Физика низких температур, 1998, т. 24, № 7, с. 672–676

О рассеянии спиновых волн на солитоне в двумерном изотропном ферромагнетике

Б. А. Иванов, В. М. Муравьев

Институт магнетизма НАН Украины, Украина, 252142, г. Киев, ул. Вернадского, 36-Б
E-mail: vbaryakhtar@gluk.apc.org

Статья поступила в редакцию 4 января 1998 г.

Аналитически исследовано рассеяние магнонов на двумерном топологическом солитоне Белавина-Полякова в изотропном ферромагнетике. Показано, что в длинноволновом пределе может быть проведен полный анализ задачи о рассеянии спиновой волны на солитоне с произвольным значением топологического заряда солитона ν. Выяснены общие закономерности солитон-магнонного взаимодействия, в частности связь характера рассеяния с поведением моды при стремлении к нулю волнового вектора магнона k. Оказалось, что интенсивность рассеяния максимальна для парциальных волн с азимутальным числом $m = 0, \pm 1, \pm 2$ $(m = \nu - 1)$. Хотя общая закономерность состоит в том, что мода с максимальным рассеянием всегда переходит в локальную при $k \to 0$, этот факт не является критическим для интенсивности рассеяния. В частности, для $\nu = 1$ интенсивность рассеяния парциальной волны с $m = -1$ (нет локальной моды при $k \to 0$) сильнее, чем с $m = +1$ (имеется локальная мода при $k \to 0$).

Аналітично досліджено розсіяння магнонів на двовимірному топологічному солітоні Бєлавіна-Полякова в ізотропному феромагнетику. Показано, що в довгохвильовому наближенні може бути проведено повний аналіз задачі про розсіяння спінової хвилі на солітоні з довільним значенням топологічного заряду солітона ν. З'ясовано загальні закономірності солітон-магнонної взаємодії, зокрема зв'язок характеру розсіяння з поведінкою моди, коли хвильовий вектор магнона k наближається до нуля. Виявилося, що інтенсивність розсіяння максимальна для парціальних хвиль з азімутальним числом $m = 0, \pm 1, \pm 2$ $(m = \nu - 1)$. Хоч загальна закономірність полягає в тому, що мода з максимальним розсіянням завжди переходить у локальну при $k \to 0$, цей факт не є критичним для інтенсивності розсіяння. Зокрема, для $\nu = 1$ інтенсивність розсіяння парціальної хвилі з $m = -1$ (немає локальної моди при $k \to 0$) сильніша, ніж з $m = +1$ (існує локальна мода при $k \to 0$).

PACS: 75.30.Ds

1. Известно, что солитоны играют особую роль в термодинамике одно- и двумерных ($1D$ и $2D$) нелинейных моделей упорядоченных сред, в частности магнетиков. Для последовательного анализа термодинамических величин нужно знать не только структуру солитонов, но и свойства магнонных мод в присутствии солитона. Локальные моды (ЛМ), особенно нулевые, весьма существенны при построении солитонной термодинамики в $1D$ случае (см. [1–3]). Например, в методе солитонной феноменологии [4] они определяют температурную зависимость плотности $1D$ солитонов. Резонанс на ЛМ может непосредственно наблюдаться экспериментально [5,6]. Для $1D$ магнетиков известен ряд точных решений, описывающих как солитоны, так и магнонные моды на их фоне.

В двумерном случае ситуация является значительно более сложной. Анализ солитонов проводился, как правило, с использованием численных методов. Исследование магнонных мод на фоне солитонов только начинается. В этой связи особую роль играет анализ таких моделей, для которых возможно получение аналитических результатов и выяснение общих закономерностей солитон-магнонного взаимодействия.

Для физически интересных моделей $2D$ магнетиков известно только точное решение Белавина—Полякова [7], описывающее топологический солитон в изотропном ферромагнетике (ФМ) с энергией вида

$$W = A \int (\nabla \mathbf{m})^2 \, dx \, dy \,, \qquad (1)$$

где A — обменная константа; $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M_0$ — единичный вектор, определяющий направление намагниченности $\mathbf{M}$, $M_0 = |\mathbf{M}|$. Для этой модели известны также общие статические N-солитонные решения, что обусловлено масштабной инвариантностью модели и существованием уравнения самодуальности (см. подробнее [7,8]). Спектр магнонов в присутствии этого солитона исследовался в работе [9], в которой было показано, что солитон с топологическим зарядом ν обладает 2ν локальными магнонными модами с нулевой частотой. Эти моды являются предельными точками парциальных цилиндрических волн с азимутальным числом $-\nu < m \le \nu$ при $k \to 0$.

Мы покажем, что для уравнения Ландау—Лифшица (УЛЛ), описывающего ФМ с энергией (1), в длинноволновом пределе может быть проведен полный анализ задачи о рассеянии спиновой волны на солитоне.

2. Для анализа малых колебаний намагниченности удобно ввести вращающуюся систему ортов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_z \cos\theta + \sin\theta\,(\mathbf{e}_x \cos\varphi + \mathbf{e}_y \sin\varphi)$ совпадает с $\mathbf{m}$ в солитоне, $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi$, $\mathbf{e}_1 = [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ (θ, φ — угловые переменные для $\mathbf{m}$). Запишем явный вид солитонного решения [7]: $\operatorname{tg}(\theta/2) = (R/r)^{|\nu|}$, $\varphi = \nu\chi + \varphi_0$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — топологический заряд; r, χ — полярные координаты в плоскости ФМ; радиус солитона R и φ_0 — произвольные параметры. Линеаризуя УЛЛ по m_1 и m_2, можно представить уравнение для спиновых волн на фоне солитона в виде двумерного уравнения Шредингера для величины $\psi = m_1 + i m_2$:

$$\left(-\nabla^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\cos 2\theta\right)\psi - 2i\cos\theta\,\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\chi} + i\,\frac{2A}{\gamma M_0}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0\,, \qquad (2)$$

где γ — гиромагнитное отношение. Решение этого уравнения имеет вид суперпозиции цилиндрических волн:

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} F_m(r)\exp(im\chi - i\omega t)\,, \qquad (3)$$

где m — азимутальное квантовое число. Функция $F_m(r)$ удовлетворяет уравнению, имеющему форму радиального уравнения Шредингера,

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)F_m + \frac{1}{r^2}\Big[m^2 + 2m\nu\cos\theta + \nu^2\cos 2\theta\Big]F_m = k^2 F_m\,, \quad k^2 = \frac{\omega M_0}{2\gamma A}\,. \qquad (4)$$

«Потенциал» в этом уравнении не мал, однако его анализ в длинноволновом пределе $kR \ll 1$ может быть проведен достаточно полно. Для этого используем тот факт, что при $\omega = 0$ для уравнения (4) можно указать точное решение [9]

$$F_m^{(0)} = [\operatorname{tg}(\theta/2)]^{m/\nu}\sin\theta = (R/r)^{\sigma m}\sin\theta\,, \qquad \sigma = \nu/|\nu|\,. \qquad (5)$$

Существование этих точных решений связано с тем, что при $\omega \to 0$ восстанавливается масштабная инвариантность и справедливо уравнение самодуальности, свойственное статическому $2D$ УЛЛ (см. более подробное обсуждение этого вопроса в [9]).

Анализ (5) показывает, что при $r \to 0$ решение $F_m^{(0)}(r) \propto (r/R)^{\nu - m}$ (далее для определенности будем обсуждать случай $\nu > 0$, для анализа солитонов с $\nu < 0$ достаточно заменить m на $-m$). Значит, при $m \le \nu$ это решение не имеет сингулярности при $r \to 0$ и может быть использовано для анализа магнонных мод внутри солитона (при $r \le R$). Вдали от солитона ($r \to \infty$) $F_m^{(0)} \propto (r/R)^{-(\nu+m)}$. В случае $\nu > -m$ функция $F_m^{(0)}$ убывает при удалении от солитона. Отсюда немедленно следует существование $2|\nu|$ нулевых мод с $-|\nu| < m \le |\nu|$ [9], локализованных вблизи солитона.

Физический смысл двух из них очевиден: при $m = 1$ функция $F_1^{(0)} \propto \theta_0'$ и описывает трансляционные моды, т.е. сдвиг солитона как целого, случай $m = 0$ отвечает изменениям свободных параметров солитона φ_0 и R. Что касается остальных ЛМ с $\omega = 0$, которые могут существовать при $\nu > 1$, то их появление обусловлено высокой скрытой симметрией статического УЛЛ в модели (1), а именно, тем обстоятельством, что общее решение Белавина—Полякова с топологическим зарядом ν зависит от 2ν свободных параметров (см. [1–3,8]).

При $m < -\nu$ функция $F_m^{(0)}(r)$ возрастает, когда $r \to \infty$, поэтому она может использоваться только как асимптотическое решение для области $r \le R$. Случай $m = -\nu$ является особым, так как $F_{-\nu}^{(0)} \to \mathrm{const}$ при $r \to \infty$. Как мы убедимся ниже, здесь также существует особенность в рассеянии магнонов на солитоне.

Если $m > \nu$, то решение $F_m^{(0)}$ имеет особенность в нуле и неприменимо для описания области вблизи центра солитона. Тогда можно использовать второе линейно независимое решение (4), которое при $k = 0$ легко представить в виде

$$F_m^{(1)} = \sin\theta \left(\frac{r}{R}\right)^m \left[\frac{1}{m+\nu}\left(\frac{r}{R}\right)^{2\nu} + \frac{2}{m} + \frac{1}{m-\nu}\left(\frac{R}{r}\right)^{2\nu}\right]. \tag{6}$$

Таким образом, при $\omega = 0$ (или $k = 0$) можно построить хотя бы одно решение задачи (4), которое не имеет особенности в нуле. При малых, но конечных значениях частоты это решение можно использовать как приближенное в области $r << 1/k$, когда слагаемое ψk^2 в (4) мало по сравнению с членами, содержащими $d^2\psi/dr^2$ или ψ/r^2. Если же r достаточно велико (точнее, $r >> R$), то возможно другое упрощение: при $r >> R$ угол $\theta \to 0$ и (4) переходит в стандартное уравнение Бесселя, решение которого хорошо известно:

$$F_m = J_n(kr) + \sigma_n(k)N_n(kr)\ , \quad n = m + \nu\ , \tag{7}$$

где $J_n(x)$, $N_n(x)$ — функции Бесселя и Неймана целого индекса n (обозначение $n = m + \nu$ будет использоваться и далее).

3. Величину $\sigma_n(k)$ легко связать с матрицей рассеяния магнонов. Для этого надо рассмотреть асимптотику решения (7) на предельно больших расстояниях от солитона (при $r >> \max\{(1/k),R\}$) и сравнить с решением задачи о свободном движении магнонов, т.е. о магнонных состояниях без вихря [10]. Для сравнения решений этих задач удобно ввести переменную $\tilde{\psi} = \psi \exp(i\nu\chi - i\omega t)$, которая при $r \to \infty$ переходит в $(m_x + im_y) \times \times \exp(-i\omega t)$ и описывает спиновую волну на фоне однородного состояния $\mathbf{m} \parallel \mathbf{e}_z$. В терминах этой переменной с учетом формул (3), (7) асимптотику решения при $r >> R$ можно записать в виде

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n \left[J_n(kr) + \sigma_n(k)N_n(kr)\right] \exp(in\chi - i\omega t)\ , \tag{8}$$

где C_n — произвольные постоянные. Ясно, что для свободного движения это выражение должно быть справедливым при всех r, включая $r = 0$, т.е. свободному движению отвечает $\sigma_n(k) = 0$. Тогда при надлежащем выборе констант C_n получаем волновую функцию свободного движения $\psi \sim \sim \exp(i\mathbf{kr})$. С другой стороны, при $\sigma_n(k) \neq 0$ асимптотика ψ при $r >> 1/k$ может быть представлена следующим образом:

$$\tilde{\psi} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n \left[e^{-ikr} + S_n(k)\, e^{ikr}\right] \exp(in\chi - i\omega t)\ , \tag{9}$$

где

$$S_n(k) = \frac{1 - i\sigma_n(k)}{1 + i\sigma_n(k)}\ . \tag{10}$$

Величина $S_n(k)$ имеет смысл элемента **S**-матрицы для рассеяния парциальной волны с данным n.

4. Перейдем к вычислению матрицы рассеяния в длинноволновом пределе ($k >> 1/R$). Как отмечалось выше, функции (5) или (6) хорошо описывают решение в области $r << 1/k$, т.е. при малых, но конечных значениях k решение в этой области можно искать в виде

$$F_m(r) = F_m^{(0,1)}(r)[1 + \alpha(r)]\ , \tag{11}$$

где $F_m^{(0,1)}$ — функция (5) или (6); $\alpha(r) << 1$. Подставляя (11) в (4) и оставляя только слагаемые с $k^2F_m^{(0)}$ или $\alpha(r)$, получаем для $\alpha(r)$ неоднородное уравнение

$$F^{(0)}\left[\frac{d^2\alpha}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\alpha}{dr}\right] + 2\,\frac{d\alpha}{dr}\frac{dF^{(0)}}{dr} = k^2F^{(0)}\ . \tag{12}$$

Решение этого уравнения, не имеющее особенности в нуле, можно записать в виде

$$\alpha(r) = -k^2 \int_0^r \frac{du}{u[F^{(0)}(u)]^2} \int_0^u v[F^{(0)}(v)]^2\, dv\ . \tag{13}$$

Функция $\alpha(r) \to 0$ при $r \to 0$, поэтому данная поправка заведомо мала при достаточно малых r ($kr << 1$, но, возможно, $r \sim R$). При больших r эта функция возрастает, при $kr \sim 1$ величину $\alpha(r)F_m^{(0)}$ нельзя рассматривать как малую поправку к $F_m^{(0)}$ и уравнение (12) неприменимо. Однако эта область несущественна для нашей задачи — определения амплитуды рассеяния при $kR << 1$. Действительно, в широкой области значений r ($R << r << 1/k$) можно, с одной стороны, пользоваться асимптотикой (8), с другой — считать $\alpha(r) << 1$ и описывать $\alpha(r)$ с помощью формулы (13). Кроме того, в этой же области для цилиндрических функций можно пользоваться их асимптотиками при малых аргументах $z = kr << 1$, $J_n(z) = (1/n!)(z/2)^n N_n(z) = -[(n-1)!/\pi](2/z)^n$, что упрощает конкретное вычисление $\sigma_n(k)$.

5. Обсудим некоторые конкретные результаты. Для трансляционной моды ($m = 1$ или $n = \nu + 1$) вычисление $\alpha(r)$ может быть проведено точно и найдена искомая асимптотика решения:

$$F_m = \left(\frac{R}{r}\right) \sin\theta \left[1 - \frac{(kR)^2}{4\nu} \left(\frac{r}{R}\right)^2 - \frac{(kR)^2}{4\nu(\nu+1)} \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu+1} \right].$$

Легко видеть, что при $R << r << 1/k$ второе слагаемое в квадратных скобках мало по сравнению как с первым, так и с последним. При $r >> R$ можно получить

$$F_m = \left(\frac{R}{r}\right)^{\nu+1} - \frac{(kR)^2}{4\nu(\nu+1)} \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu+1} . \qquad (14)$$

Используя асимптотики цилиндрических функций $J_n(z)$, $N_n(z)$, находим, что при $m = 1$

$$\sigma(k) = \frac{\pi}{\nu!(\nu-1)!} \left(\frac{kR}{2}\right)^{2\nu} \qquad (15)$$

и интенсивность рассеяния убывает при $k \to 0$, причем быстрее для солитонов с бо́льшим топологическим зарядом.

Можно также провести общий расчет для любого ν и $n = 1$, т.е. $m = -\nu + 1$. В этом случае вычисления более громоздкие, и мы сразу приведем ответ:

$$\sigma(k) = \frac{\pi}{2 \ln (1/kR)} . \qquad (16)$$

Анализ показал, что для этой моды интенсивность рассеяния магнонов максимальна, $d\sigma(k)/dk$ расходится при малых k, хотя $\sigma(k) \to 0$ при $k \to 0$. Такое поведение было обнаружено при численном анализе рассеяния магнонов при $m = 0$ на магнитном вихре в легкоплоскостном антиферромагнетике [10].

Для других значений ν и m не удается получить общие формулы для $\sigma(k)$. Однако для любых конкретных значений ν и m ответ может быть легко найден после несложных (но иногда громоздких) вычислений.

Приведем результаты расчета для $\nu = 1, 2, 3$ и некоторых значений m, которые не описываются общими формулами (15), (16).

В случае $\nu = 1$ и $m = -1, -2$ можно записать

$$\sigma_{-1}(k) = \pi(kR)^2 \ln [1/(kR)],$$

$$\sigma_{-2}(k) = (\pi/4)(kR)^2 \{1 - (kR)^2 \ln [1/(kR)]\} .$$

В области существования квазилокальных мод ($-\nu < m \le \nu$) удается восстановить общую зависимость

$$\sigma_m(k) \propto (kR)^{2(\nu+m-1)} . \qquad (17)$$

В частности, для солитона с $\nu = 2$ значения σ_m для некоторых m определяются формулами $\sigma_0(k) = (kR)^2$, $\sigma_2(k) = \frac{1}{9}(kR/2)^6$. Для $\nu = 3$ имеем

$$\sigma_{-1}(k) = 3^{5/2}(kR/4)^2 , \quad \sigma_0(k) = (3^{5/2}/8)(kR/2)^4 ,$$

$$\sigma_2(k) = 2{\cdot}3^{1/2}(kR/4)^8 .$$

Вместе с общими формулами (15) и (16), которые дают значения $\sigma(k)$ для $m = 1$ и любого ν, а также $\sigma(k)$ при $m = 0, -1, -2$ для $\nu = 1, 2, 3$, эти результаты позволяют сделать некоторые общие заключения о характере рассеяния магнонов на солитоне.

Оказалось, что интенсивность рассеяния не максимальна для парциальных волн с наименьшими $m = \pm 1, 0$ (для магнитных вихрей это предположение также справедливо [10,11]).

Тот факт, что для парциальных волн с данным m предельная точка $k = 0$ служит локальной модой, не является критическим для интенсивности рассеяния. В частности, для солитона с $\nu = 1$ интенсивность рассеяния парциальной волны с $m = -1$ (нет локальной моды при $k \to 0$) сильнее, чем с $m = +1$ (при $k \to 0$ имеется локальная мода). Единственная закономерность состоит в том, что мода с максимальным рассеянием всегда переходит в локальную при $k \to 0$.

Третья особенность состоит в том, что в случае солитонов Белавина—Полякова нет простых закономерностей, описывающих связь интенсивностей рассеяния при $m = +|m|$ и $m = -|m|$. Для рассеяния магнонов на вихрях в легкоплоскостных магнетиках такие закономерности были установлены на основе численного анализа: для антиферромагнетиков $\sigma_m(k) = \sigma_{-m}(k)$ [10], в ферромагнетиках $\sigma_m(k)$ и $\sigma_{-m}(k)$ получаются друг из друга изменением знака частоты магнона [11].

Мы благодарны Д. Д. Шеке за помощь и обсуждения, В. Г. Барьяхтару, А. К. Колежуку, Ф. Г. Мертенсу, Г. Й. Шнитцеру и Г. М. Вайсину за обсуждение работы. Данная работа частично поддержана грантом 2.4./27 Государственного фонда фундаментальных исследований Украины.

Нам приятно приурочить опубликование этой статьи к юбилею профессора А. М. Косевича, автора основополагающих работ по теории магнитных солитонов.

1. А. М. Косевич, Б. А. Иванов, А. С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983); A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
2. H. -J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).
3. V. G. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, *Soviet Scientific Rev. Sec. A-Physics*, I. M. Khalatnikov (ed.), Vol. 61, N 3 (1992).
4. J. R. Currie, J. A. Krumhansl, A. R. Bishop, and S. E. Trullinger, *Phys. Rev.* **B22**, 477 (1980).
5. Г. А. Крафтмахер, В. В. Мериакри, А. Я. Червоненкис, В. И. Щеглов, *ЖЭТФ* **63**, 1453 (1972).
6. J. -P. Boucher, G. Rius, and Y. Henry, *Europhys. Lett.* **4**, 1073 (1987).
7. Л. Л. Белавин, Л. М. Поляков, *Письма в ЖЭТФ* **22**, 503 (1975).
8. Л. М. Переломов, *УФН* **134**, 557 (1981).
9. Б. А. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* **61**, 898 (1995).
10. B. A. Ivanov, A. K. Kolezhuk, and G. M. Wysin, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 511 (1996).
11. B. A. Ivanov, H. J. Schnitzer, F. H. Mertens, and G. M. Wysin, *Phys. Rev.* **B** (in press).

On the scattering of spin waves by soliton in a two-dimensional isotropic ferromagnet

B. A. Ivanov and V. M. Muravyov

The magnons scattering by a two-dimensional topological Belavin-Polyakov soliton in an isotropic ferromagnet is investigated analitically. It is shown that the complete analysis of the problem of spin wave scattering by the soliton with an arbitrary topological charge value ν can be made. General principles of the soliton-magnon interaction, specifically the relation between the scattering and the behaviour of the mode with the magnon wave vector approaching zero, are found out. The scattering intensity turned out to be maximum for partial waves with azimuthal number $m = 0, \pm 1, \pm 2$ $(m = \nu - 1)$. Although the general law is that the mode with the maximum scattering always transforms in a local one at $k \to 0$, the fact is not critical for scattering intensity. Specifically, for $\nu = 1$, the scattering intensity of a partial wave with $m = -1$ (there is no local mode at $k \to 0$) is higher than that in the case with $m = +1$ (there is a local mode at $k \to 0$).