, № 2 (to appear).
3. *Васильева А. Б., Бутузов Б. Б.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.
4. *Каранджулов Л. И., Бойчук А. А., Божко В. А.* Асимптотическое разложение решений сингулярно возмущенной линейной краевой задачи // Докл. НАН Украины. — 1994. — № 4. — С. 7 – 10.
5. *Karandjulov L. I.* Asymptotic solution of definite class of singularly perturbed linear boundary-value problems for ordinary differential equations // Annu. Univ. Sofia "St.Kl.Ohridski". Livre 1. Math. et mec. — 1997. — **91**. — P. 79 – 95.
6. *Бойчук А. А., Журавлев Б. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.
7. *Penrose R.* A generalize inverse for matrices // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1955. — **51**. — P. 406 – 413.

Получено 15.12.2003,
после доработки — 15.05.2004