УДК 517.91/912

# ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД ДЛЯ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАГАЮВАННЯМ ТА ОБМЕЖЕННЯМИ

**А. Ю. Лучка, В. А. Ферук**

*Ін-т математики НАН України*
*Україна, 01601, Київ 4, вул. Терещенківська, 3*

*In this paper, consistency conditions for systems of differential equations with constant delay and restrictions are established. The new modification of projection-iterative method for such problems is proposed and substantiated.*

*Встановлено умови сумісності систем диференціальних рівнянь зі сталим загаюванням та обмеженнями. Запропоновано новий варіант проекційно-ітеративного методу для таких задач і наведено його обґрунтування.*

Функціонально-диференціальні рівняння почали інтенсивно вивчатись у другій половині минулого століття (див., наприклад, [1 – 3] ).

Дослідження диференціальних рівнянь та їх систем з обмеженнями чи імпульсами [4 – 7] стимулювали розвиток методів дослідження функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями та розробку наближених методів.

У даній статті запропоновано новий підхід до встановлення умов сумісності системи диференціальних рівнянь із загаюванням та обмеженнями і новий варіант проекційно-ітеративного методу їх розв'язання.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо систему функціонально-диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{d}{dt}x(t) + L(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta) = f(t), \qquad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$x(t-\Delta) = \varphi(t), \qquad t \in [a, a+\Delta), \tag{2}$$

в якій $\Delta > 0$ — стале загаювання, $L(t)$ та $M(t)$ — матриці розмірності $m \times m$, елементи яких сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$, $\varphi \in L_2[a, a+\Delta)$, де $L_2[a,c]$ — простір вектор-функцій, компоненти яких сумовні з квадратом на відрізку $[a,c]$.

Поставимо задачу знаходження в класі $W_2^1[a,b]$ абсолютно неперервних вектор-функцій, похідна яких належить простору $L_2[a,b]$, вектор-функції $x(t)$, яка майже скрізь задовольняє систему рівнянь (1) та обмеження

$$\int_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{3}$$

де матриця $S(t)$ розмірності $l \times m$ із сумовними з квадратом елементами і вектор $\alpha \in \mathbb{R}^l$ є заданими, причому $l \geq m$.

Задачу (1)–(3) вважатимемо сумісною, якщо існує розв'язок $x \in W_2^1[a,b]$ системи рівнянь (1), який задовольняє обмеження (3). У противному разі задача є несумісною.

Нижче встановлюються умови сумісності задачі (1)–(3) і наводиться обґрунтування застосування до неї нового варіанту проекційно-ітеративного методу.

**2. Суть методу.** Застосуємо до розглядуваної задачі новий варіант проекційно-ітеративного методу, запропонованого в роботі [8]. З цією метою введемо до розгляду вектор-функцію

$$v(t) = f(t) + C(t)x(t) + D(t)x(t-\Delta), \tag{4}$$

де матриці $C(t)$ та $D(t)$ визначаються формулами

$$C(t) = A(t) - L(t), \qquad D(t) = B(t) - M(t), \tag{5}$$

в яких $A(t)$ та $B(t)$ — неперервні при $t \in [a,b]$ матриці розмірності $m \times m$.

Суть методу полягає в тому, що, маючи наближення $x_{k-1}(t)$, спочатку знаходимо вектор-функцію

$$v_k(t) = f(t) + C(t)x_{k-1}(t) + D(t)x_{k-1}(t-\Delta), \tag{6}$$

а після цього наступне наближення визначаємо із допоміжної задачі з керуванням

$$\frac{d}{dt}x_k(t) + A(t)x_k(t) + B(t)x_k(t-\Delta) = u_k(t) + v_k(t), \tag{7}$$

$$x_k(t) = \varphi(t), \qquad t \in [a, a+\Delta), \qquad \int\limits_a^b S(t)x_k(t)dt = \alpha, \tag{8}$$

$$\int\limits_a^b \Psi(t)\left(\frac{d}{dt}x_k(t) + L(t)x_k(t) + M(t)x_k(t-\Delta) - f(t)\right)dt = 0, \tag{9}$$

в якій керування має вигляд

$$u_k(t) = \Phi(t)\lambda_k, \tag{10}$$

матриці $\Phi(t)$ та $\Psi(t)$ із сумовними з квадратом на $[a,b]$ елементами розмірності $m \times n$ та $\nu \times m$ відповідно є заданими, а вектор-функцію $x_k \in W_2^1[a,b]$ та вектор $\lambda_k \in \mathbb{R}^n$ потрібно визначити.

Тут і в подальшому вважаємо, що стовпці матриці $\Phi(t)$ і рядки матриці $\Psi(t)$ лінійно незалежні, а $m + n = l + \nu$.

Початкове наближення $x_0(t)$ визначаємо із задачі (7)–(10) при $k = 0$ та заданій вектор-функції $v_0 \in L_2[a,b]$.

Частинним випадком методу (6)–(10), коли немає обмеження (9), є ітераційний метод, досліджений в [7–10], а початкове наближення $x_0(t)$ можна трактувати як наближення, знайдене за проекційним методом.

**3. Зведення системи функціонально-диференціальних рівнянь до крайової задачі для системи диференціальних рівнянь.** Припустимо, не зменшуючи загальності, що $b = a + N\Delta$. У цьому випадку систему рівнянь (1), (2) можна звести до рівносильної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь порядку $mN$.

Справді, використаємо методику, описану в [11], згідно з якою потрібно розглянути систему рівнянь (1) на кожному інтервалі $(\tau_i, \tau_{i+1})$, де $\tau_i = a+(i-1)\Delta$, $i = \overline{1, N+1}$, тобто

$$\frac{d}{dt}x(t) + L(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta) = f(t), \qquad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \tag{11}$$

і ввести заміну $t = cs + \tau_i$, де $c = \Delta/T$ і $s \in [0, T]$.

З урахуванням того, що $t - \Delta = cs + \tau_i - \Delta = cs + \tau_{i-1}$, система (11) набере вигляду

$$\frac{1}{c}\frac{d}{ds}x(cs+\tau_i) + L(cs+\tau_i)x(cs+\tau_i) + M(cs+\tau_i)x(cs+\tau_{i-1}) = f(cs+\tau_i), \qquad s \in (0, T). \tag{12}$$

Якщо ввести до розгляду матриці розмірності $m \times m$

$$L_i(s) = cL(cs+\tau_i), \qquad M_i(s) = cM(cs+\tau_i), \qquad i = \overline{1, N}, \tag{13}$$

та вектор-функції

$$z_i(s) = x(cs+\tau_i), \qquad g_i(s) = cf(cs+\tau_i) - \begin{cases} M_1(s)\varphi(cs+\tau_1), & i = 1; \\ 0, & i = \overline{2, N}, \end{cases} \tag{14}$$

і врахувати той факт, що за умови (2)

$$z_0(s) = x(cs+\tau_0) = \varphi(cs+\tau_1), \qquad \tau_0 = a - \Delta, \tag{15}$$

то з формул (12)–(14) отримаємо

$$\begin{gathered} \frac{dz_1}{ds} + L_1(s)z_1 = g_1(s), \\ \frac{dz_2}{ds} + L_2(s)z_2 + M_2(s)z_1 = g_1(s), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dz_N}{ds} + L_N(s)z_N + M_N(s)z_{N-1} = g_N(s). \end{gathered} \tag{16}$$

Щоб забезпечити неперервність розв'язку $x(t)$ системи (1) в точках $t = \tau_i$, $i = \overline{2,N}$, накладемо умови

$$z_i(T) = z_{i+1}(0), \qquad i = \overline{1, N-1}. \tag{17}$$

Систему диференціальних рівнянь (16) порядку $mN$ з крайовими умовами (17) запишемо у вигляді

$$\frac{dz}{ds} + P(s)z = g(s), \qquad s \in (0,T), \tag{18}$$

$$Jz(T) = Ez(0), \tag{19}$$

де

$$z(s) = \begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ \cdots \\ z_N(s) \end{pmatrix}, \qquad P(s) = \begin{pmatrix} L_1(s) & O & \cdots & O & O \\ M_2(s) & L_2(s) & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & M_N(s) & L_N(s) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$g(s) = \begin{pmatrix} g_1(s) \\ g_2(s) \\ \cdots \\ g_N(s) \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} I & O & \cdots & O & O \\ O & I & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & I & O \end{pmatrix},$$
$$E = \begin{pmatrix} O & I & O & \cdots & O \\ O & O & I & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & O & \cdots & I \end{pmatrix}, \tag{21}$$

а $I$ — одинична матриця в $\mathbb{R}^m$.

Таким чином, на підставі аналізу викладеного приходимо до такої леми.

**Лема 1.** *Система функціонально-диференціальних рівнянь (1) порядку $m$ з умовою (2) у випадку, коли $b = a + N\Delta$, рівносильна системі диференціальних рівнянь (18) порядку $mN$ з крайовими умовами (19). Розв'язки цих задач пов'язані між собою співвідношеннями*

$$x(t) = \begin{cases} z_1(s), & t \in (a, \tau_2]; \\ z_2(s), & t \in [\tau_2, \tau_3]; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ z_N(s), & t \in [\tau_N, b), \end{cases} \qquad z(s) = \begin{pmatrix} x(cs+\tau_1) \\ x(cs+\tau_2) \\ \cdots\cdots\cdots \\ x(s+\tau_N) \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$s \in [0,T], \quad z_i(T) = z_{i+1}(0), \quad i = \overline{1, N-1}.$$

***Зауваження 1.*** У випадку, коли в розглядуваній задачі $b \in (\tau_N, \widehat{b})$, де $\widehat{b} = a + N\Delta$, її також можна звести до рівносильної крайової задачі, якщо покласти $L(t) = 0$, $M(t) = 0$ та $f(t) = 0$ при $t \in (b, \widehat{b}]$ і вважати, що $x(\widehat{b}) = x(b)$. У цьому випадку в формулах (14) та (16)

$$g_N(s) = \begin{cases} cf(cs + \tau_N), & s \in [0, d]; \\ 0, & s \in (d, T], \end{cases} \qquad d = \frac{1}{c}(b - \tau_N),$$

$$L_N(s) = \begin{cases} cL(cs + \tau_N), & s \in [0, d]; \\ 0, & s \in (d, T], \end{cases} \qquad M_N(s) = \begin{cases} cM(cs + \tau_N), & s \in [0, d]; \\ 0, & s \in (d, T], \end{cases}$$

а до крайових умов (17) потрібно додати умову $z_N(T) = z_N(d)$.

**4. Допоміжна задача.** При встановленні умов сумісності задачі (1) – (3) та побудові її наближених розв'язків за методом (6) – (10) важливу роль відіграє допоміжна задача

$$\frac{d}{dt}x(t) + A(t)x(t) + B(t)x(t - \Delta) = u(t) + v(t), \tag{23}$$

$$x(t - \Delta) = \varphi(t), \qquad t \in [a, a + \Delta), \qquad \int\limits_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{24}$$

$$\int\limits_a^b \Psi(t)\left(\frac{d}{dt}x(t) + L(t)x(t) + M(t)x(t - \Delta) - f(t)\right)dt = 0, \tag{25}$$

$$u(t) = \Phi(t)\lambda, \tag{26}$$

в якій вектор-функція $v \in L_2[a, b]$ є заданою, а потрібно визначити вектор-функцію $x \in W_2^1[a, b]$ та вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$.

Побудуємо розв'язок задачі (23) – (26). З цією метою зведемо її до рівносильної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь порядку $mN$ з обмеженнями. Для цього, як і раніше, розглянемо систему (23) на кожному інтервалі $(\tau_i, \tau_{i+1})$ і введемо заміну $t = cs + \tau_i$, в результаті чого отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{d}{ds}x(cs + \tau_i) \; + \; A(cs + \tau_i)x(cs + \tau_i) + B(cs + \tau_i)x(cs + \tau_{i-1}) = \\ = u(cs + \tau_i) + v(cs + \tau_i), \quad i = \overline{1, N}, \quad s \in (0, T). \end{aligned} \tag{27}$$

Якщо тепер врахувати рівність (15) і той факт, що згідно з формулою (26)

$$u(cs+\tau_i) = \Phi(cs+\tau_i)\lambda,$$

а також використати перше позначення з (14) та ввести нові

$$A_i(s) = cA(cs+\tau_i), \qquad B_i(s) = cB(cs+\tau_i),$$

$$w_i(s) = cu(cs+\tau_i), \qquad \Phi_i(s) = c\Phi(cs+\tau_i), \qquad i = \overline{1,N}, \tag{28}$$

$$y_i(s) = cv(cs+\tau_i) - \begin{cases} B_1(s)\varphi(cs+\tau_i), & i = 1; \\ 0, & i = \overline{2,N}, \end{cases}$$

то із співвідношення (27) одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{dz_1}{ds} + A_1(s)z_1 = w_1(s) + y_1(s), \\ &\frac{dz_2}{ds} + A_2(s)z_2 + B_2(s)z_1 = w_2(s) + y_2(s), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{dz_N}{ds} + A_N(s)z_N + B_N(s)z_{N-1} = w_N(s) + y_N(s), \end{aligned} \tag{29}$$

до якої потрібно ще додати крайові умови (17), щоб забезпечити неперервність вектор-функції $x(t)$.

Обмеження (24) можна зобразити у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^T S_i(s)z_i(s)ds = \alpha, \tag{30}$$

де

$$S_i(s) = cS(cs+\tau_i), \qquad i = \overline{1,N}. \tag{31}$$

Справді, враховуючи позначення (14) та (31), маємо

$$\int_a^b S(t)x(t)dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} S(t)x(t)dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_0^T cS(cs+\tau_i)x(cs+\tau_i)ds = \sum_{i=1}^{N} \int_0^T S_i(s)z_i(s)ds.$$

Далі, обмеження (25) запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N} \int_0^T \Psi_i(s) \left( \frac{d}{ds} z_i(s) + L_i(s) z_i(s) + M_i(s) z_{i-1}(s) - g_i(s) \right) ds = 0, \tag{32}$$

де $z_0(s) = 0$ і

$$\Psi_i(s) = c\Psi(cs + \tau_i), \qquad i = \overline{1, N}. \tag{33}$$

Для цього досить вказане обмеження записати у вигляді

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Psi(t) \left( \frac{d}{dt} x(t) + L(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta) - f(t) \right) dt = 0,$$

ввести заміну $t = cs + \tau_i$, $i = \overline{1, N}$, та врахувати формули (13) – (15) і (33).

Систему диференціальних рівнянь (29) з крайовими умовами (17) і обмеженнями (30) та (32) запишемо у вигляді

$$\frac{dz}{ds} + H(s)z = w(s) + y(s), \qquad Jz(T) = Ez(0), \tag{34}$$

$$\int_0^T U(s)z(s)ds = \alpha, \qquad \int_0^T V(s) \left( \frac{d}{ds} + P(s) \right) z(s)ds = \beta, \tag{35}$$

$$w(s) = W(s)\lambda, \qquad \beta = \int_0^T V(s)g(s)ds, \tag{36}$$

де матриці $P(s), J, E$ та вектор-функції $z(s), g(s)$ визначаються формулами (20), (21) і

$$H(s) = \begin{pmatrix} A_1(s) & O & \cdots & O & O \\ B_2(s) & A_2(s) & \cdots & O & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & O & \cdots & B_N(s) & A_N(s) \end{pmatrix}, \qquad y(s) = \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \cdots \\ y_N(s) \end{pmatrix}, \tag{37}$$

$$\begin{matrix} U(s) = \begin{pmatrix} S_1(s) & S_2(s) & \cdots & S_N(s) \end{pmatrix}, \\ V(s) = \begin{pmatrix} \Psi_1(s) & \Psi_2(s) & \cdots & \Psi_N(s) \end{pmatrix}, \end{matrix} \quad W(s) = \begin{pmatrix} \Phi_1(s) \\ \Phi_2(s) \\ \cdots \\ \Phi_N(s) \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Припустимо, що неперервні матриці $A(t)$ та $B(t)$ вибрано таким чином, що можна побудувати в явному вигляді матрицю $\Gamma(s,\xi)$, яка задовольняє умову

$$J\Gamma(T,\xi) = E\Gamma(0,\xi), \tag{39}$$

за допомогою якої частинний розв'язок задачі

$$\frac{dv}{ds} + H(s)v = y(s), \qquad Jv(T) = Ev(0) \tag{40}$$

визначається за формулою

$$v(s) = \int\limits_0^T \Gamma(s,\xi)y(\xi)d\xi. \tag{41}$$

За такого припущення розв'язок задачі (34) – (36) шукаємо у вигляді

$$z(s) = v(s) + Y(s)\lambda + Z(s)\mu, \qquad w(s) = W(s)\lambda, \tag{42}$$

де матриці $Y(s)$ та $Z(s)$ розмірності $mN \times n$ та $mN \times m$ відповідно визначаються із задач

$$\frac{d}{ds}Y(s) + H(s)Y(s) = W(s), \qquad JY(T) = EY(0), \tag{43}$$

$$\frac{d}{ds}Z(s) + H(s)Z(s) = O, \qquad JZ(T) = EZ(0). \tag{44}$$

На підставі співвідношень (40), (43), (44) неважко впевнитись у тому, що вектор-функція $z(s)$ (42) є розв'язком крайової задачі (34). Залишилось визначити вектори $\lambda \in \mathbb{R}^n$ та $\mu \in \mathbb{R}^m$ таким чином, щоб справджувались обмеження. Для цього підставимо вираз (42) у формули (35) і виконаємо нескладні перетворення, в результаті чого отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Lambda_{11}\lambda + \Lambda_{12}\mu = d_1, \qquad \Lambda_{21}\lambda + \Lambda_{22}\mu = d_2, \tag{45}$$

де матриці

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \int\limits_0^T U(s)Y(s)ds, \quad \Lambda_{21} = \int\limits_0^T V(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)Y(s)ds, \\ \Lambda_{12} &= \int\limits_0^T U(s)Z(s)ds, \quad \Lambda_{22} = \int\limits_0^T V(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)Z(s)ds \end{aligned} \tag{46}$$

мають розмірність $l \times n, \nu \times n, l \times m, \nu \times m$ відповідно і

$$d_1 = \alpha - \int_0^T U(s)v(s)ds, \qquad d_2 = \beta - \int_0^T V(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)v(s)ds, \tag{47}$$

причому $d_1 \in \mathbb{R}^l$ та $d_2 \in \mathbb{R}^\nu$.

**Лема 2.** *Якщо* $\det \Lambda \neq 0$, *де*

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}, \tag{48}$$

*то існують вектор-функції h(s),r(s) та матриці* $G(s,\xi)$, $R(s,\xi)$ *розмірності* $mN \times mN$ *такі, що єдиний розв'язок задачі (34) – (36) зображається формулами*

$$z(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi, \tag{49}$$

$$w(s) = r(s) + \int_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi \tag{50}$$

*і справджуються рівності*

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)h(s) = r(s), \qquad Jh(T) = Eh(0), \qquad \int_0^T U(s)h(s)ds = \alpha, \tag{51}$$

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)\int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi = y(s) + \int_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi, \tag{52}$$

$$JG(T,\xi) = EG(0,\xi), \qquad \int_0^T U(s)\int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi ds = 0 \ \forall y \in L_2[0,T], \tag{53}$$

$$\int_0^T G(s,\xi)W(\xi)d\xi = O, \qquad W(s) + \int_0^T R(s,\xi)W(\xi)d\xi = O. \tag{54}$$

***Доведення.*** За умови леми існують матриці $\Delta_{11}, \Delta_{12}, \Delta_{21}, \Delta_{22}$ розмірності $n \times l$, $n \times \nu$, $m \times l$, $m \times \nu$ відповідно такі, що єдиний розв'язок системи рівнянь (45) можна зобразити у вигляді

$$\lambda = \Delta_{11} d_1 + \Delta_{12} d_2, \qquad \mu = \Delta_{21} d_1 + \Delta_{22} d_2, \tag{55}$$

причому справедливі співвідношення

$$\Delta_{11}\Lambda_{11} + \Delta_{12}\Lambda_{21} = I_n, \qquad \Delta_{21}\Lambda_{11} + \Delta_{22}\Lambda_{21} = O, \tag{56}$$

$$\Lambda_{11}\Delta_{11} + \Lambda_{12}\Delta_{21} = I_l, \qquad \Lambda_{11}\Delta_{12} + \Lambda_{12}\Delta_{22} = O, \tag{57}$$

де $I_n$ та $I_l$ — одиничні матриці в $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^l$.

Якщо підставити співвідношення (55) у формули (42) і врахувати при цьому вирази (47), то отримаємо

$$z(s) = v(s) + (Y(s)\Delta_{11} + Z(s)\Delta_{21}) \left( \alpha - \int_0^T U(s) v(s) ds \right) +$$

$$+ \ (Y(s)\Delta_{12} + Z(s)\Delta_{22}) \left( \beta - \int_0^T V(s) \left( \frac{d}{ds} + P(s) \right) v(s) ds \right).$$

Ці співвідношення можна записати у вигляді (49), (50), якщо використати формулу (41) та ввести позначення

$$h(s) = Q_1(s)\alpha + Q_2(s)\beta, \qquad r(s) = W(s)\left(\Delta_{11}\alpha + \Delta_{12}\beta\right), \tag{58}$$

$$Q_1(s) = Y(s)\Delta_{11} + Z(s)\Delta_{21}, \qquad Q_2(s) = Y(s)\Delta_{12} + Z(s)\Delta_{22}, \tag{59}$$

$$\int_0^T G(s,\xi) y(\xi) d\xi = \int_0^T \Gamma(s,\xi) y(\xi) d\xi - \int_0^T Q_1(s) U(\eta) \int_0^T \Gamma(\eta,\xi) y(\xi) d\xi d\eta -$$

$$- \int_0^T Q_2(s) V(\eta) \left( \frac{d}{d\eta} + P(\eta) \right) \int_0^T \Gamma(\eta,\xi) y(\xi) d\xi d\eta, \tag{60}$$

$$\int_0^T R(s,\xi) y(\xi) d\xi = - \int_0^T W(s)\Delta_{11} U(\eta) \int_0^T \Gamma(\eta,\xi) y(\xi) d\xi d\eta -$$

$$- \int_0^T W(s)\Delta_{12} V(\eta) \left( \frac{d}{d\eta} + P(\eta) \right) \int_0^T \Gamma(\eta,\xi) y(\xi) d\xi d\eta. \tag{61}$$

Оскільки згідно з формулами (40) та (41)

$$\left(\frac{d}{d\eta}+P(\eta)\right)\int\limits_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi = \left(\frac{d}{d\eta}+H(\eta)\right)\int\limits_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi +$$

$$+\ (P(\eta)-H(\eta))\int\limits_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi = y(\eta) - \int\limits_0^T F(\eta)\int\limits_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi,$$

де $F(\eta) = H(\eta) - P(\eta)$, то, очевидно, ядра операторів (60) та (61) мають вигляд

$$G(s,\xi) = \Gamma(s,\xi) - Q_2(s)V(\xi) + \int\limits_0^T (Q_2(s)V(\eta)F(\eta) - Q_1(s)U(\eta))\Gamma(\eta,\xi)d\eta, \qquad (62)$$

$$R(s,\xi) = W(s)\left\{-\Delta_{12}V(\xi) + \int\limits_0^T (\Delta_{12}V(\eta)F(\eta) - \Delta_{11}U(\eta))\Gamma(\eta,\xi)d\eta\right\}. \qquad (63)$$

Використавши формули (59), (43) та (44), легко отримати співвідношення

$$\left(\frac{d}{ds}+H(s)\right)Q_1(s) = W(s)\Delta_{11}, \qquad \left(\frac{d}{ds}+H(s)\right)Q_2(s) = W(s)\Delta_{12}, \qquad (64)$$

$$JQ_1(T) = EQ_1(0), \qquad JQ_2(T) = EQ_2(0), \qquad (65)$$

на підставі яких і формул (58) маємо

$$\left(\frac{d}{ds}+H(s)\right)h(s) = r(s), \qquad Jh(T) = Eh(0),$$

тобто справджуються перші дві рівності (51).

Далі, за допомогою формул (60), (41), (40), (64) та (61) можна переконатись у правильності рівності (52). Справді, маємо

$$\left(\frac{d}{ds}+H(s)\right)\int\limits_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi = y(s) - W(s)\Delta_{11}\int\limits_0^T U(\eta)\int\limits_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi d\eta -$$

$$-\ W(s)\Delta_{12}\int\limits_0^T V(\eta)\left(\frac{d}{d\eta}+P(\eta)\right)\int\limits_0^T \Gamma(\eta,\xi)y(\xi)d\xi d\eta = y(s) + \int\limits_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi.$$

Оскільки, як це випливає із співвідношень (59), (46), (57),

$$\int_0^T U(s)Q_1(s)ds = \int_0^T U(s)(Y(s)\Delta_{11} + Z(s)\Delta_{21})ds = \Lambda_{11}\Delta_{11} + \Lambda_{12}\Delta_{21} = I_l,$$

$$\int_0^T U(s)Q_2(s)ds = \int_0^T U(s)(Y(s)\Delta_{12} + Z(s)\Delta_{22})ds = \Lambda_{11}\Delta_{12} + \Lambda_{12}\Delta_{22} = O,$$

то з урахуванням виразів (58), (65), (62) та (39) третю рівність (51) та співвідношення (53) отримуємо очевидним чином.

Використовуючи зображення (60) та (61) і формули (41), (43), (46), (59), (56), (57), маємо

$$\int_0^T G(s,\xi)W(\xi)d\xi = \int_0^T \Gamma(s,\xi)W(\xi)d\xi - \int_0^T Q_1(s)U(\eta)\int_0^T \Gamma(\eta,\xi)W(\xi)d\xi d\eta -$$

$$- \int_0^T Q_2(s)V(\eta)\left(\frac{d}{d\eta} + P(\eta)\right)\int_0^T \Gamma(\eta,\xi)W(\xi)d\xi d\eta =$$

$$= Y(s) - Q_1(s)\int_0^T U(\eta)Y(\eta)d\eta - Q_2(s)\int_0^T V(\eta)\left(\frac{d}{d\eta} + P(\eta)\right)Y(\eta)d\eta =$$

$$= Y(s) - Q_1(s)\Lambda_{11} - Q_2(s)\Lambda_{21} = Y(s) - Y(s)(\Delta_{11}\Lambda_{11} + \Delta_{12}\Lambda_{21}) -$$

$$- Z(s)(\Delta_{21}\Lambda_{11} + \Delta_{22}\Lambda_{21}) = Y(s) - Y(s) = O,$$

$$\int_0^T R(s,\xi)W(\xi)d\xi = -\int_0^T W(s)\Delta_{11}U(\eta)\int_0^T \Gamma(\eta,\xi)W(\xi)d\xi d\eta -$$

$$- \int_0^T W(s)\Delta_{12}V(\eta)\left(\frac{d}{d\eta} + P(\eta)\right)\int_0^T \Gamma(\eta,\xi)W(\xi)d\xi d\eta =$$

$$= -W(s)\left(\Delta_{11}\int_0^T U(\eta)Y(\eta)d\eta + \Delta_{12}\int_0^T V(\eta)\left(\frac{d}{d\eta} + P(\eta)\right)Y(\eta)d\eta\right) =$$

$$= -W(s)(\Delta_{11}\Lambda_{11} + \Delta_{12}\Lambda_{21}) = -W(s).$$

Отже, властивості (54) є правильними.

**Лема 3.** *Якщо матриця* $\Lambda$ *вигляду (48) невироджена, то для довільної вектор-функції* $v \in W_2^1[0,T]$*, яка задовольняє крайові умови* $Jv(T) = Ev(0)$ *і обмеження*

$$\int_0^T U(t)v(t)dt = \alpha, \qquad \int_0^T V(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)v(s)ds = \beta, \tag{66}$$

*справджуються співвідношення*

$$v(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right)v(\xi)d\xi, \tag{67}$$

$$0 = r(s) + \int_0^T R(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right)v(\xi)d\xi, \tag{68}$$

*де вектор-функції h(s) та r(s) визначаються формулами (58), (59), а* $G(s,\xi)$ *та* $R(s,\xi)$ *— формулами (62), (63).*

Справді, покладемо в рівнянні

$$y(s) = \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)v(s),$$

в результаті чого отримаємо задачу

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)z(s) = w(s) + \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)v(s), \qquad Jz(T) = Ez(0), \tag{69}$$

$$\int_0^T U(s)z(s)ds = \alpha, \qquad \int_0^T V(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)z(s)ds = \beta. \tag{70}$$

Оскільки виконуються всі умови леми 2, задача (69), (70) має єдиний розв'язок, який з урахуванням формул (49), (50) має вигляд

$$z(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right)v(\xi)d\xi, \tag{71}$$

$$w(s) = r(s) + \int_0^T R(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right)v(\xi)d\xi. \tag{72}$$

Нехай $x(t) = z(t) - v(t)$, тоді, по-перше, задача (69) набере вигляду

$$\left(\frac{d}{ds} + H(s)\right) x(s) = w(s), \qquad Jx(T) = Ex(0), \tag{73}$$

і, по-друге, враховуючи обмеження (66), (70), маємо

$$\int_0^T U(s)x(s)ds = 0, \qquad \int_0^T V(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) x(s)ds = 0. \tag{74}$$

За умови леми однорідна задача (73), (74) має єдиний розв'язок $x(t) = 0$, $w(s) = 0$, тобто $z(s) = v(s)$. Із останніх рівностей та формул (71), (72) співвідношення (67), (68) випливають очевидним чином.

**5. Умови сумісності задачі.** За допомогою лем можна встановити умови сумісності задачі (1) – (3). Для цього вектор-функцію $v(t)$, яка визначається формулою (4), зобразимо у рівносильному вигляді

$$y(s) = g(s) + F(s)z(s), \qquad F(s) = H(s) - P(s). \tag{75}$$

Щоб його отримати, досить розглянути вираз (4) на кожному інтервалі $(\tau_i, \tau_{i+1})$, виконати заміну $t = cs + \tau_i$, $i = \overline{1, N}$, $s \in (0, T)$, і використати позначення (5), (28), (13) – (15), (20), (21) та (37).

Припустимо, що існує єдиний розв'язок допоміжної задачі (34) – (36), у якій вектор-функція $y(s)$ має вигляд (75). Підставивши вираз (49) у співвідношення (75), отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$y(s) = p(s) + \int_0^T K(s,\xi)y(\xi)d\xi, \tag{76}$$

в якій

$$p(s) = g(s) + F(s)h(s), \qquad K(s,\xi) = F(s)G(s,\xi). \tag{77}$$

**Теорема 1.** *Якщо матриця $\Lambda$ (48) невироджена, то задача (1) – (3) сумісна тільки тоді, коли виконується умова*

$$r(s) + \int_0^T R(s,\xi)y(\xi)d\xi = 0, \tag{78}$$

*де $y \in L_2[0, T]$ — розв'язок системи інтегральних рівнянь (76).*

***Доведення.*** Нехай $y^* \in L_2[0,T]$ — розв'язок інтегрального рівняння (76), який задовольняє умову (78), тобто справедливі рівності

$$y^*(s) = g(s) + \int_0^T K(s,\xi)y^*(\xi)d\xi, \qquad r(s) + \int_0^T R(s,\xi)y^*(\xi)d\xi = 0. \tag{79}$$

Побудуємо вектор-функцію

$$z^*(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y^*(\xi)d\xi \tag{80}$$

і встановимо, що вектор-функція $x^* \in W_2^1[a,b]$, яка визначається формулою

$$x^*(t) = \begin{cases} z_1^*(s), \quad t \in (a,\tau_2]; \\ z_2^*(s), \quad t \in [\tau_2,\tau_3]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_N^*(s), \quad t \in [\tau_N, b), \end{cases} \tag{81}$$

де $s \in (0,T), \tau_i = a+(i-1)\Delta, i = \overline{1,N}$, та $z_i(T) = z_{i+1}(0), i = \overline{1,N-1}$, є розв'язком задачі (1) – (3), тобто задача сумісна. Для цього використаємо формули (18), (75), (80), (51), (52), (77) та (79), на підставі яких маємо

$$\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right)z^*(s) - g(s) = \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)z^*(s) - F(s)z^*(s) - g(s) =$$

$$= \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)h(s) + \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)\int_0^T G(s,\xi)y^*(\xi)d\xi -$$

$$- \ F(s)h(s) - F(s)\int_0^T G(s,\xi)y^*(\xi)d\xi - g(s) =$$

$$= r(s) + \int_0^T R(s,\xi)y^*(\xi)d\xi + y^*(s) - \int_0^T K(s,\xi)y^*(\xi)d\xi - p(s) = 0.$$

Отже, вектор-функція $z^*(s)$ — розв'язок системи рівнянь (18). Вона ж, як це безпосередньо випливає із формул (80), (51), (53), задовольняє крайові умови (19). Використавши тепер лему 1, зокрема зображення (22), приходимо до висновку, що вектор-функція $x^*(t)$, що визначається формулою (81), задовольняє рівняння (1) за умови (2).

Залишилось встановити рівність (3). Для цього використаємо формули (80), (51), (53), із яких безпосередньо випливає

$$\int_0^T U(s)z^*(s)ds = \alpha. \tag{82}$$

Оскільки обмеження (3) можна зобразити у вигляді (30), то, враховуючи позначення (20), (38) та рівність (82), маємо

$$\int_a^b S(t)x^*(t)dt = \sum_{i=1}^N \int_0^T S_i(s)z_i(s)ds = \int_0^T U(s)z^*(s)ds = \alpha.$$

Таким чином, вектор-функція $x^*(t)$, яка визначається формулою (81), є розв'язком задачі (1) – (3), тобто задача сумісна.

Нехай тепер $x^* \in W_2^1[0,T]$ — розв'язок задачі (1) – (3), тоді вектор-функція

$$z^*(s) = \begin{pmatrix} z_1^*(s) \\ z_2^*(s) \\ \ldots \\ z_N^*(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^*(cs+\tau_1) \\ x^*(cs+\tau_2) \\ \ldots\ldots\ldots \\ x^*(cs+\tau_N) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0,T],$$

по-перше, згідно з лемою 1, є розв'язком крайової задачі (18), (19), тобто

$$\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) z^*(s) = g(s), \tag{83}$$

а по-друге, з урахуванням співвідношень (30), (35), (36) та (83) справджуються рівності

$$\int_0^T U(s)z^*(s)ds = \alpha, \qquad \int_0^T V(s)\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) z^*(s)ds = \beta.$$

Оскільки, як ми бачимо, виконуються всі умови леми 3, то справедливі співвідношення

$$z^*(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right) z^*(\xi)d\xi, \tag{84}$$

$$r(s) + \int_0^T R(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right) z^*(\xi)d\xi = 0. \tag{85}$$

Встановимо, що розв'язком системи інтегральних рівнянь (76) є вектор-функція

$$y^*(s) = \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right) z^*(s). \tag{86}$$

Справді, згідно з формулами (77), (86), (84), (75) та (83) маємо

$$p(s) - y^*(s) \ + \int\limits_0^T K(s,\xi)y^*(\xi)d\xi =$$

$$= g(s) + F(s)h(s) - \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right) z^*(s) + \int\limits_0^T F(s)G(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right) z^*(\xi)d\xi =$$

$$= g(s) + F(s)\left(h(s) + \int\limits_0^T G(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right) z^*(\xi)d\xi\right) - \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right) z^*(s) =$$

$$= g(s) + F(s)z^*(s) - H(s)z^*(s) - \frac{d}{ds}z^*(s) = g(s) - P(s)z^*(s) - \frac{d}{ds}z^*(s) = 0.$$

Зазначимо, що умова (78) виконується, оскільки із співвідношень (85), (86) випливає рівність

$$r(s) + \int\limits_0^T R(s,\xi)y^*(\xi)d\xi = 0. \tag{87}$$

Таким чином, вектор-функція $y^* \in L_2[0,T]$, яка визначається формулою (86), є розв'язком системи інтегральних рівнянь і задовольняє умову (87), що й потрібно було встановити.

**Теорема 2.** *Якщо виконується умова теореми 1, то однорідна задача*

$$\frac{d}{dt}x(t) + L(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta) = 0, \tag{88}$$

$$x(t-\Delta) = 0, \qquad t \in [a, a+\Delta), \qquad \int\limits_0^T S(t)x(t)dt = 0 \tag{89}$$

*має нетривіальний розв'язок тільки тоді, коли існує нетривіальний розв'язок задачі*

$$y(s) = \int\limits_0^T K(s,\xi)y(\xi)d\xi, \qquad \int\limits_0^T R(t,s)y(s)ds = 0. \tag{90}$$

***Доведення.*** Оскільки згідно з лемою 1 задача (88), (89) рівносильна задачі

$$\left(\frac{d}{ds} + P(s)\right) z(s) = 0, \qquad Jx(T) = Ex(0), \qquad \int\limits_0^T U(s)z(s)ds = 0, \tag{91}$$

то твердження теореми буде випливати із рівносильності задач (90) та (91). Встановимо цей факт.

Нехай $y^*(s)$ — нетривіальний розв'язок задачі (90), тобто з урахуванням позначення (77) справджується рівність

$$y^*(s) = F(s)\int\limits_0^T G(s,\xi)y^*(\xi)d\xi. \tag{92}$$

Тоді, як це встановлено при доведенні теореми 1, вектор-функція

$$z^*(s) = \int\limits_0^T G(s,\xi)y^*(\xi)d\xi \tag{93}$$

є нетривіальним розв'язком задачі (91), оскільки коли б було $z^*(s) = 0$, то із рівностей (92) та (93) випливало б $y^*(s) = 0$.

Навпаки, нехай $z^*(s)$ — нетривіальний розв'язок задачі (91), тоді, очевидно, виконуються всі умови леми 3, згідно з якою справедлива рівність

$$z^*(s) = \int\limits_0^T G(s,\xi)\left(\frac{d}{d\xi} + H(\xi)\right)z^*(\xi)d\xi. \tag{94}$$

Повторивши доведення теореми 1, легко встановити, що вектор-функція

$$y^*(s) = \left(\frac{d}{ds} + H(s)\right)z^*(s) \tag{95}$$

є розв'язком задачі (90). Цей розв'язок — нетривіальний, оскільки якщо б було $y^*(s) = 0$, то із співвідношень (94) і (95) випливало б $z^*(s) = 0$, що суперечить припущенню.

**Висновок 1.** *За умови теореми 1 задача (1)–(3) має єдиний розв'язок тільки тоді, коли існує єдиний розв'язок системи інтегральних рівнянь (76), який задовольняє умову (78).*

Справді, припустимо, що система інтегральних рівнянь (76) має єдиний розв'язок, який задовольняє умову (78), отже, однорідна задача (90) має тільки тривіальний розв'язок. Тоді задача (1)–(3) також має лише єдиний розв'язок, оскільки якби існували два розв'язки $x^*(t)$ та $\overline{x}(t)$, причому $x^*(t) \neq \overline{x}(t)$, то неважко помітити, що однорідна задача (88), (89) мала б нетривіальний розв'язок $x(t) = x^*(t) - \overline{x}(t)$, а отже, за теоремою 2 однорідна задача (90) також мала б нетривіальний розв'язок, що суперечить припущенню.

Навпаки, нехай існує єдиний розв'язок задачі (1)–(3), тобто однорідна задача (88), (89) має лише тривіальний розв'язок. Якщо припустити, що неоднорідна задача (76), (78) має два розв'язки $y^*(s)$ та $\overline{y}(s)$, причому $y^*(s) \neq \overline{y}(s)$, то однорідна задача (90) мала б нетривіальний розв'язок $y(s) = y^*(s) - \overline{y}(s)$, а тоді за теоремою 2 існував би нетривіальний розв'язок задачі (88), (89), що суперечить припущенню.

***Зауваження 2.*** У випадку, коли $\tau_N < b < \widehat{b} = a + N\Delta$, вважаємо, що в допоміжній задачі (23) – (26) матриці $A(t), B(t), \Phi(t)$ та вектор-функція $v(t)$ визначені при $t \in [a, \widehat{b}]$, а $S(t) = 0$, $\Psi(t) = 0$ при $t \in (b, \widehat{b}]$ і $x(\widehat{b}) = x(b)$. Тоді допоміжна задача (23) – (26) зводиться до системи диференціальних рівнянь з керуванням (29) та обмеженнями (30), (32) і крайовими умовами (17), до яких ще треба приєднати умову $z_N(T) = z_N(d)$, де $cd = b - \tau_N$ і

$$S_N(s) = \begin{cases} cS(cs + \tau_N), & s \in [0, d]; \\ 0, & s \in (d, T], \end{cases} \qquad \Psi_N(s) = \begin{cases} c\Psi(cs + \tau_N), & s \in [0, d]; \\ 0, & s \in (d, T]. \end{cases}$$

Якщо врахувати зауваження 1 та 2, приходимо до висновку, що теореми 1 та 2 справедливі і для випадку, коли в задачі (1) – (3) $b < a + N\Delta$.

**6. Умови збіжності методу та оцінки похибки.** Наведемо умови збіжності проекційно-ітеративного методу щодо задачі (1) – (3). Для цього відмітимо, що вказаний метод зводиться до методу послідовних наближень

$$y_k(s) = p(s) + \int\limits_0^T K(s, \xi) y_{k-1}(\xi) d\xi \tag{96}$$

для системи інтегральних рівнянь (76).

Справді, таким самим способом, як при зведенні допоміжної задачі (23) – (26) до задачі (34) – (36), а виразу (4) — до вигляду (75), задачу (7) – (10) можна звести до рівносильної задачі

$$\frac{dz_k}{ds} + H(s) z_k(s) = w_k(s) + y_k(s), \qquad J z_k(T) = E z_k(0), \tag{97}$$

$$\int\limits_0^T U(s) z_k(s) ds = \alpha, \qquad \int\limits_0^T V(s) \left( \frac{d}{ds} + P(s) \right) z_k(s) ds = \beta, \tag{98}$$

$$w_k(s) = W(s) \lambda_k, \qquad \beta = \int\limits_0^T V(s) g(s) ds, \tag{99}$$

а співвідношення (6) — до вигляду

$$y_k(s) = g(s) + F(s) z_{k-1}(s), \qquad F(s) = H(s) - P(s), \tag{100}$$

де

$$z_k(s) = \begin{pmatrix} z_1^k(s) \\ z_2^k(s) \\ \dots \\ z_N^k(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k(cs + \tau_1) \\ x_k(cs + \tau_2) \\ \dots\dots\dots \\ x_k(cs + \tau_N) \end{pmatrix}, \tag{101}$$

$$y_k(s) = \begin{pmatrix} y_1^k(s) \\ y_2^k(s) \\ \dots \\ y_N^k(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_k(cs+\tau_1) - B_1(s)\varphi(cs+\tau_1) \\ cv_k(cs+\tau_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ cv_k(cs+\tau_N) \end{pmatrix},$$

$$w_k(s) = \begin{pmatrix} w_1^k(s) \\ w_2^k(s) \\ \dots \\ w_N^k(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cu_k(cs+\tau_1) \\ cu_k(cs+\tau_2) \\ \dots\dots\dots \\ cu_k(cs+\tau_N) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0,T], \tag{102}$$

при цьому справедливі співвідношення

$$x_k(t) = \begin{cases} z_1^k(s), & t \in (a,\tau_2]; \\ z_2^k(s), & t \in [\tau_2,\tau_3]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_N^k(s), & t \in [\tau_N, b), \end{cases} \qquad u_k(t) = \begin{cases} w_1^k(s), & t \in [a,\tau_2]; \\ w_2^k(s), & t \in [\tau_2,\tau_3]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_N^k(s), & t \in [\tau_N, b]. \end{cases} \tag{103}$$

За умови леми 2 задача (97) – (99) має єдиний розв'язок, який зображається формулами

$$z_k(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi) y_k(\xi) d\xi, \tag{104}$$

$$w_k(s) = r(s) + \int_0^T R(s,\xi) y_k(\xi) d\xi. \tag{105}$$

Якщо тепер підставити зображення (104), замінивши в ньому індекс $k$ на $k-1$, у співвідношення (100) і врахувати позначення (77), то отримаємо формулу (96).

Таким чином, питання про збіжність методу (6) – (10) звелось до питання про збіжність методу послідовних наближень для системи інтегральних рівнянь (76), збіжність якого, як відомо [12], залежить від величини спектрального радіуса оператора

$$(Ky)(s) := \int_0^T K(s,\xi) y(\xi) d\xi. \tag{106}$$

**Теорема 3.** *Якщо спектральний радіус оператора (106)*

$$\rho(K) < 1 \tag{107}$$

*і виконується співвідношення*

$$\lim_{k\to\infty} u_k(t) = 0, \tag{108}$$

*то існує єдиний розв'язок* $x^* \in W_2^1[a,b]$ *задачі (1) – (3) і послідовність* $\{x_k(t), \quad k \geq 0\} \subset \subset W_2^1[a,b]$*, побудована за методом (6) – (10), збігається до цього розв'язку.*

***Доведення.*** За умови (107), як відомо, існує єдиний розв'язок $y^* \in L_2[0,T]$ системи інтегральних рівнянь (76) і послідовність $\{y_k(s), \quad k \geq 0\}$ збігається за нормою в $L_2[0,T]$ до цього розв'язку, тобто

$$\lim_{k\to\infty} y_k(s) = y^*(s), \tag{109}$$

$$y^*(s) = p(s) + \int_0^T K(s,\xi)y^*(\xi)d\xi. \tag{110}$$

Виконавши граничний перехід при $k \to \infty$ у рівностях (104) та (105) із урахуванням виразу (109), отримаємо

$$\lim_{k\to\infty} z_k(s) = z^*(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)y^*(\xi)d\xi, \tag{111}$$

$$\lim_{k\to\infty} w_k(s) = w^*(s) = r(s) + \int_0^T R(s,\xi)y^*(\xi)d\xi. \tag{112}$$

Оскільки за умови (108), виконавши граничний перехід при $k \to \infty$ у співвідношенні (102), будемо мати $w^*(s) = 0$, то, очевидно, з урахуванням виразу (112) справджується рівність

$$r(s) + \int_0^T R(s,\xi)y^*(\xi)d\xi = 0. \tag{113}$$

Із співвідношень (110) та (113) випливає, що розв'язок системи (76) задовольняє умову (78). Отже, згідно з теоремою 1 задача (1) – (3) сумісна і її розв'язком є вектор-функція $x^*(t)$, яка визначається формулами (81) та (111). Цей розв'язок єдиний, оскільки за умов (107) та (108), як встановлено вище, система рівнянь (76) має тільки один розв'язок, який задовольняє умову (78). Отже, згідно з висновком 1 задача (1) – (3) не може мати більше одного розв'язку.

На підставі формул (81) та (103) маємо

$$x^*(t) - x_k(t) = \begin{cases} z_1^*(s) - z_1^k(s), & t \in (a, \tau_2]; \\ z_2^*(s) - z_2^k(s), & t \in [\tau_2, \tau_3]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_N^*(s) - z_N^k(s), & t \in [\tau_N, b). \end{cases} \tag{114}$$

Враховуючи тепер позначення (20) і співвідношення (111), приходимо до висновку, що

$$\lim_{k\to\infty} z_i^k(s) = z_i^*(s), \qquad i = \overline{1, N},$$

а тому, виконуючи граничний перехід при $k \to \infty$ в рівності (114), остаточно маємо

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x^*(t),$$

що й потрібно було встановити.

**Висновок 2.** *Якщо $\rho(K) < 1$ і задача (1) – (3) сумісна, то умова (108) виконується.*

Справді, якщо вихідна задача сумісна, то за теоремою 1 існує розв'язок $y^*(s)$ системи інтегральних рівнянь (76), причому за умови $\rho(K) < 1$ він єдиний, і справджується рівність (113), із якої та з формули (112) випливає, що $w_k(s) \to 0$ при $k \to \infty$, тобто з урахуванням позначення (102) $w_i^k(s) \to 0$ при $k \to \infty$. Отже, на підставі виразу (103) $u_k(t) \to 0$ при $k \to \infty$, тобто умова (108) виконується.

Наведемо простішу достатню умову збіжності методу (6) – (10), але грубішу, ніж умова $\rho(K) < 1$. Для цього введемо проекційний оператор

$$(\Pi y)(s) := \int_0^T \Pi(s, \xi) y(\xi) d\xi, \tag{115}$$

ядро якого визначається формулами

$$\Pi(s, \xi) = W(s)\Delta^{-1}W^*(\xi), \qquad \Delta = \int_0^T W^*(s)W(s)ds. \tag{116}$$

Неважко помітити, що оператор (115) ортогонально проектує простір $L_2[0, T]$ на його підпростір, породжений лінійно незалежними стовпцями матриці $W(s)$, оскільки за припущенням стовпці матриці $\Phi(t)$ лінійно незалежні, а матриця $\Delta$ симетрична та невироджена.

Нехай

$$\widehat{v}(s) = y(s) - \int_0^T \Pi(s, \xi) y(\xi) d\xi, \tag{117}$$

тоді на підставі першої властивості (54) та формул (116), (117) легко встановити рівність

$$\int_0^T G(s,\xi)y(\xi)d\xi = \int_0^T G(s,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi \qquad \forall y \in L_2[0,T], \tag{118}$$

за допомогою якої та виразу (77) рівність (76) можна записати у вигляді

$$y(s) = p(s) + \int_0^T K(s,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi. \tag{119}$$

Якщо у формулу (117) підставити вираз (119), то дістанемо

$$\widehat{v}(s) = q(s) + \int_0^T L(s,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi, \tag{120}$$

де

$$q(s) = p(s) - \int_0^T \Pi(s,\xi)p(\xi)d\xi, \tag{121}$$

$$L(s,\xi) = K(s,\xi) - \int_0^T \Pi(s,\tau)K(\tau,\xi)d\tau. \tag{122}$$

Тепер відмітимо, що метод послідовних наближень (96) стосовно системи рівнянь (76) можна звести до методу послідовних наближень

$$\widehat{v}_k(s) = q(s) + \int_0^T L(s,\xi)\widehat{v}_{k-1}(\xi)d\xi \tag{123}$$

для системи рівнянь (120). Для цього досить ввести вектор-функцію

$$\widehat{v}_k(s) = y_k(s) - \int_0^T \Pi(s,\xi)y_k(\xi)d\xi, \tag{124}$$

використати властивість (118) та позначення (77), за допомогою яких формула (96) набере вигляду

$$y_k(s) = p(s) + \int_0^T K(s,\xi)\widehat{v}_{k-1}(\xi)d\xi, \tag{125}$$

підставити вираз (125) у формулу (124) та взяти до уваги позначення (121), (122).

Припустимо, що для довільної вектор-функції $y \in L_2[0,T]$ виконуються нерівності

$$\int_0^T \left| \int_0^T G(s,\xi) y(\xi) d\xi \right|^2 ds \le \frac{p^2}{c} \int_0^T |\widehat{v}(\xi)|^2 d\xi, \tag{126}$$

$$\int_0^T \left| \int_0^T L(s,\xi) \widehat{v}(\xi) d\xi \right|^2 ds \le q^2 \int_0^T |\widehat{v}(\xi)|^2 \, d\xi, \tag{127}$$

де вектор-функція $\widehat{v}(s)$ має вигляд (117) та $c = \Delta/T$, і нагадаємо, що норми вектор-функцій $x \in L_2[a,b]$ та $y \in L_2[0,T]$ визначаються формулами

$$\|x\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2 dt, \qquad \|y\|^2 = \int_0^T |y(s)|^2 ds = \sum_{i=1}^N \int_0^T |y_i(s)|^2 ds.$$

**Теорема 4.** *Якщо в нерівності (127) $q < 1$ і задача (1),(2) сумісна, то вона має єдиний розв'язок $x^* \in W_2^1[a,b]$ і справедливі оцінки похибки*

$$\|x^* - x_k\| \le pq^k \|\widehat{v}^* - \widehat{v}_0\|, \tag{128}$$

$$\|x^* - x_k\| \le \frac{pq^{k-\nu}}{1-q} \|\widehat{v}_{\nu+1} - \widehat{v}_\nu\|, \qquad 0 \le \nu \le k-1, \tag{129}$$

*де $\widehat{v}^*(s)$ та $\widehat{v}_k(s)$ — точний та наближений, отриманий за методом (123), розв'язки системи рівнянь (120), а $x_k(t)$ — наближений розв'язок задачі (1) – (3), знайдений за методом (6) – (10).*

***Доведення.*** За умови $q < 1$, як відомо, послідовність $\{\widehat{v}_k(t), \quad k \ge 0\}$, побудована за методом (123), збіжна до єдиного розв'язку $v^*(s)$ рівняння (120), тобто

$$\lim_{k\to\infty} \widehat{v}_k(s) = \widehat{v}^*(s), \tag{130}$$

і справедливі оцінка

$$\|v^* - v_k\| \le q^k \|v^* - v_0\|, \tag{131}$$

що характеризує швидкість збіжності методу, та конструктивна оцінка

$$\|v^* - v_k\| \le \frac{q^{k-\nu}}{1-q} \|v_{\nu+1} - v_\nu\|, \qquad 0 \le \nu \le k-1. \tag{132}$$

Зауважимо, що спектральні радіуси оператора (106) та оператора

$$(L\widehat{v})(s) := \int_0^T L(s,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi \tag{133}$$

рівні, тобто

$$\rho(K) = \rho(L). \tag{134}$$

Справді, на підставі формул (54), (77), (116), (122) та (133) неважко встановити, що

$$(K^{n+1}y)(s) = (KL^n\widehat{v})(s) \qquad \forall y \in L_2[0,T]. \tag{135}$$

Так, для $n = 1$ маємо

$$(K^2y)(s) = \int_0^T K(s,\tau)\int_0^T K(\tau,\xi)y(\xi)d\xi d\tau =$$

$$= \int_0^T K(s,\tau)\left\{\int_0^T K(\tau,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi - \int_0^T \Pi(\tau,\eta)\int_0^T K(\eta,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi d\eta\right\}d\tau =$$

$$= \int_0^T K(s,\tau)\int_0^T L(\tau,\xi)\widehat{v}(\xi)d\xi d\tau = (KL\widehat{v})(s).$$

Продовжуючи цей процес, отримаємо формулу (135), за допомогою якої легко встановити рівність (134). Отже, за умови теореми, очевидно, $\rho(K) \le q < 1$, а тому, враховуючи висновок 2, бачимо, що виконуються всі умови теореми 3, згідно з якою існує єдиний розв'язок $x^*(t)$ задачі (1) – (3).

Використавши формули (118), (124), співвідношення (104) можна записати у вигляді

$$z_k(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)\widehat{v}_k(\xi)d\xi,$$

а перейшовши в ньому до границі при $k \to \infty$ із врахуванням рівностей (111), (130), отримаємо

$$z^*(s) = h(s) + \int_0^T G(s,\xi)\widehat{v}^*(\xi)d\xi.$$

Звідси випливає співвідношення

$$z^*(s) - z_k(s) = \int_0^T G(s,\xi)\left(\widehat{v}^*(\xi) - \widehat{v}_k(\xi)\right) d\xi,$$

використавши яке та умову (126), легко встановити нерівність

$$c\|z^* - z_k\|^2 \leq p^2\|\widehat{v}^* - \widehat{v}_k\|^2. \tag{136}$$

Оскільки, беручи до уваги співвідношення (114) та заміну $t = cs + \tau_i$, маємо

$$\|x^* - x_k\|^2 = \int_a^b |x^*(t) - x_k(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^{N} \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} |x^*(t) - x_k(t)|^2 dt =$$

$$= c\sum_{i=1}^{N} \int_0^T \left|z_i^*(s) - z_i^k(s)\right|^2 ds = c\|z^* - z_k\|^2, \tag{137}$$

то із формул (136), (137) випливає оцінка

$$\|x^* - x_k\| \leq p\|\widehat{v}^* - \widehat{v}_k\|. \tag{138}$$

Нарешті, за допомогою нерівностей (131), (132) та (138) легко встановити оцінки (128) та (129).

***Зауваження 3.*** Збільшення числа лінійно незалежних рядків матриці $\Psi(t)$, тобто числа $\nu$, істотно впливає на зменшення спектрального радіуса $\rho(L)$ оператора (133).

***Зауваження 4.*** Отримані результати справедливі і для більш широкого класу обмежень

$$\int_a^b S(t)x(t)d\mu(t) = \alpha,$$

ніж обмеження (3), де інтеграл розуміється в сенсі Стільтьєса.


1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991. — 280 с.
2. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.: Наука, 1972. — 352 с.
3. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1974. — 120 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Выща шк., 1987. — 288 с.

5. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 319 с.
6. *Лучка А. Ю.* Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом // Укр. мат. журн. — 1998. — **50**, № 2. — С. 189–194.
7. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова // Там же. — 1996. — **48**, № 11. — С. 1501–1509.
8. *Лучка А. Ю.* Проекційно-ітеративний метод для диференціальних рівнянь з обмеженнями // Нелінійні коливання. — 2002. — **5**, № 4. — С. 465–488.
9. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и системный анализ. — 1996. — № 3. — С. 82–96.
10. *Лучка А. Ю., Кучерук Т. А.* Ітеративний метод побудови розв'язків лінійних рівнянь з обмеженнями // Укр. мат. журн. — 2002. — **54**, № 4. — С. 472–482.
11. *Лучка А. Ю.* Крайова задача для диференціальних рівнянь з імпульсною дією і побудова її розв'язку проекційним методом // Допов. НАН України. — 1993. — № 8. — С. 11–16.
12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984. — 752 с.


*Одержано 04.02.2003*