

Кинетика диффузионной моды в фонон-примесонной системе растворов квантовых жидкостей ^3He – ^4He

К. Э. Немченко

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4
E-mail: nemchenko@rocketmail.com

Статья поступила в редакцию 29 мая 1998 г.

Исходя из системы кинетических уравнений исследованы релаксационные процессы в фонон-примесонной системе сверхтекучих растворов ^3He – ^4He . Полученные общие дисперсионные соотношения справедливы при произвольных отношениях времен фонон-примесонного взаимодействия к временам установления равновесия в фононной и примесонной подсистемах. В гидродинамическом и кинетическом по фононным временам режимах вычисляются эффективный коэффициент диффузии диссипативной моды, а также скорость и поглощение звука в акустической моде.

Виходячи з системи кінетичних рівнянь досліджено релаксаційні процеси в фонон-примесонній системі надплинних розчинів ^3He – ^4He . Знайдені загальні дисперсійні співвідношення справедливі при довільних відношеннях часів фонон-примесонної взаємодії до часів встановлення рівноваги в фононній і примесонній підсистемах. У гідродинамічному і кінетичному щодо фононних часів режимах обчислено ефективний коефіцієнт дифузії дисипативної моди, а також швидкість і поглинання звука в акустичній моді.

PACS: 51.20.+d

Основы кинетической теории сверхтекучих растворов ^3He – ^4He были заложены в [1]. Дальнейшие исследования [2-7] привели к созданию достаточно полной теории распространения первого и второго звуков и диссипативных процессов во всей области температур, в которой справедливо квазичастичное описание этих квантовых растворов. Однако в сверхтекучих растворах ^3He – ^4He наряду с акустическими механизмами релаксации гидродинамических параметров существует и диссипативная, диффузионная мода [8,9]. Эта мода в основном описывает релаксацию температуры и концентрации ^3He и уникальна для квантовых растворов изотопов гелия. В гидродинамическом режиме, при относительно высоких температурах, эта мода исследовалась в [8,9] с использованием уравнений гидродинамики сверхтекучих растворов [10]. При сверхнизких температурах, когда вкладом тепловых возбуждений можно

пренебречь, рассмотрение диссипативной моды проводилось на основе кинетического уравнения для газа примесоннов в гидродинамическом приближении [11].

Целью настоящей работы является изучение диффузионной моды в сверхтекучих растворах ^3He – ^4He с учетом примесных квазичастиц и тепловых возбуждений HeII в широкой области температур, в которой наряду с гидродинамическим режимом возможен и кинетический режим в системе тепловых возбуждений.

При исследовании диссипативных процессов в системе квазичастиц сверхтекучих растворов ^3He – ^4He будем исходить из системы кинетических уравнений для функций распределения квазичастиц f_α ($\alpha = 3, 4$):

$$\frac{\partial f_3}{\partial t} + (\mathbf{v}_3 \nabla) f_3 = J_{33}(f_3) + J_{34}(f_3, f_4),$$

(1)

$$\frac{\partial f_4}{\partial t} + (\mathbf{v}_4 \nabla) f_4 = J_{44}(f_4) + J_{43}(f_4, f_3).$$

Здесь f_3 , f_4 — функции распределения соответственно квазичастиц ${}^3\text{He}$ и тепловых возбуждений He II ; $\mathbf{v}_3 = \partial \epsilon_3 / \partial \mathbf{p}_3$, $\mathbf{v}_4 = \partial \epsilon_4 / \partial \mathbf{p}_4$ — соответствующие скорости; $J_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 3, 4$) — интегралы столкновений. Отношение полной плотности нормальной компоненты $\rho_n = \rho_{3n} + \rho_{4n}$ к плотности ${}^4\text{He}$ в растворе ρ_4 , в (1) предполагается малым и можно считать, что сверхтекучий фон остается равновесным. Линеаризуем уравнения (1) по малому отклонению δf_α функций распределения от равновесного состояния:

$$f_\alpha = f_{0\alpha} + \delta f_\alpha, \quad \alpha = 3, 4 \quad (2)$$

и будем искать решение для δf_α в виде

$$\delta f_\alpha = -f'_{0\alpha} g_\alpha, \quad (3)$$

где $f'_{0\alpha}$ — производная от функции $f_{0\alpha}$ по энергии. В результате из (1) для фурье-компонент функций g_α получаем систему уравнений

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_3 - iI_{33} - iI_{34})g_3 - iI_{34}g_4 = 0, \quad (4)$$

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_4 - iI_{44} - iI_{43})g_4 - iI_{43}g_3 = 0,$$

где $I_{\alpha\beta}$ — интегральные операторы столкновений. Исходя из этой системы вычисляются параметры диффузионной моды, а также скорость и поглощение второго звука в сверхтекучих растворах в гидродинамическом приближении по временам примесонных взаимодействий $\omega\tau_{33} \ll 1$ и быстрой продольной релаксации в фононной подсистеме $\omega\tau_{44} \ll 1$. При этом времена фонон-примесонного взаимодействия τ и τ_c , описывающие соответственно релаксацию импульса и энергии, предполагаются произвольными. Из системы (4) получаем

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_3 - iI_{33} - iI_{34} + I_{34}R_4I_{43})g_3 = 0, \quad (5)$$

$$R_4 = (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_4 - iI_{44} - iI_{43})^{-1}. \quad (6)$$

Задача нахождения дисперсионных соотношений $\omega = \omega(k)$, удовлетворяющих уравнению (5), эквивалентна нахождению полюсов его резольвенты

$$R_3 = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_3 - iI_{33} - iI_{34} + I_{34}R_4I_{43}. \quad (7)$$

В гидродинамическом приближении для примесонной системы следует спроектировать (7)

на подпространство инвариантов столкновений оператора I_{33} и найти полюсы выражения

$$P_c R_3 P_c = P_c (\omega - P_c \Omega P_c)^{-1} P_c, \quad (8)$$

$$\Omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_3 + iI_{34} + I_{34}R_4I_{43} - i\mathbf{k}\mathbf{v}_3 P_n \mathbf{k}\mathbf{v}_3 \tau_{33}. \quad (9)$$

Здесь введены операторы — проекторы на подпространство инвариантов примесонных столкновений

$$P_c = |J_N\rangle \langle J_N| + |J_{pz}\rangle \langle J_{pz}| + |J_E\rangle \langle J_E| \quad (10)$$

и ортогональное ему подпространство

$$P_n = 1 - P_c. \quad (11)$$

Базисные векторы $|J\rangle$ определены как

$$|J_N\rangle = \frac{|1\rangle}{\langle 1|1\rangle^{1/2}}, \quad |J_{pz}\rangle = \frac{|p_{3z}\rangle}{\langle p_{3z}|p_{3z}\rangle^{1/2}}, \quad (12)$$

$$|J_E\rangle = \frac{|\bar{e}_3\rangle}{\langle \bar{e}_3|\bar{e}_3\rangle^{1/2}},$$

где $\bar{e}_3 = e_3 - \langle e_3|1\rangle / \langle 1|1\rangle$. Векторы $|J_{px}\rangle$, $|J_{py}\rangle$ не учитываются, так как ось z выбирается вдоль вектора \mathbf{k} . Скалярное произведение вводится следующим образом:

$$\langle \Phi_3 | \Psi_3 \rangle = -\int \Phi_3^*(\mathbf{p}_3) \Psi_3(\mathbf{p}_3) f'_{03} d\Gamma_3. \quad (13)$$

При получении (9) использовалось корректное τ -приближение [6]

$$I_{33} = -\frac{P_n}{\tau_{33}} \quad (14)$$

и предполагалась малость параметров $\beta = v_3^2/v_4^2$, $\omega\tau_{33}$, ρ_{4n}/ρ_{3n} . Далее находим матрицу оператора R_3 в базисе $|J\rangle$. Равенство детерминанта указанной матрицы нулю дает дисперсионное уравнение, определяющее $\omega(k)$ в виде

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{u_{2N}^2}{1 + b_{11}} + \frac{u_{2E}^2 (1 + b_{01})^2}{(1 + b_{11})(1 + b_{00})}, \quad (15)$$

где

$$u_{2N}^2 = \frac{n_3}{\rho_n} \left(\frac{\partial P_f}{\partial n_3} \right)_{T, n_4}, \quad u_{2E}^2 = \frac{\bar{S}^2 T}{C_V \rho_n}, \quad (16)$$

$$b_{00} = i \frac{k^2 \kappa_3}{\omega C_V} - \frac{1}{\omega C_V T} R_{11}, \quad (17)$$

$$b_{11} = i \frac{k^2 \eta_3}{\omega \rho_n} \frac{4}{3} - \frac{1}{\omega \rho_n} R_{22}, \quad (18)$$

$$b_{01} = \frac{1}{k \bar{S} T} R_{12}. \quad (19)$$

Здесь $C_V = C_3 + C_4$, $\bar{S} = S_4 + \bar{S}_3 = S_4 + \frac{2}{3} C_3$, n_α и C_α — количество атомов типа α в единице объема и теплоемкость α -компонента раствора соответственно; S_4 — энтропия тепловых возбуждений; P_f — давление газа примесонев; κ_3 и η_3 — теплопроводность и первая вязкость газа примесонев [11]; матричные элементы R являются сложными функциями термодинамических параметров и времен взаимодействия.

Вычисление матричных элементов R , входящих в (17), выполняется по схеме, разработанной в [6]. В результате относительно несложных, но довольно громоздких расчетов получаем

$$R_{11} = \omega^2 C_4 T [A_{00} - 2\xi A_{01} + \xi^2 A_{11}],$$

$$R_{12} = \omega^2 \sqrt{3} \rho_{4n} C_4 T [A_{01} - \xi(A_{02} + A_{11}) + \xi^2 A_{12}],$$

$$R_{22} = \omega^2 3 \rho_{4n} [A_{11} - 2\xi A_{12} + \xi^2 A_{22}], \quad (20)$$

где

$$A_{0k} = Q_k \frac{i\tau}{ikv_4\tau + (1-\beta)Q_0}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$A_{11} = Q_1 X, \quad A_{12} = Q_2 X - \frac{1}{3v_4 k}, \quad A_{22} = q_0 A_{12},$$

$$A_{13} = Q_3 X,$$

$$X = \frac{i\tau q_0 + (1-\beta)/kv_4}{i\tau kv_4 + (1-\beta)Q_0},$$

переменные $\xi = kv_4/\omega$ и $q_0 = (\omega + i/\tau)/kv_4$, а функции угловых переменных

$$Q_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{q_0 + 1}{q_0 - 1}, \quad Q_1 = q_0 Q_0, \quad Q_2 = q_0 Q_1,$$

$$Q_3 = q_0^2 Q_2 - 1/3, \quad Q_4 = q_0 Q_3.$$

С помощью соотношений (15)–(20) решается поставленная задача о нахождении законов дисперсии как диффузионной моды, так и второго звука. При изучении акустической моды достаточно в общих соотношениях (15)–(20)

положить $\omega \propto k$. При этом полученные выражения полностью совпадают с результатами работы [6], относящимся к распространению второго звука в гидродинамическом, переходном и кинетическом режимах в фонон-примесонной системе.

Для исследования диффузионной моды необходимо в общие выражения (15)–(20) ввести соотношения между ω и k , характерные для диссипативных мод [12]:

$$\omega \propto -ik^2. \quad (21)$$

В случае чисто примесонной системы ($\rho_{4n} = 0$, $C_4 = 0$) соотношения (15)–(20) согласуются с результатами работы [11]:

$$\omega = -ik^2 D_3, \quad (22)$$

где

$$D_3 = \frac{\kappa_3}{C_3} \frac{u_{3N}^2}{u_3^2}, \quad (23)$$

$$u_3^2 = u_{3N}^2 + u_{3E}^2, \quad u_{3N}^2 = \frac{n_3}{\rho_{3n}} \left(\frac{\partial P_f}{\partial n_3} \right)_{T, n_4},$$

$$u_{3E}^2 = \frac{\bar{S}_3^2 T}{C_3 \rho_{3n}}. \quad (24)$$

В этом пределе полученная мода соответствует тепловой волне в обычных жидкостях, которая описывает диссипативную релаксацию температуры и плотности частиц к состоянию равновесия.

В обратном предельном случае полного равновесия в фонон-примесонной системе общие соотношения (15)–(20) дают

$$\omega = -ik^2 D_{eff}. \quad (25)$$

Здесь

$$D_{eff} = \frac{\kappa}{C_V} \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} + D \frac{u_{2E}^2}{u_2^2} \left(1 - \frac{k_T}{k_T^*} \right)^2, \quad (26)$$

где $\kappa = \kappa_3 + \kappa_4$ — полная теплопроводность газа квазичастиц; D — коэффициент диффузии раствора; $k_T^* = n_3/c\bar{S}$, а k_T — термодиффузионное отношение раствора. Соотношения (25), (26) справедливы во всей области температур, где применимо квазичастичное описание, и соответствуют результатам в [8,9], которые получены из рассмотрения полной феноменоло-

гической системы гидродинамических уравнений. Отметим, что D_{eff} определяет также и эффективный коэффициент теплопроводности растворов в стационарных неравновесных состояниях

$$\kappa_{\text{eff}} = \kappa + D \frac{u_{2E}^2}{u_{2N}^2} C_V \left(1 - \frac{k_T}{k_T^*} \right)^2 \quad (27)$$

и совпадает с выражением, приведенным в [10].

Полученные общие результаты (15)–(20) позволяют исследовать и промежуточный между пределами (22) и (25) кинетический режим в системе квазичастиц. В этом случае предполагается, что для фоновых времен выполняются соотношения $\omega\tau \gg 1$, $\omega\tau_\zeta \gg 1$, $\rho_{3n} \gg \rho_{4n}$. Тогда из выражений (15)–(20) имеем

$$\omega = -ik^2 D_3 - i \frac{1}{\tau_k}, \quad (28)$$

где

$$\frac{1}{\tau_k} = \frac{C_4}{C_3} \frac{u_{3N}^2}{u_3^2} \frac{2}{\tau_\zeta}. \quad (29)$$

Последнее слагаемое в (28) не зависит от волнового вектора и обратно пропорционально времени релаксации фонон-примесонных столкновений. Это соответствует релаксации в системе за счет прямого поглощения фононов примесонной системой и аналогично механизму, описанному в [4] для фонон-ротонной системы. Если длина свободного пробега фононов оказывается гораздо больше характерных размеров задачи, то релаксация в диссипативной моде определяется только примесонной подсистемой и (28) переходит в (22).

Для исследования релаксационных процессов в кинетическом режиме рассмотрим релаксацию начального δ -образного отклонения какого-либо гидродинамического параметра $\varphi = \varphi(z, t)$ (это может быть температура или концентрация ^3He), обусловленную модой (28):

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi D_3 t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4D_3 t}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right) \equiv \\ &\equiv \varphi_D(z, t) \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right), \end{aligned} \quad (30)$$

где функция $\varphi_D(z, t)$ описывает гидродинамическую диффузионную релаксацию. При чисто диффузионном движении [13] полное по всему объему отклонение от равновесного

значения релаксирующей величины не зависит от времени:

$$S_D(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_D(z, t) dz = 1. \quad (31)$$

Наличие процессов прямого поглощения приводит к дополнительной и, возможно, более существенной релаксации, при этом величина $S_D(t)$ не сохраняется. Таким образом, эти процессы могут играть большую роль при релаксации температуры и концентрации в сверхтекучих растворах ^3He – ^4He при малых размерах неоднородностей в системе.

Такая ситуация реализуется при расслоении метастабильных пересыщенных растворов ^3He – ^4He , когда на начальных этапах расслоения образуются достаточно маленькие зародыши новой фазы [14]. При этом для описания роста зародыша необходимо будет использовать как формулы (28), (29) для кинетического режима, так и общие выражения (15)–(20), справедливые для произвольного соотношения между длиной свободного пробега фононов и характерными размерами неоднородностей в сверхтекучих растворах ^3He – ^4He . В частности, расчеты по формуле (28) показали, что при $T = 0,2$ К фононы определяют рост только очень больших капель размером от 600 мкм. Но уже при температуре $T = 0,3$ К вклад фононов необходимо учитывать при описании роста гораздо меньших зародышей диаметром 80 мкм.

Таким образом, в настоящей работе получены общие дисперсионные выражения (15)–(19), справедливые при произвольных отношениях времен фонон-примесонного взаимодействия τ , τ_ζ к временам установления равновесия внутри фононной и примесонной подсистем. В гидродинамическом, переходном и кинетическом режимах по фононным временам вычислены эффективные коэффициенты диффузии диссипативной моды, соответственно уравнения (26), (28) и (22), а также определены скорость и поглощение звука в акустической моде.

Выражаю глубокую признательность И. Н. Адаменко за постоянную поддержку при проведении настоящего исследования и полезные дискуссии. Благодарю Э.Я.Рудаковского, В. Н. Григорьева, Ю. З. Ковдю и участников научного семинара отдела сверхнизких температур ФТИНТ за критические замечания, высказанные при обсуждении результатов работы, которые стимулировали проведение численных оценок.

Работа выполнена при поддержке Международного фонда «Відродження» (грант Международной научно-образовательной программы для молодых ученых и преподавателей № YSU082037).

1. И. М. Халатников, В. Н. Жарков, *ЖЭТФ* **32**, 108 (1957).
2. G. Baym and C. Ebner, *Phys. Rev.* **164**, 235 (1967).
3. И. Н. Адаменко, Э. Я. Рудаевский, В. И. Цыганок, В. К. Чаговец, *Письма в ЖЭТФ* **33**, 404 (1984).
4. И. Н. Адаменко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **87**, 865 (1984).
5. И. Н. Адаменко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **88**, 1641 (1985).
6. И. Н. Адаменко, К. Э. Немченко, В. И. Цыганок, *ЖЭТФ* **91**, 731 (1989).
7. I. N. Adamenko, K. E. Nemchenko, and V. I. Tsyganok, *J. Low Temp. Phys.* **88**, 15 (1992).
8. Л. В. Горьков, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **33**, 634 (1957).
9. A. Griffin, *Can. J. Phys.* **47**, 426 (1969).
10. И. М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1971).
11. К. Э. Немченко, *ФНТ* **23**, 799 (1997).
12. Дж. Ферцигер, Г. Капер, *Математическая теория процессов переноса в газах*, Мир, Москва (1976).

13. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Физическая кинетика*, Наука, Москва (1979).
14. I. N. Adamenko, V. K. Chagovets, A. I. Chervanyov, V. A. Mikheev, K. E. Nemchenko, E. Ya. Rudavski, G. A. Sheshin, and V. I. Tsyganok, *J. Low Temp. Phys.* **96**, 294 (1994).

Kinetics of diffusion mode in phonon-impuriton system of mixtures of quantum ^3He - ^4He liquids

K. E. Nemchenko

On the base of the system of kinetic equations the relaxation processes in a phonon-impuriton system of superfluid ^3He - ^4He mixtures are studied. The derived general dispersion relations are valid at arbitrary ratios of phonon-impuriton interaction times to the relaxation times in phonon and impuriton subsystems. In hydrodynamic and kinetic cases the phonon rates are used to calculate the effective diffusion coefficient of the dissipative mode, and the sound velocity and attenuation in acoustic modes.