УДК 517.9

МНОЖИНА ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНОЇ СЛАБКОЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ

А. О. Бойчук

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ 4, ул. Терещенківська, 3

For weakly perturbed systems of linear differential equations, we find conditions for the point $\varepsilon = 0$ to bifurcate into a set of solutions that are bounded on the whole line R in the case where the corresponding unperturbed homogeneous linear differential system is exponentially dichotomous on the half-lines R_+ and R_-. We determine the number of linearly independent solutions that are bounded on R and give an algorithm for finding these solutions.

Отримано умови появи з точки $\varepsilon = 0$ множини обмежених на всій осі R розв'язків слабкозбурених систем лінійних звичайних диференціальних рівнянь у випадку, коли відповідна незбурена однорідна лінійна диференціальна система є експоненціально-дихотомічною на півосях R_+ та R_-. Вказано кількість лінійно незалежних обмежених на R розв'язків та наведено алгоритм їх побудови.

1. Незбурена задача. Відомо [1], що система

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) \in BC(J), \tag{1}$$

є експоненціально-дихотомічною (е-дихотомічною) на інтервалі J, якщо існує проектор $P (P^2 = P)$ та константи $K \geq 1$ і $\alpha > 0$ такі, що для будь-яких $t, s \in J$ справджуються оцінки

$$\|X(t)PX^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(t-s)}, t \geq s, \quad \|X(t)(I-P)X^{-1}(s)\| \leq Ke^{-\alpha(s-t)}, s \geq t \,,$$

де $X(t)$ — нормальна ($X(0) = I$) фундаментальна матриця системи (1); $A(t)$ — матриця розмірності $n \times n$, компоненти якої належать банаховому простору $BC(J)$ дійсних, неперервних та обмежених на J функцій. Нижче під J будемо розуміти один з інтервалів $R = (-\infty, +\infty), R_+ = [0, +\infty)$ або $R_- = (-\infty, 0]$.

Задача про існування розв'язків $x : R \to R^n$, $x(\cdot) \in BC^1(R)$, з банахового простору $BC^1(R)$ неперервно диференційовних на R вектор-функцій, обмежених разом зі своєю похідною, неоднорідної системи

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad f : R \to R^n, \quad f(t) \in BC(R), \;\; A(t) \in BC(R), \tag{2}$$

вивчалась у роботах [2, 3]. У випадку, коли однорідна система (1) не є е-дихотомічною на R, у роботі [4, с. 245] отримано умови нетеровості цієї задачі. На підставі цього результату, використовуючи теорію псевдообернених матриць, можна довести таке твердження [5].

Лема. *Нехай лінійний оператор*

$$(L_0 x)(t) = \dot{x}(t) - A(t)x(t) \;\; : \;\; BC^1(R) \to BC(R) \tag{3}$$

є e-дихотомічним на півосях R_+ та R_- з проекторами P і Q відповідно. Тоді:

а) система (1) має r-параметричну множину обмежених на R розв'язків :

$$X_r(t)c_r \ \ \forall c_r \in R^r \ \ (r = \dim L_0 = \operatorname{rank}[PP_{N(D)}] = \operatorname{rank}[(I-Q)P_{N(D)}]);$$

$X_r(t) = X(t)[PP_{N(D)}]_r = X(t)[(I-Q)P_{N(D)}]_r$ — матриця розмірності $n \times r$, стовпці якої є повною системою r лінійно незалежних обмежених на R розв'язків системи (1);

б) спряжена до (1) система

$$\dot{x} = -A^*(t)x, \qquad A(t) \in BC(J), \tag{4}$$

має d-параметричну множину обмежених на R розв'язків:

$$H_d(t)c_d \ \ \forall c_d \in R^d \ (d = \dim L_0^* = \operatorname{rank}[P_{N(D^*)}(I-P)] = \operatorname{rank}[P_{N(D^*)}Q] \ );$$

$H_d(t) = X^{*-1}(t)[Q^*P_{N(D^*)}]_d = X^{*-1}(t)[(I-P^*)P_{N(D^*)}]_d$ — матриця розмірності $n \times d$, стовпці якої є повною системою d лінійно незалежних обмежених на R розв'язків системи (4), спряженої до (1);

в) оператор L_0 нетерів з індексом ρ:

$$\operatorname{ind} L_0 = \dim L_0 - \dim L_0^* = \operatorname{rank}\ [PP_{N(D)}] - \operatorname{rank}\ [P_{N(D^*)}(I-P)] =$$

$$= \operatorname{rank}\ [(I-Q)P_{N(D)}] - \operatorname{rank}\ [P_{N(D^*)}Q] = \rho = r - d;$$

крім того, $f \in \operatorname{Im} L_0$ тоді й тільки тоді, коли

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(s)f(s)ds = 0, \tag{5}$$

$H_d^*(t) = [X^{*-1}(t)[Q^*P_{N(D^*)}]_d]^*$ — матриця розмірності $d \times n$, рядки якої є повною системою d лінійно незалежних обмежених на R розв'язків системи (4);

г) при умові (5) неоднорідна система (2) має r-параметричну множину обмежених на R розв'язків :

$$x(t, c_r) = X_r(t)c_r + (G(f))(t) \ \ \ \forall c_r \in R^r, \tag{6}$$

де

$$(G(f))(t) =$$

$$=X(t)\begin{cases} \int\limits_0^t PX^{-1}(s)f(s)ds - \int\limits_t^\infty (I-P)X^{-1}(s)f(s)ds+ \\ + PD^+\left\{\int\limits_{-\infty}^0 QX^{-1}(s)f(s)ds + \int\limits_0^\infty (I-P)X^{-1}(s)f(s)ds\right\}, \quad t \geq 0; \\ \int\limits_{-\infty}^t QX^{-1}(s)f(s)ds - \int\limits_t^0 (I-Q)X^{-1}(s)f(s)ds+ \\ + (I-Q)D^+\left\{\int\limits_{-\infty}^0 QX^{-1}(s)f(s)ds + \int\limits_0^\infty (I-P)X^{-1}(s)f(s)ds\right\}, \quad t \leq 0, \end{cases} \tag{7}$$

— узагальнений оператор Гріна задачі про обмежені на R розв'язки системи (2), який задовольняє властивості

$$(LG[f])(t) = f(t),\ t \in R, \quad (G[f])(0+0) - (G[f])(0-0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H^*(s)f(s)ds.$$

Тут $D = P - (I-Q)$ — матриця розмірності $n \times n$, а D^+ — її псевдообернена за Муром – Пенроузом [6]; $P_{N(D)}$ та $P_{N(D^*)}$ — матриці розмірності $n \times n$ (ортопроектори $P^2_{N(D)} = P_{N(D)} = P^*_{N(D)}$, $P^2_{N(D^*)} = P_{N(D^*)} = P^*_{N(D^*)}$), які проектують R^n на ядро $\ker D = N(D)$ та коядро $\operatorname{coker} D = \ker D^* = N(D^*)$ матриці D; $[\ \circ\ ]_d$ — матриця розмірності $n \times d$, яка складається з максимальної кількості d лінійно незалежних стовпців матриці $[\ \circ\ ]$; символ $*$ означає операцію транспонування; $\operatorname{Im} L_0$ — образ оператора L_0.

Збурена задача. Розглянемо слабкозбурену лінійну неоднорідну систему

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x + f(t), \quad A(t), A_1(t), f(t) \in BC(R). \tag{8}$$

Будемо припускати, що породжуюча система (2), яка отримується з (8) при $\varepsilon = 0$ та задовольняє умови наведеної вище леми, не має обмежених на всій осі розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in BC(R)$. Згідно з лемою це означає, що критерій (5) розв'язності задачі (2) не виконується (внаслідок довільності $f(t) \in BC(R)$).

Знайдемо умови на збурюючий доданок $A_1(t)$, при яких система (8) буде мати при довільних неоднорідностях $f(t) \in BC(R)$ хоча б один обмежений на всій осі розв'язок у просторі $BC^1(R)$ неперервно диференційовних на R вектор-функцій, обмежених разом зі своєю похідною. Встановимо кількість обмежених на R лінійно незалежних розв'язків та наведемо алгоритм відшукання таких розв'язків.

При цьому будемо використовувати матрицю розмірності $d \times r$

$$B_0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau) X_r(\tau) d\tau, \tag{9}$$

яка будується за допомогою збурюючого коефіцієнта $A_1(t)$ системи (8). Нагадаємо, що через $P_{N(B_0)}$ та $P_{N(B_0^*)}$ позначено ортопроектори (матриці розмірності $r \times r$ та $d \times d$), які проектують R^r та R^d на ядро та коядро матриці B_0 відповідно.

Теорема. *Нехай система (8) така, що породжуюча система (1) є e-дихотомічною на R_+ та R_- з проекторами P та Q відповідно, а система (2) при довільних неоднорідностях $f \in BC(R)$ не має обмежених на всій осі розв'язків. Тоді якщо виконано умову*

$$P_{N(B_0^*)} = 0, \tag{10}$$

то для достатньо малих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

1) оператор $L_\varepsilon : BC^1(R) \to BC(R)$, визначений згідно з формулою

$$L_\varepsilon x = \dot{x} - A(t)x - \varepsilon A_1(t)x,$$

є нетеровим з індексом ρ

$$\text{ind } L_\varepsilon = \dim \ker L_\varepsilon - \dim \ker L_\varepsilon^* = \rho = r - d,$$

$$\text{ind } L_0 = \dim \ker L_0 - \dim \ker L_0^* = \rho = r - d,$$

де оператор L_ε^* є спряженим до L_ε $(\dim \ker L_0 = r, \ \dim \ker L_0^* = d)$;

2) однорідна задача

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon A_1(t)x, \quad A(t), A_1(t), \in BC(R), \tag{11}$$

має ρ-параметричну множину обмежених на R розв'язків $x(t,\varepsilon) = x_0(t,\varepsilon,c_\rho)$ з простору

$$x_0(\cdot,\varepsilon,c_\rho) \in BC^1(R), \quad x_0(t,\cdot,c_\rho) \in C(0,\varepsilon_0]$$

у вигляді ряду

$$x_0(t,\varepsilon,c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i \bar{X}_i(t) P_{B_\rho} c_\rho \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho \qquad (\rho = \dim \ker L_\varepsilon); \tag{12}$$

3) задача, спряжена до (11), має тільки тривіальний обмежений розв'язок $(\dim \ker L_\varepsilon^* = 0, \ \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0])$;

4) для довільних $f(t) \in BC(R)$ система (8) має ρ-параметричну множину обмежених на R розв'язків $x(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon,c_\rho)$ з простору

$$x(\cdot,\varepsilon,c_\rho) \in BC^1(R), \quad x(t,\cdot,c_\rho) \in C(0,\varepsilon_0]$$

у вигляді ряду

$$x(t, \varepsilon, c_\rho) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i [\bar{x}_i(t, \bar{c}_i) + \bar{X}_i(t) P_{B_\rho} c_\rho] \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho. \tag{13}$$

Ряди (12) та (13) є рівномірно збіжними для $t \in R$ *та достатньо малих* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *а коефіцієнти* $\bar{x}_i(t, \bar{c}_i)$, $\bar{c}_i$, $\bar{X}_i(t)$ *визначаються за формулами*

$$\bar{x}_i(t, \bar{c}_i) = X_r(t)\bar{c}_i + (G[A_1(\cdot)\bar{x}_{i-1}(\cdot, \bar{c}_{i-1})])(t),$$

$$\bar{c}_i = -B_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau) (G[A_1(\cdot)\bar{x}_{i-1}(\cdot, \bar{c}_{i-1})])(\tau) d\tau, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

$$\bar{X}_i(t) = \left\{ X_r(t) \left[I_r - B_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau) (G[A_1(\cdot)\bar{X}_{i-1}(\cdot)])(\tau) d\tau \right] + \right.$$

$$\left. + \ (G[A_1(\cdot)\bar{X}_{i-1}(\cdot)])(t) \right\} P_{N(B_0)_\rho} c_\rho \quad i = 0, 1, \ldots, \quad \bar{X}_{-1}(t) = X_r(t).$$

Доведення. Розв'язок $x(t, \varepsilon)$ системи (8) будемо шукати у вигляді ряду Лорана [7] за степенями малого параметра ε зі скінченним числом доданків, які мають від'ємні степені ε :

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{i=-1}^{\infty} \varepsilon^i x_i(t). \tag{15}$$

Підставимо ряд (15) в систему (8) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. Для знаходження коефіцієнта $x_{-1}(t)$ ряду (15) при ε^{-1} приходимо до задачі про обмежені на всій осі розв'язки однорідної системи

$$\dot{x}_{-1} = A(t) x_{-1}. \tag{16}$$

Згідно з лемою задача (16) має ρ-параметричну множину обмежених на R розв'язків $x_{-1} = x_{-1}(t, c_{-1}) = X_r(t) c_{-1}$, де r-вимірний вектор-стовпець $c_{-1} \in R^r$ буде визначено з умови розв'язності задачі для знаходження коефіцієнта $x_0(t) \in BC^1(R)$ ряду (15).

Для визначення коефіцієнта $x_0(t)$ ряду (15) при ε^0 отримуємо задачу про обмежені на всій осі розв'язки неоднорідної системи

$$\dot{x}_0 = A(t) x_0 + A_1(t) x_{-1} + f(t). \tag{17}$$

Згідно з лемою критерій розв'язності задачі (17) має вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)(A_1(\tau)x_{-1}(\tau, c_{-1}) + f(\tau))d\tau = 0,$$

з якого з урахуванням позначень (9) та зображення для $x_{-1}(t, c_{-1})$ отримаємо алгебраїчну відносно $c_{-1} \in R^r$ систему

$$B_0 c_{-1} = -\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Для розв'язності останньої при довільній $f \in BC(R)$ необхідно й досить, щоб виконувалась умова (10), яка еквівалентна умові

$$\operatorname{rang} B_0 = d \leq r.$$

Множина розв'язків алгебраїчної відносно $c_{-1} \in R^r$ системи має вигляд

$$c_{-1} = -B_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)f(\tau)d\tau + P_{N(B_0)_\rho} c_\rho = \bar{c}_{-1} + P_{N(B_0)_\rho} c_\rho,$$

де B_0^+ — єдина матриця розмірності $r \times d$, псевдообернена до B_0 [6]; $P_{N(B_0)_\rho}$ є матрицею розмірності $r \times \rho$, яка складається з ρ лінійно незалежних $\rho = \operatorname{rank} P_{N(B_0)} = r - \operatorname{rank} B_0$ стовпців ортопроектора $P_{N(B_0)}$.

З урахуванням виразу для c_{-1} однорідна задача (16) має ρ-параметричну множину обмежених на R розв'язків

$$\begin{gathered} x_{-1}(t, c_\rho) = \bar{x}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) + X_r(t) P_{N(B_0)_\rho} c_\rho \quad \forall\, c_\rho \in R^\rho, \\ \bar{x}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) = X_r(t)\bar{c}_{-1}, \quad \bar{c}_{-1} = -B_0^+ \int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)f(\tau)d\tau. \end{gathered} \tag{18}$$

Система (17) при умові (10) має r-параметричну сім'ю обмежених на R розв'язків

$$x_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + (G[A_1(\cdot)\bar{x}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}) + f(\cdot)])(t) + (G[A_1(\cdot)X_r(\cdot)])(t)P_{N(B_0)_\rho} c_\rho,$$

де c_0 — r-вимірний вектор констант, який буде визначено на наступному кроці з умови розв'язності задачі для знаходження коефіцієнта $x_1(t)$ ряду (15); $(G[*])(t)$ — узагальнений оператор Гріна (7) задачі про обмежені на R розв'язки системи (2).

Для визначення коефіцієнта $x_1(t)$ ряду (15) при ε^1 отримуємо задачу про знаходження обмежених на R розв'язків системи

$$\dot{x}_1 = A(t)x_1 + A_1(t)x_0. \tag{19}$$

При умові (10) з критерію розв'язності системи (19)

$$B_0 c_0 = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau)\{(G[A_1(\cdot)\bar{x}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}) + f(\cdot)])(\tau) +$$

$$+ (G[A_1(\cdot)X_r(\cdot)])(\tau) P_{N(B_0)_\rho} c_\rho\} d\tau$$

визначаємо $c_0 \in R^r$ (з точністю до довільної ρ-вимірної векторної константи з нуль-простору матриці B_0, $\rho = \dim N(B_0) = r - \operatorname{rang} B_0$, $P_{N(B_0)} c = P_{N(B_0)_\rho} c_\rho \ \forall c \in R^r$, $\forall c_\rho \in \in R^\rho$):

$$c_0 = -B_0^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau)\{(G[A_1(\cdot)\bar{x}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}) + f(\cdot)])(\tau) +$$

$$+ (G[A_1(\cdot)X_r(\cdot)])(\tau) P_{N(B_0)_\rho} c_\rho\} d\tau + P_{N(B_0)_\rho} c_\rho.$$

Таким чином, для коефіцієнта c_0 маємо

$$c_0 = \bar{c}_0 + \left[I_r - B_0^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)X_r(\cdot)])(\tau) d\tau \right] P_{N(B_0)_\rho} c_\rho,$$

$$\bar{c}_0 = -B_0^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{x}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}) + f(\cdot)])(\tau) d\tau.$$

Отже, остаточно система (17) при умові (10) має ρ-параметричну множину обмежених на R розв'язків

$$x_0(t, c_\rho) = \bar{x}_0(t, \bar{c}_0) + \bar{X}_0(t) P_{N(B_0)_\rho} c_\rho,$$

де

$$\bar{x}_0(t, \bar{c}_0) = X_r(t)\bar{c}_0 + (G[A_1(\cdot)\bar{x}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}) + f(\cdot)])(t),$$

$$\bar{X}_0(t) = \left\{ X_r(t) \left[I_r - B_0^+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau) A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)X_r(\cdot)])(\tau) d\tau \right] + \right.$$

$$\left. + (G[A_1(\cdot)X_r(\cdot)])(t) \right\} P_{N(B_0)_\rho} c_\rho.$$

Далі, при умові (10) система (19) має ρ-параметричну сім'ю обмежених на R розв'язків

$$x_1(t,c_1) = X_r(t)c_1 + (G[A_1(\cdot)\bar{x}_0(\cdot,\bar{c}_0)])(t) + (G[A_1(\cdot)\bar{X}_0(\cdot)])(t)P_{N(B_0)_\rho}c_\rho,$$

де c_1 — r-вимірний вектор констант, який буде визначено на наступному кроці з умови розв'язності в просторі $BC^1(R)$ задачі для знаходження коефіцієнта $x_2(t)$ ряду (15).

Аналогічно викладеному вище, з застосуванням методу математичної індукції доведено, що при умові (10) для визначення коефіцієнта $x_i(t)$ ряду (15) при ε^i отримуємо задачу про обмежені на R розв'язки системи

$$\dot{x}_i = A(t)x_i + A_1(t)x_{i-1}. \tag{20}$$

Обмежені на R розв'язки системи (20) при умові (10) мають вигляд

$$x_i(t,c_i) = \bar{x}_i(t,\bar{c}_i) + \bar{X}_i(t)P_{N(B_0)_\rho}c_\rho, \quad i = 1,2,\dots, \tag{21}$$

де

$$\bar{x}_i(t,\bar{c}_i) = X_r(t)\bar{c}(G[A_1(\cdot)\bar{x}_{i-1}(\cdot,\bar{c}_{i-1})])(t),$$

$$\bar{c}_i = -B_0^+\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{x}_{i-1}(\cdot,\bar{c}_{i-1})])(\tau)d\tau, \quad i = 1,2,\dots,$$

$$\bar{X}_i(t) = \left\{X_r(t)\left[I_r - B_0^+\int_{-\infty}^{\infty} H_d^*(\tau)A_1(\tau)(G[A_1(\cdot)\bar{X}_{i-1}(\cdot)])(\tau)d\tau\right] + \right.$$

$$\left. + \ (G[A_1(\cdot)\bar{X}_{i-1}(\cdot)])(t)\right\}P_{N(B_0)_\rho}c_\rho, \quad i = 0,1,\dots, \quad \bar{X}_{-1}(t) = X_r(t).$$

Аналогічно [5] доведено, що при достатньо малих $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ряд (13) з коефіцієнтами, визначеними згідно з (21), буде рівномірно по $t \in R$ та ε збігатися.

Розв'язок $x(t,\varepsilon)$ однорідної системи (11) має вигляд ряду (12), який отримується з ряду (13) при $f(t) = 0$. Оскільки система (8) має множину обмежених на R розв'язків для довільних $f(t) \in BC(R)$, то задача, спряжена до (11), має тільки тривіальний обмежений розв'язок, що й завершує доведення теореми.

Приклад. Проілюструємо наведені вище твердження на прикладі системи (8), в якій

$$A(t) = \operatorname{diag}\{-th\,t, -th\,t, th\,t\}, \quad A_1(t) = \{a_{ij}(t)\}_{i,j=1}^3 \in BC(R).$$

Легко перевірити, що $X(t) = \operatorname{diag}\{2/(e^t+e^{-t}), 2/(e^t+e^{-t}), (e^t+e^{-t})/2,\}$, а однорідна система (1) є е-дихотомічною на півосях R_+ та R_- з проекторами $P = \operatorname{diag}\{1,1,0\}$ і $Q = \operatorname{diag}\{0,0,1\}$ відповідно. Тоді

$$D = 0, D^+ = 0, P_{N(D)} = P_{N(D^*)} = I_3, \quad r = \operatorname{rank} PP_{N(D)} = 2, d = \operatorname{rank} P_{N(D^*)}Q = 1,$$

$$X_r(t) = \begin{pmatrix} 2/(e^t + e^{-t}) & 0 \\ 0 & 2/(e^t + e^{-t}) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_d(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/(e^t + e^{-t}) \end{pmatrix}.$$

Неоднорідна система (2) з вказаною вище матрицею $A(t)$ має обмежені на всій осі розв'язки не при будь-яких неоднорідностях, а тільки при тих $f(t) = \mathrm{col}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\} \in BC(R)$, які задовольняють умову (5), котра в даному випадку має вигляд

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_3(s)/(e^s + e^{-s})ds = 0 \quad \forall f_1(t) \in BC(R), \quad \forall f_2(t) \in BC(R).$$

Система (11) з вказаними вище коефіцієнтами буде мати при достатньо малих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ однопараметричну ($\rho = \dim N(B_0) = r - \mathrm{rang}\, B_0 = 1$) множину обмежених на R розв'язків у вигляді збіжного ряду (12), якщо коефіцієнти $a_{13}(t), a_{23}(t) \in BC(R)$ збуреної матриці $A_1(t)$ задовольняють умову (10), де

$$B_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_d^*(t) A_1(t) X_r(t) dt = 4 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [a_{31}(t)/(e^t + e^{-t})^2, \;\; a_{32}(t)/(e^t + e^{-t})^2] dt.$$

Якщо $a_{13}(t), a_{23}(t) \in BC(R)$ такі, що виконується хоча б одна з нерівностей

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{31}(t)/(e^t + e^{-t})^2 dt \neq 0, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_{32}(t)/(e^t + e^{-t})^2 dt \neq 0,$$

то умова (10) або еквівалентна їй умова $\mathrm{rank}\, B_0 = d = 1$ теореми виконується і система (11) буде мати однопараметричну ($\rho = 1$) множину лінійно незалежних обмежених на R розв'язків у вигляді збіжного при достатньо малих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ряду (12). Наприклад, при $a_{31}(t) = \mathrm{const} \neq 0$ або $a_{32}(t) = \mathrm{const} \neq 0$ одна з цих нерівностей завжди виконується, і умова (10) має місце при довільних коефіцієнтах $a_{11}(t), a_{12}(t), a_{13}(t), a_{21}(t), a_{22}(t), a_{23}(t), a_{33}(t)$ з простору $BC(R)$. У цьому випадку при достатньо малих $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ однопараметрична ($\rho = 1$) множина лінійно незалежних обмежених на R розв'язків неоднорідної системи (8) при довільній $f(t) = \mathrm{col}\{f_1(t), f_2(t), f_3(t)\} \in BC(R)$ визначається у вигляді ряду (13). Зазначимо, що згідно з визначенням однорідна система (11) в цьому випадку буде слабкорегулярною [2] або, за іншою термінологією, е-трихотомічною [8].

1. *Coppel W.A.* Dichotomies in stability theory // Lect. Notes Math. — Berlin: Springer, 1978. — **629**. — 98 p.
2. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 270 с.
3. *Плисс В.А.* Ограниченные решения неоднородных линейных систем дифференциальных уравнений. // Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. — Киев: Наук. думка, 1977. — С. 168–173.
4. *Palmer K.J.* Exponential dichotomies and transversal homoclinic points // J. Different. Equat. — 1984. — **55**. — P. 225–256.

5. *Самойленко А.М., Бойчук А.А., Бойчук Ан.А.* Ограниченные на всей оси решения линейных слабовозмущенных систем // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 11. — С. 1517 – 1530.

6. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 320 с.

7. *Вишик В.И., Люстерник Л.А.* Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1960. — **15**, вып. 3. — С. 3 – 80.

8. *Elaidy S., Hajek O.* Exponential trichotomy of differential systems // J. Math. Anal. and Appl. — 1988. — **123**, № 2. — P. 362 – 374.

Одержано 08.10.2002