УДК 517.949

ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ У СЕНСІ ФРЕШЕ ІНВАРІАНТНОГО ТОРА НЕЛІНІЙНОЇ ЗЛІЧЕННОЇ СИСТЕМИ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ, ЩО ВИЗНАЧЕНА НА НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОМУ ТОРІ І МІСТИТЬ ВІДХИЛЕННЯ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТУ

Ю. В. Теплінський, Н. А. Марчук

Кам'янець-Поділ. пед. ун-т
Україна, 32300, Кам'янець-Подільський
Хмельницької обл., вул. Огієнка, 61

Sufficient conditions are obtained for Frechet differentiability of the invariant torus for a nonlinear system of difference equations in the space of bounded number sequences. The system under consideration contains a countable of angular and normal variables, and also independent deviations of the discrete argument.

Наведено достатні умови диференційовності за Фреше інваріантного тора нелінійної системи різницевих рівнянь у просторі обмежених числових послідовностей, яка містить зліченну кількість кутових і нормальних змінних, а також незалежні відхилення дискретного аргументу.

Відомо, що в теорії динамічних систем важливе місце відводиться дослідженням їх інваріантних множин і, зокрема, інваріантних торів. Останнім часом опубліковано ряд статей (див., наприклад, [1–8]), присвячених вивченню інваріантних торів різницевих рівнянь у просторах обмежених числових послідовностей (зліченних систем різницевих рівнянь). У статті [7] доведено теореми існування інваріантних торів нелінійних систем різницевих рівнянь, що визначені на нескінченновимірному торі і містять незалежні відхилення дискретного аргументу. У даній роботі ми наводимо достатні умови диференційовності за Фреше цих інваріантних торів. Аналогічні умови для випадку лінійних і квазілінійних зліченних систем різницевих рівнянь одержано авторами у [8]. Зауважимо, що одержані результати є новими навіть для різницевих систем у скінченновимірних просторах, які визначені на m-вимірному торі і не містять аргументу, що відхиляється.

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1} &= \varphi_n + a(\varphi_n, \mu), \\ x_{n+1} &= P(\varphi_{n+p}, \mu, x_{n+k})x_n + c(\varphi_{n+g+1}, \mu), \end{aligned} \tag{1}$$

в якій $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \dots) \in \mathfrak{M}$, $x = (x^1, x^2, x^3, \dots) \in \mathfrak{M}$, де $\mathfrak{M}$ — простір обмежених числових послідовностей з нормою $\|x\| = \sup_i\{|x^i|\}$; функції $a(\varphi, \mu) = \{a_1(\varphi, \mu), a_2(\varphi, \mu), a_3(\varphi, \mu), \dots\}$, $c(\varphi, \mu) = \{c_1(\varphi, \mu), c_2(\varphi, \mu), c_3(\varphi, \mu), \dots\}$ і нескінченна матриця $P(\varphi, \mu, x) = [p_{ij}(\varphi, \mu, x)]_{i,j=1}^{\infty}$ дійсні та періодичні по φ^i, $i = 1, 2, 3, \dots$, з періодом 2π; $n \in Z$, Z — множина цілих чисел; p, g і k — цілочислові параметри, які зумовлюють відхилення дискретного аргументу; $\mu \in S \subset \mathfrak{M}$ — параметр, S — відкрита куля в $\mathfrak{M}$.

Інтерпретуючи φ^i як кутові координати, будемо вважати, що система рівнянь (1) визначена на нескінченновимірному торі $\mathcal{T}_\infty$.

Надалі вважатимемо, що для будь-якого $\mu \in S$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $x \in D = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| \leq d = \mathrm{const} > 0\}$, $\|a(\varphi,\mu)\| \leq A^0$, $\|c(\varphi,\mu)\| \leq C^0$, $\|P(\varphi,\mu,x)\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |p_{ij}(\varphi,\mu,x)| \leq P^0$, причому A^0, P^0, C^0 — додатні сталі, що не залежать від $\mu \in S$, $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$, $x \in D_0$. Вважатимемо також, що при кожному $\mu \in S$ відображення $\Phi(\varphi,\mu) = \varphi + a(\varphi,\mu) : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ є оборотним.

Через $\varphi_n(\varphi,\mu)$ позначимо розв'язок першого рівняння (1) такий, що $\varphi_0(\varphi,\mu) = \varphi \in \mathcal{T}_\infty$ $\forall \mu \in S$.

Інваріантним тором $\mathcal{T}(p,g,k,\mu)$ системи рівнянь (1) називають множину точок $x \in \mathfrak{M}$:

$$x = u(p,g,k,\mu,\varphi) = (u_1(p,g,k,\mu,\varphi), u_2(p,g,k,\mu,\varphi), \dots), \quad \varphi \in \mathcal{T}_\infty,$$

якщо функція $u(p,g,k,\mu,\varphi)$ визначена при будь-яких $\{p,g,k\} \subset Z, \mu \in S, \varphi \in \mathfrak{M}$, 2π-періодична відносно φ^i, $i = 1,2,3,\dots$, обмежена за нормою $\|\cdot\|$ і при будь-яких $\varphi \in \mathcal{T}_\infty$ задовольняє рівність

$$u(p,g,k,\mu,\varphi_{n+1}(\varphi,\mu)) = P(\varphi_{n+p}(\varphi,\mu),\mu,u(p,g,k,\mu,\varphi_{n+k}(\varphi,\mu))) \times$$

$$\times\ u(p,g,k,\mu,\varphi_n(\varphi,\mu)) + c(\varphi_{n+g+1}(\varphi,\mu),\mu), \quad n \in Z.$$

Інваріантний тор $\mathcal{T}(p,g,k,\mu)$ назвемо диференційовним у сенсі Фреше відносно (φ,μ), якщо таку властивість має породжуюча його функція $u(p,g,k,\mu,\varphi)$.

Позначимо декартовий добуток $\mathfrak{M} \times S$ через Λ, а множину відображень, неперервно диференційовних на Λ за Фреше, через $C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$. Зрозуміло, що множина Λ є відкритою в множині $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, причому під нормою елемента $h = (\varphi,\mu) \in \Lambda$ розумітимемо вираз $h = \max\{\|\varphi\|, \|\mu\|\}$, де $\|\varphi\|$ і $\|\mu\|$ — норми в просторі $\mathfrak{M}$.

Доведемо спочатку два важливих допоміжних твердження.

Лема 1. *Нехай на множині $D_0 = \Lambda \times D_\rho$, де $D_\rho = \{x \in \mathfrak{M} | \|x\| < d+\rho\}$, ρ — як завгодно мала додатна стала, матриця $P(\varphi,\mu,x)$ оборотна, $\|P^{-1}(\varphi,\mu,x)\| \leq P_1 = \mathrm{const} > 0$ і справджуються умови:*

1)$\{a(\varphi,\mu), c(\varphi,\mu), \Phi^{-1}(\varphi,\mu)\} \subset C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$ і $P^{-1}(\varphi,\mu,x) \in C^1_{D_0}(\varphi,\mu,x)$, причому

$$\left\|\frac{da(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \leq A^*, \left\|\frac{d\Phi^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \leq \Phi_*, \left\|\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right\| \leq P_*, \left\|\frac{dc(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \leq C_*,$$

де A^*, Φ_*, P_*, C_* — додатні сталі;

2) виконуються нерівності

$$P_1 < \frac{1}{1+A^*}, \quad \eta = C^0 P_* \sum_{l=1}^{\infty} P_1^{l-1} l < 1, \quad \frac{C^0 P_1}{1-P_1} \leq d.$$

Тоді при всіх $\{p,g,k\} \subset Z, s \in Z^+ = \{1,2,3,\dots\}$ функції

$$u^{(0)} = 0 \in \mathfrak{M}, \quad u^{(s)} = u^{(s)}(p,g,k,\mu,\varphi) =$$

$$= -\sum_{l=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_{p+i}(\varphi,\mu),\mu,u^{(s-1)}(p,g,k,\mu,\varphi_{i+k}(\varphi,\mu)))c(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu),$$

побудовані в теоремі 1 з [7], належать $C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$, причому

$$\left\|\frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)}\right\| < \kappa_s(p,g,k) \quad \forall(\varphi,\mu)\in\Lambda. \tag{2}$$

Доведення проведемо методом повної математичної індукції. При $s=1$ функція $u^{(1)}$ породжує інваріантний тор лінійної системи і не залежить від $k\in Z$. Поклавши $\Phi_*>1$, легко одержати оцінку

$$\left\|\frac{d\varphi_n(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le \begin{cases} (1+A^*)^n & \text{при} \quad n\ge 0; \\ \Phi_*^{-n} & \text{при} \quad n<0. \end{cases}$$

Використовуючи її, переконуємось у тому, що справджуються такі нерівності:

$$\left\|\frac{dc(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le \begin{cases} C_*(1+A^*)^{l+g} & \text{при} \quad l+g\ge 0; \\ C_*\Phi_*^{-(l+g)} & \text{при} \quad l+g<0, \end{cases}$$

$$\left\|\frac{d\Omega_l^0(p,\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| < \begin{cases} \xi_1(p)P_1^{l-1}(1+A^*)^l & \text{при} \quad p\ge 0; \\ \xi_2(p)P_1^{l-1} & \text{при} \quad p<0, 0<l<1-p; \\ P_1^{l-1}(\xi_2(p)+\xi_1(p)(1+A^*)^l) & \text{при} \quad p<0, l\ge 1-p, \end{cases}$$

де $\xi_1(p)=\dfrac{P_*}{A^*}(1+A^*)^p$ і $\xi_2(p)=\dfrac{P_*\Phi_*^{-p+1}}{\Phi_*-1}$ не залежать від l,φ,μ,

$$\Omega_l^0(p,\varphi,\mu)=\prod_{i=p}^{l+p-1}P^{-1}(\varphi_i(\varphi,\mu),\mu,0).$$

Ввівши позначення

$$\eta(p)=2(\xi_1(p)+\xi_2(p)),$$

$$\frac{C^0\eta(p)(1+A^*)}{1-P_1(1+A^*)}=W_0, \quad \frac{P_1C_*(1+A^*)^{g+1}}{1-P_1(1+A^*)}=W_1, \quad g\ge -1,$$

$$C_*\sum_{l=1}^{-g-1}\Phi_*^{-(l+g)}P_1^l+\frac{C_*P_1^{-g}}{1-P_1(1+A^*)}=W_2, \quad g<-1,$$

$$\kappa_1(p,g) = \begin{cases} W_0 + W_1, & \text{якщо} \quad g \geq -1; \\ \\ W_0 + W_2, & \text{якщо} \quad g < -1, \end{cases}$$

одержуємо оцінку

$$\left\| \frac{du^{(1)}}{d(\varphi,\mu)} \right\| < \kappa_1(p,g) \quad \forall \{p,g\} \subset Z, (\varphi,\mu) \in \Lambda.$$

Припустимо тепер, що сформульоване твердження правильне при всіх $s = \overline{2,q}$, і покажемо його правильність при $s = q+1$.

Введемо формальні позначення:

$$\kappa_s(p,g,k) = \kappa_s, \quad \Omega_l^0(p,g,k,\mu,\varphi)_s = \Omega_{l,s}^0, \quad \left\| \frac{d\Omega_{l,s}^0}{d(\varphi,\mu)} \right\| = \Omega_s,$$

$$u^{(s)}(p,g,k,\mu,\varphi_{k+i}(\varphi,\mu)) = u^{(s)}(k+i),$$

$$\frac{d\Omega_{l,s}^0 c(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu)}{d(\varphi,\mu)} = u_l^{(s)}, \qquad \left\| \frac{dP^{-1}\varphi_{p+i}(\varphi,\mu),\mu,u^{(s)}(k+i)}{d(\varphi,\mu)} \right\| = \Delta P_s^{-1}(i),$$

де $\Omega_l^n(p,g,k,\mu,\varphi)_s$ — матрицант однорідного рівняння

$$x_{n+1} = P(\varphi_{n+p}(\varphi,\mu),\mu,u^{(s-1)}(p,g,k,\mu,\varphi_{n+k}(\varphi,\mu)))x_n,$$

який при $l > n$ визначається рівністю

$$\Omega_l^n(p,g,k,\mu,\varphi)_s = \prod_{i=n}^{l-1} P^{-1}(\varphi_{p+i}(\varphi,\mu),\mu,u^{(s-1)}(p,g,k,\mu,\varphi_{i+k}(\varphi,\mu))).$$

У цьому випадку

$$u^{(q+1)} = -\sum_{l=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{l-1} P^{-1}(\varphi_{p+i}(\varphi,\mu),\mu,u^{(q)}(i+k))c(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu).$$

Неважко переконатися, що справджуються нерівності

$$\Delta P_q^{-1}(i) \leq P_* \max\left\{ \left\| \frac{d\varphi_{p+i}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)} \right\|, 1, \left\| \frac{du^{(q)}(k+i)}{d(\varphi,\mu)} \right\| \right\} <$$

$$< P_* \max\left\{ \left\| \frac{d\varphi_{p+i}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)} \right\|, \kappa_q \left\| \frac{d\varphi_{k+i}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)} \right\| \right\} \leq$$

$$\leq \begin{cases} P_* \max\{(1+A^*)^{p+i}, \kappa_q(1+A^*)^{k+i}\}, & \text{якщо} \quad p+i \geq 0, k+i \geq 0; \\ P_* \max\{\Phi_*^{-(p+i)}, \kappa_q \Phi_*^{-(k+i)}\}, & \text{якщо} \quad p+i < 0, k+i < 0; \\ P_* \max\{(1+A^*)^{p+i}, \kappa_q \Phi_*^{-(k+i)}\}, & \text{якщо} \quad p+i \geq 0, k+i < 0; \\ P_* \max\{\Phi_*^{-(p+i)}, \kappa_q(1+A^*)^{k+i}\}, & \text{якщо} \quad p+i < 0, k+i \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Нагадаємо, що $\Phi_* > 1$. Не втрачаючи загальності, будемо вважати, що $\kappa_q \geq 1$ при всіх $\{p, g, k\} \subset Z$.

Кількість випадків, що можуть виникнути, зведемо до чотирьох.

1^0) $p \geq 0, k \geq 0$.

Оскільки $i \geq 0$, то $p+i \geq 0, k+i \geq 0$. З (3) випливає

$$\Delta P_q^{-1}(i) < P_* \kappa_q (1+A^*)^{m+i}, \quad m = \max\{p, k\}.$$

Остання нерівність забезпечує правильність оцінки

$$\Omega_{q+1} < P_1^{l-1} P_* \kappa_q \sum_{i=0}^{l-1} (1+A^*)^{m+i} =$$

$$= P_1^{l-1} P_* \kappa_q \sum_{i=m}^{m+l-1} (1+A^*)^i < \kappa_q \xi_1(m) P_1^{l-1} (1+A^*)^l,$$

де $\xi_1(m) = \dfrac{P_*}{A^*}(1+A^*)^m$.

Тоді ряд $\sum_{l=1}^{\infty} \|u_l^{(q+1)}\|$ збігається рівномірно відносно $(\varphi, \mu) \in \Lambda$, причому його сума не перевищує $\kappa_{q+1}^1(p, g, k)$, де

$$\kappa_{q+1}^1 = \begin{cases} \dfrac{C^0 \kappa_q \xi_1(m)(1+A^*)}{1 - P_1(1+A^*)} + W_1, & \text{якщо} \quad g \geq -1; \\[2ex] \dfrac{C^0 \kappa_q \xi_1(m)(1+A^*)}{1 - P_1(1+A^*)} + W_2, & \text{якщо} \quad g < -1. \end{cases}$$

Отже, $u^{(q+1)} \in C_\Lambda^1(\varphi, \mu)$, причому

$$\left\| \frac{du^{(q+1)}}{d(\varphi, \mu)} \right\| < \kappa_{q+1}^1 \quad \forall g \in Z.$$

2^0) $p \geq 0, k < 0.$

У цьому випадку при $l < 1-k, i = \overline{0, l-1}$ справджуються нерівності $p+i \geq 0, k+i < 0.$ Тоді з (3) випливають оцінки

$$\Delta P_q^{-1}(i) < P_* \max\{(1+A^*)^{p+i}, \kappa_q \Phi_*^{-(k+i)}\},$$
$$\Omega_{q+1} \leq P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} \Delta P_q^{-1}(i) < P_1^{l-1} P_* \sum_{i=0}^{l-1} \{(1+A^*)^{p+i} + \kappa_q \Phi_*^{-k}\} <$$
$$< \xi_1(p) P_1^{l-1}(1+A^*)^l + P_* \kappa_q \Phi_*^{-k} P_1^{l-1} l. \tag{4}$$

Якщо ж $l \geq 1-k$, то для будь-якого $i = \overline{0, l-1}$ $p+i \geq 0$, для $i = \overline{0, -k-1}$ $k+i < 0$, для $i = \overline{-k, l-1}$ $k+i \geq 0$. Знову використавши (3), записуємо нерівності

$$\Omega_{q+1} < P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{-k-1} P_* \max\{(1+A^*)^{p+i}, \kappa_q \Phi_*^{-(k+i)}\} +$$
$$+ P_1^{l-1} \sum_{i=-k}^{l-1} P_* \max\{(1+A^*)^{p+i}, \kappa_q (1+A^*)^{k+i}\} <$$
$$< P_1^{l-1} P_* \left\{ Z_1 + \sum_{i=-k}^{l-1} \kappa_q (1+A^*)^{p+i} \right\} <$$
$$< P_1^{l-1} P_* \left\{ Z_1 + \frac{\kappa_q (1+A^*)^{p+l}}{A^*} \right\}, \tag{5}$$

де

$$Z_1 = \sum_{i=0}^{-k-1} \{(1+A^*)^{p+i} + \kappa_q \Phi_*^{-k}\}$$

— скінченна сумма, що не залежить від φ, μ, l.

З (4), (5) випливають нерівності

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left\|u_l^{(q+1)}\right\| = \sum_{l=1}^{-k}\left\|u_l^{(q+1)}\right\| + \sum_{l=-k+1}^{\infty}\left\|u_l^{(q+1)}\right\| <$$

$$< \sum_{l=1}^{-k}\left\{C^0[\xi_1(p)P_1^{l-1}(1+A^*)^l + P_*\kappa_q\Phi_*^{-k}P_1^{l-1}l] + P_1^l C_*\left\|\frac{d\varphi_{l+g}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\|\right\} +$$

$$+ \sum_{l=-k+1}^{\infty}\left\{P_1^{l-1}C^0P_*\left[Z_1 + \frac{\kappa_q}{A^*}(1+A^*)^{p+l}\right] + P_1^l C_*\left\|\frac{d\varphi_{l+g}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\|\right\} =$$

$$= \sum_{l=1}^{-k} C^0[\xi_1(p)P_1^{l-1}(1+A^*)^l + P_*\kappa_q\Phi_*^{-k}P_1^{l-1}l] +$$

$$+ \sum_{l=-k+1}^{\infty} P_1^{l-1}C^0P_*\left[Z_1 + \frac{\kappa_q(1+A^*)^{p+l}}{A^*}\right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} P_1^l C_*\left\|\frac{d\varphi_{l+g}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| < \kappa_{q+1}^2(p,g,k),$$

де

$$\kappa_{q+1}^2 = Z_2 + \frac{C^0P_*Z_1}{1-P_1} + \frac{C^0P_*\kappa_q(1+A^*)^{p+1}}{A^*(1-P_1(1+A^*))} + \begin{cases} W_1, & \text{якщо} \quad g \geq -1; \\ W_2, & \text{якщо} \quad g < -1, \end{cases}$$

$$Z_2 = \sum_{l=1}^{-k} C^0\{\xi_1(p)P_1^{l-1}(1+A^*)^l + P_*\kappa_q\Phi_*^{-k}P_1^{l-1}l\}$$

— скінченна сума, що не залежить від φ, μ.

3^0) $p < 0, k \geq 0$.

Цей випадок аналогічний до попереднього. При $l < 1-p, i = \overline{0, l-1}$ справджуються нерівності $k+i \geq 0, p+i < 0$. Тоді

$$\Delta P_q^{-1}(i) < P_*\{\Phi_*^{-p} + \kappa_q(1+A^*)^{k+i}\},$$
$$\Omega_{q+1} < P_*\Phi_*^{-p}P_1^{l-1}l + \xi_1(k)\kappa_q P_1^{l-1}(1+A^*)^l. \tag{6}$$

Якщо ж $l \geq 1-p$, то при всіх $i = \overline{0, l-1}$ $k+i \geq 0$, при $i = \overline{0, -p-1}$ $p+i < 0$, при

$i = \overline{-p, l-1}$ $p + i \geq 0$. У цьому випадку одержуємо оцінку

$$\Omega_{q+1} < P_1^{l-1} P_* \left\{ Z_3 + \frac{\kappa_q}{A^*}(1 + A^*)^{k+l} \right\}, \tag{7}$$

де

$$Z_3 = \sum_{i=0}^{-p-1} \left\{ \Phi_*^{-p} + \kappa_q (1 + A^*)^{k+i} \right\}$$

— скінченна сума, що не залежить від φ, μ, l.

З (6), (7) випливає нерівність

$$\sum_{l=1}^{\infty} \| u_l^{q+1} \| < \kappa_{q+1}^3(p, g, k),$$

де

$$\kappa_{q+1}^3 = Z_4 + \frac{C^0 P_* Z_3}{1 - P_1} + \frac{C^0 P_* \kappa_q (1 + A^*)^{k+1}}{A^*(1 - P_1(1 + A^*))} + \begin{cases} W_1, & \text{якщо} \quad g \geq -1; \\ W_2, & \text{якщо} \quad g < -1, \end{cases}$$

$$Z_4 = \sum_{l=1}^{-p} C^0 \{ P_1^{l-1} P_* \Phi_*^{-p} l + \xi_1(k) \kappa_q P_1^{l-1} (1 + A^*)^l \}$$

— скінченна сума, що не залежить від φ, μ.

4^0) $p < 0, k < 0$.

Може трапитись, що при цьому: а) $p < k$, б) $p > k$, в) $p = k$. Ці три підвипадки однотипні, тому розглянемо докладно лише перший з них.

При $l < 1 - k$ та $i = \overline{0, l-1}$ $k + i < 0, p + i < 0$. Тоді з (3) випливає $\Delta P_q^{-1}(i) < < P_* \kappa_q \Phi_*^n$, де $n = \max\{|p|, |k|\} = -p$. В свою чергу,

$$\Omega_{q+1} < P_1^{l-1} P_* \kappa_q \Phi_*^n \sum_{i=0}^{l-1} 1 = P_1^{l-1} P_* \kappa_q \Phi_*^n l. \tag{8}$$

Якщо $1 - k \leq l < 1 - p$, то при всіх $i = \overline{0, l-1}$ $p + i < 0$, при $i = \overline{0, -k-1}$ $k + i < 0$, при $i = \overline{-k, l-1}$ $k + i \geq 0$. Тоді

$$\Omega_{q+1} < P_1^{l-1} P_* \sum_{i=0}^{-k-1} \max\{\Phi_*^{-(p+i)}, \kappa_q \Phi_*^{-(k+i)}\} +$$

$$+ P_1^{l-1} P_* \sum_{i=-k}^{l-1} \max\{\Phi_*^{-(p+i)}, \kappa_q (1 + A^*)^{k+i}\} <$$

$$< P_* \kappa_q \Phi_*^n (-k) P_1^{l-1} + P_1^{l-1} P_* \Phi_*^{-p} (l + k) + \frac{P_*}{A^*} \kappa_q (1 + A^*)^{k+l} P_1^{l-1}. \tag{9}$$

Нарешті, нехай $l \geq 1-p$. Тоді одержуємо

$$k+i<0, p+i<0 \text{ при } i=\overline{0,-k-1},$$
$$k+i \geq 0, p+i<0 \text{ при } i=\overline{-k,-p-1},$$
$$k+i>0, p+i \geq 0 \text{ при } i=\overline{-p,l-1}.$$

З (3) та останніх співвідношень випливають нерівності

$$\Omega_{q+1} < P_1^{l-1} P_* \Bigg\{ \sum_{i=0}^{-k-1} \max\{\Phi_*^{-(p+i)}, \kappa_q \Phi_*^{-(k+i)}\} +$$

$$+ \sum_{i=-k}^{-p-1} \max\{\Phi_*^{-(p+i)}, \kappa_q (1+A^*)^{k+i}\} +$$

$$+ \sum_{i=-p}^{l-1} \max\{(1+A^*)^{p+i}, \kappa_q (1+A^*)^{k+i}\} \Bigg\} <$$

$$< P_1^{l-1} P_* \Bigg\{ \sum_{i=0}^{-k-1} \kappa_q \Phi_*^n + \sum_{i=-k}^{-p-1} (\Phi_*^{-p} + \kappa_q (1+A^*)^{k+i}) +$$

$$+ \sum_{i=-p}^{l-1} \kappa_q (1+A^*)^{k+i} \Bigg\} < P_1^{l-1} P_* \Bigg\{ Z_5 + Z_6 + \frac{\kappa_q (1+A^*)^{k+l}}{A^*} \Bigg\}, \tag{10}$$

де

$$Z_5 = \sum_{i=0}^{-k-1} \kappa_q \Phi_*^n, \quad Z_6 = \sum_{i=-k}^{-p-1} (\Phi_*^{-p} + \kappa_q (1+A^*)^{k+i})$$

— скінченні суми, що не залежать від φ, μ, l.

З (8) – (10) випливає нерівність вигляду (2)

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|u_l^{(q+1)}\| < \kappa_{q+1}^4 (p, g, k),$$

в якій

$$\kappa_{q+1}^4 = Z_7 + Z_8 + C^0 P_* (Z_5 + Z_6) \frac{P_1^{-p}}{1-P_1} + \frac{C^0 P_* P_1^{-p} \kappa_q (1+A^*)^{k-p+1}}{A^*(1-P_1(1+A^*))} +$$

$$+ \begin{cases} W_1, & \text{якщо} \quad g \geq -1; \\ W_2, & \text{якщо} \quad g < -1, \end{cases}$$

де

$$Z_7 = \sum_{l=1}^{-k} C^0 P_* \kappa_q \Phi_*^n P_1^{l-1} l,$$

$$Z_8 = \sum_{l=-k+1}^{-p} C^0 \Bigg\{ P_* \kappa_q \Phi_*^n (-k) P_1^{l-1} + P_1^{l-1} P_* \Phi_*^{-p} (l+k) +$$

$$+ P_1^{l-1} P_* \kappa_q \frac{(1+A^*)^{k+l}}{A^*} \Bigg\}$$

— скінченні суми, що не залежать від φ, μ. Лему доведено.

Лема 2. *Нехай виконуються умови леми 1 і для* $(\varphi, \mu) \in \Lambda$, $\{x, \bar{x}\} \subset D_\rho$

$$\left\| \frac{dP^{-1}(\varphi, \mu, x)}{d(\varphi, \mu, x)} - \frac{dP^{-1}(\varphi, \mu, \bar{x})}{d(\varphi, \mu, \bar{x})} \right\| \leq L \|x - \bar{x}\|,$$

де $L = \mathrm{const} > 0$. *Тоді при всіх* $s \in Z^+$ *справджуються нерівності*

$$I_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \|\Omega_{l,s+1}^0 - \Omega_{l,s}^0\| \left\| \frac{dc(\varphi_{l+g}(\varphi, \mu), \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \leq B\eta^{s-1}, \tag{11}$$

$$\|\Delta\Omega_s\| = \left\| \frac{d\Omega_{l,s+1}^0}{d(\varphi, \mu)} - \frac{d\Omega_{l,s}^0}{d(\varphi, \mu)} \right\| < I_2 + I_3 + I_4, \tag{12}$$

де

$$I_2 = P_1^{l-1} L \eta^{s-1} \frac{C^0 P_1}{1 - P_1} \sum_{i=0}^{l-1} \max \left\{ \left\| \frac{d\varphi_{i+p}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\|, \kappa_s \left\| \frac{d\varphi_{i+k}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \right\},$$

$$I_3 = P_1^{l-1} P_* \sum_{i=0}^{l-1} \left\| \frac{d\varphi_{i+k}(\varphi, \mu)}{d(\varphi, \mu)} \right\| \left\| \frac{du^{(s)}}{d(\varphi, \mu)} \bigg|_{\varphi = \varphi_{k+i}} - \frac{du^{(s-1)}}{d(\varphi, \mu)} \bigg|_{\varphi = \varphi_{k+i}} \right\|,$$

$$I_4 = P_* \eta^{s-1} \frac{C^0 P_1}{1 - P_1} P_1^{l-2} \left\{ \sum_{i=1}^{l-1} i \Delta P_s^{-1}(i) + \sum_{i=0}^{l-2} (l-1-i) \Delta P_{s-1}^{-1}(i) \right\},$$

причому ряд у (11) збігається рівномірно відносно $(\varphi, \mu) \in \Lambda$, *додатна стала* B *не залежить від* $(\varphi, \mu) \in \Lambda$, *а під символами* $\sum_{i=1}^{0}$ *та* $\sum_{i=0}^{-1}$ *розуміються нулі.*

Доведення. Позначимо $P^{-1}(\varphi_{p+i}(\varphi,\mu),\mu,u^{(s)}(k+i))$ через $P^{-1}_{s,i}$. Опуклість множини D_0 дає можливість записати нерівності

$$\|P^{-1}_{s,i}-P^{-1}_{s-1,i}\| \le P_*\|u^{(s)}(k+i)-u^{(s-1)}(k+i)\| \le$$

$$\le P_*\sup_{(p,g,k,\mu,\varphi)}\|u^{(s)}-u^{(s-1)}\| \le P_*\eta^{(s-1)}\frac{C^0P_1}{1-P_1}, \quad s\in Z^+, i=\overline{0,l-1}, \quad (13)$$

які забезпечують правильність співвідношень

$$\|\Omega^0_{l,s+1}-\Omega^0_{l,s}\| = \left\|\prod_{i=0}^{l-1}P^{-1}_{s,i}-\prod_{i=0}^{l-1}P^{-1}_{s-1,i}\right\| =$$

$$= \Big\|(P^{-1}_{s,0}-P^{-1}_{s-1,0})P^{-1}_{s,1}\ldots P^{-1}_{s,l-1}+P^{-1}_{s-1,0}(P^{-1}_{s,1}-P^{-1}_{s-1,1})P^{-1}_{s,2}P^{-1}_{s,3}\ldots P^{-1}_{s,l-1}+$$

$$+P^{-1}_{s-1,0}P^{-1}_{s-1,1}(P^{-1}_{s,2}-P^{-1}_{s-1,2})P^{-1}_{s,3}\ldots P^{-1}_{s,l-1}+\ldots$$

$$\ldots+P^{-1}_{s-1,0}\ldots P^{-1}_{s-1,l-2}(P^{-1}_{s,l-1}-P^{-1}_{s-1,l-1})\Big\| \le$$

$$\le P_1^{l-1}\sum_{i=0}^{l-1}\|P^{-1}_{s,i}-P^{-1}_{s-1,i}\| \le P_*P_1^{l-1}\sum_{i=0}^{l-1}\sup_{(p,g,k,\mu,\varphi)}\|u^{(s)}-u^{(s-1)}\| \le$$

$$\le P_*P_1^{l-1}l\frac{C^0P_1}{1-P_1}\eta^{s-1}, \quad s\in Z^+.$$

Тоді

$$I_1 \le P_*\sum_{l=1}^{\infty}P_1^{l-1}l\frac{C^0P_1}{1-P_1}\eta^{s-1}\|\frac{dc(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu))}{d(\varphi,\mu)}\| \le B\eta^{s-1},$$

де

$$B=\frac{P_*C^0C_*(1+A^*)^g}{1-P_1}\sum_{l=1}^{\infty}(P_1(1+A^*))^l l$$

при $g\ge -1$ і

$$B=\frac{P_*C_*C^0P_1}{1-P_1}\left\{\sum_{l=1}^{-g-1}P_1^{l-1}l\Phi^{-(l+g)}+\sum_{l=-g}^{\infty}P_1^{l-1}l(1+A^*)^{l+g}\right\}$$

при $g < -1$. В обох випадках B — додатна стала, що не залежить від $(\varphi,\mu) \in \Lambda$, оскільки $P_1(1+A^*) < 1$ і ряд $\sum_{l=1}^{\infty}(P_1(1+A^*))^l l$ збігається. Оцінку (11) доведено.

Оцінимо тепер за нормою різницю $\Delta\Omega_s$. Справджується нерівність

$$\|\Delta\Omega_s\| \le \left\|\frac{dP_{s,0}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{dP_{s-1,0}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| \|P_{s,1}^{-1}\| \ldots \|P_{s,l-1}^{-1}\| +$$

$$+ \|P_{s,0}^{-1} - P_{s-1,0}^{-1}\| \left\|\frac{dP_{s,1}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| \|P_{s,2}^{-1}\| \ldots \|P_{s,l-1}^{-1}\| + \ldots$$

$$\ldots + \|P_{s,0}^{-1} - P_{s-1,0}^{-1}\| \|P_{s,1}^{-1}\| \ldots \|P_{s,l-2}^{-1}\| \left\|\frac{dP_{s,l-1}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| +$$

$$+ \left\|\frac{dP_{s-1,0}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| \|P_{s,1}^{-1} - P_{s-1,1}^{-1}\| \|P_{s,2}^{-1}\| \ldots \|P_{s,l-1}^{-1}\| +$$

$$+ \|P_{s-1,0}^{-1}\| \left\|\frac{dP_{s,1}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{dP_{s-1,1}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| \|P_{s,2}^{-1}\| \ldots \|P_{s,l-1}^{-1}\| + \ldots$$

$$\ldots + \|P_{s-1,0}^{-1}\| \|P_{s,1}^{-1} - P_{s-1,1}^{-1}\| \|P_{s,2}^{-1}\| \ldots \|P_{s,l-2}^{-1}\| \left\|\frac{dP_{s,l-1}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| +$$

$$+ \left\|\frac{dP_{s-1,0}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| \|P_{s-1,1}^{-1}\| \ldots \|P_{s-1,l-2}^{-1}\| \|P_{s,l-1}^{-1} - P_{s-1,l-1}^{-1}\| +$$

$$+ \|P_{s-1,0}^{-1}\| \left\|\frac{dP_{s-1,1}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| \|P_{s-1,2}^{-1}\| \ldots \|P_{s,l-1}^{-1} - P_{s-1,l-1}^{-1}\| + \ldots$$

$$\ldots + \|P_{s-1,0}^{-1}\| \ldots \|P_{s-1,l-2}^{-1}\| \left\|\frac{dP_{s,l-1}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{dP_{s-1,l-1}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\|. \tag{14}$$

Очевидно, права частина останньої нерівності містить l^2 доданків.

Розглянемо відображення $h : \Lambda \to D_0$, що складається з трьох компонент: $\xi_1 : \Lambda \to \to \mathfrak{M}$, $\xi_2 : \Lambda \to S$, $\xi_3 : \Lambda \to D_\rho$, які діють згідно з законами $\xi_1(\varphi,\mu) = \varphi_{i+p}(\varphi,\mu)$, $\xi_2(\varphi,\mu) = \mu$, $\xi_3(\varphi,\mu) = u^{(s)}(k+i)$.

Нехай відображення h_1 діє аналогічно до h, лише $\xi_3(\varphi,\mu) = u^{(s-1)}(k+i)$.

Оскільки компоненти $\xi_i,\ i=\overline{1,3}$, неперервно диференційовні на Λ, то

$$\frac{dP_{s,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} = \left.\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right|_{h(\varphi,\mu)} \cdot \frac{dh(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)},$$

$$\frac{dP_{s-1,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} = \left.\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right|_{h_1(\varphi,\mu)} \cdot \frac{dh_1(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)},$$

де знак $\cdot$ означає суперпозицію відображень. Тоді справджуються нерівності

$$\left\|\frac{dP_{s,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{dP_{s-1,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le$$

$$\le \left\| \left.\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right|_{h(\varphi,\mu)} - \left.\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right|_{h_1(\varphi,\mu)} \right\| \times$$

$$\times \left\|\frac{dh(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| + \left\| \left.\frac{dP^{-1}(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right|_{h_1(\varphi,\mu)} \right\| \left\|\frac{dh(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)} - \frac{dh_1(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le$$

$$\le L\|u^{(s)}(k+i) - u^{(s-1)}(k+i)\| \left\|\frac{dh(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| +$$

$$+ P_* \left\|\frac{du^{(s)}(k+i)}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du^{(s-1)}(k+i)}{d(\varphi,\mu)}\right\| <$$

$$< L\eta^{s-1}\frac{C^0 P_1}{1-P_1}\max\left\{\left\|\frac{d\varphi_{i+p}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\|, \kappa_s \left\|\frac{d\varphi_{i+k}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\|\right\} +$$

$$+ P_* \left\|\frac{d\varphi_{i+k}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \left\| \left.\frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)}\right|_{\varphi=\varphi_{k+i}} - \left.\frac{du^{(s-1)}}{d(\varphi,\mu)}\right|_{\varphi=\varphi_{k+i}} \right\|. \qquad (15)$$

Враховуючи, що

$$\left\|\frac{dP_{s,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)}\right\| = \Delta P_s^{-1}(i), \quad i=\overline{0,l-1},$$

з (13) – (15) одержуємо оцінку

$$\|\Delta\Omega_s\| \leq P_1^{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} \left\| \frac{dP_{s,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{dP_{s-1,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} \right\| +$$

$$+ P_* \eta^{s-1} \frac{C^0 P_1}{1-P_1} P_1^{l-2} \left\{ \sum_{i=1}^{l-1} i \left\| \frac{dP_{s,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} \right\| + \sum_{i=0}^{l-2} (l-1-i) \left\| \frac{dP_{s-1,i}^{-1}}{d(\varphi,\mu)} \right\| \right\},$$

з якої випливає нерівність (12). Лему 2 доведено.

Оскільки для будь-якого $s \in Z^+$ відображення $\dfrac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)}$ належить банаховому простору $\mathbf{L}(\mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathfrak{M})$ лінійних операторів, то для рівномірної відносно $(\varphi,\mu) \in \Lambda$ збіжності послідовності $\left\{ \dfrac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} \right\}_{s=1}^{\infty}$ достатньою умовою є її фундаментальність, рівномірна відносно $(\varphi,\mu) \in \Lambda$.

З рівномірної збіжності цієї послідовності випливає існування та неперервність відносно $(\varphi,\mu) \in \Lambda$ похідної Фреше від функції $u(p,g,k,\mu,\varphi) = \lim_{s\to\infty} u^{(s)}$, що породжує інваріантний тор системи рівнянь (1).

Перевірку фундаментальності вказаної вище послідовності треба проводити окремо в кожному з випадків, розглянутих у лемі 1. У зв'язку з громіздкістю викладок розглянемо лише випадок 1^0. Дослідження інших випадків, використовуючи леми 1 та 2, можна провести за наведеною нижче схемою.

Теорема. *Нехай на множині D_0 справджуються умови леми 2. Тоді для будь-якого $g \in Z$ і таких $\{p,k\} \subset Z_0^+ = \{0,1,2,\dots\}$, при яких*

$$\max\{p,k\} < \log_{(1+A^*)} \frac{A^*(1-P_1(1+A^*))}{C^0 P_*} - 1, \tag{16}$$

функція $u(p,g,k,\mu,\varphi)$ належить $C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$.

Доведення. Покажемо спочатку, що в умовах теореми множина $\kappa_s(p,g,k)$, $s \in Z^+$, при фіксованих p,g,k є обмеженою, тобто

$$\left\| \frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} \right\| < \kappa(p,g,k) \quad \forall s \in Z^+. \tag{17}$$

Припустимо, що $\kappa_1 = \kappa_1(p,g) \geq 1$ (у противному разі покладемо $\kappa_1 = 1$). Нехай спочатку $g \geq -1$.

Позначимо через A дріб $\dfrac{C^0\xi_1(m)(1+A^*)}{1-P_1(1+A^*)}$ і запишемо рекурентну формулу

$$\kappa_s = \kappa_{s-1}A + W_1, \quad s = 2,3,4,\dots.$$

Якщо всі $\kappa_s,\ s = 2, 3, 4, \ldots$ не менші за одиницю, то індуктивними міркуваннями неважко одержати оцінку

$$\left\| \frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} \right\| < W_1 \sum_{i=0}^{s-2} A^i + A^{s-1}\kappa_1, \quad s = 2, 3, 4, \ldots .$$

Оскільки з (16) випливає, що $A < 1$, то, поклавши $\kappa(p, g, k) = W_1 \dfrac{1}{1 - A} + \kappa_1$, одержимо оцінку (17).

Якщо ж $\kappa_s \geq 1,\ s = 2, 3, 4, \ldots, n-1$, а $\kappa_n < 1$, то замінимо κ_n на κ_1. Тоді

$$\left\| \frac{du^{(n+1)}}{d(\varphi,\mu)} \right\| < \kappa_1 A + W_1 = \kappa_2$$

і процес зациклюється.

При $g < -1$ ситуація аналогічна, лише W_1 слід замінити на W_2.

Отже, покладаючи

$$\kappa(p, g, k) = \begin{cases} W_1 \dfrac{1}{1-A} + \kappa_1, & \text{якщо} \quad g \geq -1; \\[2ex] W_2 \dfrac{1}{1-A} + \kappa_1, & \text{якщо} \quad g < -1, \end{cases}$$

одержуємо оцінку (17) для будь-якого $g \in Z$.

Тепер, використовуючи лему 2, записуємо нерівності

$$\sum_{l=1}^{\infty} \|\Delta\Omega_s\| \|c(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu)\| <$$

$$< L\eta^{s-1} \frac{C^{0^2}(1+A^*)^m \kappa}{(1-P_1)A^*} \sum_{l=1}^{\infty} P_1^l (1+A^*)^l +$$

$$+ \ P_*^2 \kappa \eta^{s-1} \frac{C^{0^2}(1+A^*)^m}{(1-P_1)A^*} \sum_{l=1}^{\infty} P_1^{l-1}(1+A^*)^l (l-1) +$$

$$+ \ \frac{P_* C^0}{A^* P_1}(1+A^*)^k \left\| \frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du^{(s-1)}}{d(\varphi,\mu)} \right\| \sum_{l=1}^{\infty} P_1^l (1+A^*)^l <$$

$$< B_1 \eta^{s-1} + B_2 \left\| \frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du^{(s-1)}}{d(\varphi,\mu)} \right\|_0 ,$$

де

$$B_1 = \frac{\kappa C^{0^2}(1+A^*)^{m+1}}{A^*(1-P_1)}\left(\frac{L}{1-P_1(1+A^*)} + P_*^2\sum_{l=1}^{\infty}(P_1(1+A^*))^{l-1}(l-1)\right)$$

і

$$B_2 = \frac{P_* C^0(1+A^*)^{k+1}}{A^*(1-P_1(1+A^*))}$$

— додатні сталі, що не залежать від $(\varphi,\mu) \in \Lambda$, $\|\cdot\|_0 = \sup_{(\varphi,\mu)\in\Lambda}\|\cdot\|$.

Таким чином, одержуємо рекурентну формулу

$$\left\|\frac{du^{(s+1)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)}\right\|_0 < B\eta^{s-1} + B_1\eta^{s-1} + B_2\left\|\frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du^{(s-1)}}{d(\varphi,\mu)}\right\|_0.$$

Позначимо $B + B_1$ через B_3. Тоді

$$\Gamma_s = \left\|\frac{du^{(s+1)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)}\right\|_0 < B_3\eta^{s-1} + B_2\left\|\frac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du^{(s-1)}}{d(\varphi,\mu)}\right\|_0 <$$

$$< B_3(\eta^{s-1} + B_2\eta^{s-2} + B_2^2\eta^{s-3} + \dots + B_2^{s-1}) + B_2^{s-1}\left\|\frac{du^{(1)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du^{(0)}}{d(\varphi,\mu)}\right\|_0 =$$

$$= B_3\frac{\eta^{s-1}((\eta^{-1}B_2)^s - 1)}{\eta^{-1}B_2 - 1} + B_2^{s-1}\left\|\frac{du^{(1)}}{d(\varphi,\mu)}\right\|_0.$$

Враховуючи, що $\eta < 1$, і беручи до уваги, що нерівність (16) забезпечує оцінку $B_2 < 1$, одержуємо співвідношення

$$\Gamma_s < \begin{cases} \eta^{s-1}\Big(\dfrac{B_3}{1-\eta^{-1}B_2} + \kappa(p,g,k)\Big), & \text{якщо} \quad B_2 < \eta; \\[2ex] B_2^{s-1}\Big(\dfrac{B_3}{\eta(\eta^{-1}B_2 - 1)} + \kappa(p,g,k)\Big), & \text{якщо} \quad \eta < B_2; \\[2ex] \eta^{s-1}(B_3 s + \kappa(p,g,k)), & \text{якщо} \quad \eta = B_2, \end{cases}$$

які гарантують рівномірну відносно $(\varphi,\mu) \in \Lambda$ фундаментальність послідовності $\left\{\dfrac{du^{(s)}}{d(\varphi,\mu)}\right\}_{s=1}^{\infty}$.

Теорему доведено.

Зауваження. Нерівність (16) не може виконуватись при будь-яких $\{p,k\} \subset Z^+$. Для того щоб вона мала місце при $p = k = 0$, достатньо, щоб справджувалась оцінка

$$\frac{C^0 P_*(1+A^*)}{A^*(1-P_1(1+A^*))} < 1.$$

Зрозуміло, що цього можна домогтися за рахунок малості сталої C^0. Зрозуміло також, що у випадках $2^0 - 4^0$ умова (16) зміниться.

Припустимо тепер, що умова $P_1 < \dfrac{1}{1+A^*}$ не виконується або матриця $P(\varphi,\mu,x)$ взагалі не є оборотною. Тоді сформульована теорема не має місця. Але може статися, що при цьому $P^0 < \dfrac{1}{\Phi_*}$. Розглянемо цей випадок. Для цього слід викласти аналог побудованої вище теорії. Оскільки принципові відмінності при цьому не виникають, обмежимося розглядом одного з можливих випадків, наприклад, $p \le 0, k \le 0, g \in Z$.

Наслідок. *Нехай на множині D_0 справджуються умови:*

1)$\{a(\varphi,\mu), c(\varphi,\mu), \Phi^{-1}(\varphi,\mu)\} \subset C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$ і $P(\varphi,\mu,x) \in C^1_{D_0}(\varphi,\mu,x)$, причому

$$\left\|\frac{da(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le A^*, \left\|\frac{d\Phi^{-1}(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le \Phi_*, \left\|\frac{dP(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)}\right\| \le P^*, \left\|\frac{dc(\varphi,\mu)}{d(\varphi,\mu)}\right\| \le C_*,$$

$$\left\|\frac{dP(\varphi,\mu,x)}{d(\varphi,\mu,x)} - \frac{dP(\varphi,\mu,\bar{x})}{d(\varphi,\mu,\bar{x})}\right\| \le L^*\|x-\bar{x}\|,$$

де $\{x,\bar{x}\} \subset D_\rho$, $A^*, \Phi_* > 1, P^*, C_*, L^*$ — додатні сталі;

2) виконуються нерівності

$$P^0 < \frac{1}{\Phi_*}, \quad \eta^* = C^0 P^* \sum_{l=1}^{\infty} (P^0)^{l-1} l < 1, \quad \frac{C^0}{1-P^0} \le d.$$

Тоді для будь-якого $g \subset Z$ і таких $\{p,k\} \subset Z_0^- = Z \setminus Z^+$, при яких

$$\max\{-p,-k\} < \log_{\Phi_*} \frac{(\Phi_*-1)(1-P^0\Phi_*)}{C^0 P^*} - 2, \tag{18}$$

функція $u(p,g,k,\mu,\varphi) \in C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$.

Доведення аналогічне до доведення основної теореми, тому наведемо тут лише його схему.

Враховуючи вираз

$$u_*^{(s)} = u_*^{(s)}(p,g,k,\mu,\varphi) = c(\varphi_g(\varphi,\mu),\mu) +$$

$$+ \sum_{l=-\infty}^{-1} \prod_{i=-1}^{l} P(\varphi_{p+i}(\varphi,\mu),\mu,u_*^{(s-1)}(p,g,k,\mu,\varphi_{i+k}(\varphi,\mu)))c(\varphi_{l+g}(\varphi,\mu),\mu),$$

введений у теоремі 2 з [7], за допомогою індуктивних міркувань переконуємося, що $u_*^{(s)} \in \in C^1_\Lambda(\varphi,\mu)$ при всіх $s \in Z^+$, причому

$$\left\| \frac{du_*^{(s+1)}}{d(\varphi,\mu)} \right\| < \kappa^*_{s+1}(p,g,k) = \begin{cases} \dfrac{C^0 \kappa_s^* \xi_2(m^*)\Phi_*}{1 - P^0\Phi_*} + W_1^*, & \text{якщо} \quad g < 1; \\ \\ \dfrac{C^0 \kappa_s^* \xi_2(m^*)\Phi_*}{1 - P^0\Phi_*} + W_2^*, & \text{якщо} \quad g \geq 1, \end{cases}$$

де

$$\kappa_s^* \geq 1, \ \ s \in Z^+, \quad m^* = \min\{p,k\}, \quad \xi_2(m^*) = \frac{P^*\Phi_*^{-m^*+1}}{\Phi_* - 1}, \quad \Phi_* > 1,$$

$$W_1^* = C_*\Phi_*^{-g} + \frac{C_* P^0 \Phi_*^{-g+1}}{1 - P^0\Phi_*},$$

$$W_2^* = C_*(1+A^*)^g + \sum_{l=-g}^{-1} (P^0)^{-l} C_*(1+A^*)^{l+g} + \frac{C_*(P^0)^{g+1}\Phi_*}{1 - P^0\Phi_*}.$$

Неважко переконатися, що за умови (18) $\dfrac{C^0\xi_2(m^*)\Phi_*}{1 - P^0\Phi_*} < 1$, отже, послідовність $\left\{ \dfrac{du_*^{(s+1)}}{d(\varphi,\mu)} \right\}_{s=0}^{\infty}$ є рівномірно обмеженою, тобто

$$\left\| \frac{du_*^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} \right\| < \kappa^*(p,g,k), \quad s \in Z^+,$$

де $\kappa^*(p,g,k)$ не залежить від $(\varphi,\mu) \in \Lambda$.

Це дає можливість одержати рекурентну формулу

$$\left\| \frac{du_*^{(s+1)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du_*^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} \right\|_0 < B_3^* {\eta^*}^{s-1} + B_2^* \left\| \frac{du_*^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} - \frac{du_*^{(s-1)}}{d(\varphi,\mu)} \right\|_0,$$

де B_3^* і B_2^* не залежать від $(\varphi,\mu) \in \Lambda$, причому

$$B_2^* = \frac{C^0 P^* \Phi_*^{-k+2}}{(\Phi_* - 1)(1 - P^0\Phi_*)} \leq \frac{C^0\Phi_*\xi_2(m^*)}{(1 - P^0\Phi_*)} < 1.$$

Вона гарантує рівномірну відносно $(\varphi,\mu) \in \Lambda$ фундаментальність послідовності $\left\{ \dfrac{du_*^{(s)}}{d(\varphi,\mu)} \right\}_{s=1}^{\infty}$, що завершує доведення наслідку, оскільки $\lim_{s\to\infty} u_*^{(s)}$ є функцією, породжуючою інваріантний тор системи рівнянь (1).

1. *Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.* Инвариантные торы линейных счетных систем дискретных уравнений, заданных на бесконечномерном торе // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 244 – 251.

2. *Самойленко А.М., Теплинский Ю.В.* Предельные теоремы в теории систем разностных уравнений. — Киев, 1998. — 60 с. — (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 98.3).

3. *Теплінський Ю.В., Марчук Н.А.* Метод укорочення в дослідженні гладкості інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь з параметрами // Зб. наук. праць Кам'янець-Поділ. пед. ун-ту. Сер. мат. — 2000. — Вип. 5. — С. 117 – 126.

4. *Мартинюк Д.І., Верьовкіна Г.В.* Інваріантні множини зліченних систем різницевих рівнянь // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук. — 1997. — Вип. 1. — С. 117 – 127.

5. *Верьовкіна Г.В.* Про введення локальних координат для зліченної дискретної системи в околі інваріантного тору // Там же. — 1997. — Вип. 4. — С. 23 – 29.

6. *Теплінський Ю.В., Марчук Н.А.* Про гладкість інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь з параметрами // Укр. мат. журн. — 2001. — **53**, № 9. — С. 1241 – 1250.

7. *Марчук Н.А.* Про існування інваріантного тора зчисленної системи різницевих рівнянь, що визначена на нескінченновимірному торі і містить відхилення дискретного аргумента // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. — 2001. — Вип. 7. — С. 160 – 170.

8. *Теплінський Ю.В., Марчук Н.А.* Про диференційовність в сенсі Фреше інваріантних торів зчисленних систем різницевих рівнянь, визначених на нескінченновимірних торах // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 1. — С. 75 – 90.

Одержано 16.03.2002