

Бозе-газ с нетривиальным межчастичным взаимодействием и квазиклассическая трактовка ЭКЗОТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ

А. С. Ковалев

*Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины,
Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail: kovalev@ilt.kharkov.ua*

М. В. Гвоздикова

Харьковский государственный университет, Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 13 февраля 1998 г., после переработки 16 марта 1998 г.

Исследованы связанные многочастичные состояния в бозе-газе со сложным парным межчастичным взаимодействием. Показано, что комбинация притяжения и отталкивания между частицами приводит к появлению возможности существования связанных состояний с необычными физическими свойствами. В пределе большого числа связанных частиц в приближении Хартри эти состояния близки по структуре и свойствам к экзотическим солитонам (компактонам и пиконам) в классических системах со слабой пространственной дисперсией. Рассмотрены примеры экзотических солитонов разных типов в магнитоупорядоченных средах.

Досліджено зв'язані багаточастинкові стани в бозе-газі із складною парною міжчастинковою взаємодією. Показано, що комбінація притягання та відштовхування між частинками приводить до виникнення можливості існування зв'язаних станів з незвичайними фізичними властивостями. При найбільшій кількості зв'язаних частинок у наближенні Хартрі ці стани близькі по структурі та властивостям до екзотичних солітонів (компактонів та піконів) в класичних системах з слабкою просторовою дисперсією. Розглянуто приклади екзотичних солітонів різних типів в магнітвпорядкованих середовищах.

PACS: 03.40.Kf

В конце 60-х годов стало актуальным широкое исследование солитонной динамики нелинейных эволюционных систем. Практически в то же время началось изучение этой проблемы в Харькове, и одним из пионеров в этой области был профессор А. М. Косевич. В 1990 г. в написанном им с соавторами обзоре [1] впервые был предложен новый тип солитонов — магнитные компактоны. Исследованию компактонов и их квазиклассической трактовке посвящена настоящая статья.

Как известно, причиной существования динамических пространственно локализованных возбуждений нелинейных эволюционных систем — динамических солитонов — является воздействие и взаимная конкуренция двух

физических факторов — нелинейности системы и ее пространственной дисперсии [2]. Вид закона дисперсии линейных волн $\omega(k)$ оказывает большое влияние на свойства солитонных состояний. Их структура существенно различается в системах с сильной дисперсией, когда величина дисперсии $D = \partial^2\omega/\partial k^2$ остается конечной в длинноволновом пределе $k \rightarrow 0$, и в слабодисперсных средах, где $D \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$. Сейчас стало очевидным, что даже в случае полного отсутствия дисперсии линейных волн сохраняется возможность существования солитонных решений за счет так называемой «нелинейной дисперсии», однако солитоны принимают необычный, «экзотический» вид. Впервые на это было обращено внимание в

обзоре [1] при описании изинговского ферромагнетика.

В случае одномерного гейзенберговского ферромагнетика с одноосной обменной и одноионной анизотропией энергия системы имеет вид

$$E = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{\partial m_z}{\partial x} \right)^2 - \frac{\beta}{2} m_z^2, \quad (1)$$

где \mathbf{m} — вектор намагниченности; $\beta > 0$ для легкоосного ферромагнетика. Если измерять время в единицах $1/\omega_0$, где частота однородного ферромагнитного резонанса $\omega_0 = 2\beta\mu_0 M_0/\hbar$, и ввести динамические переменные $\psi = m_x + im_y$ и $m = m_z = (1 - |\psi|^2)^{1/2}$, то уравнения динамики намагниченности (уравнения Ландау–Лифшица) примут следующую форму [1]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - l^2 m \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + L^2 \psi \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} + m \psi = 0 \quad (2)$$

где введены обозначения для двух «магнитных длин» $l = (\alpha/\beta)^{1/2}$ и $L = [(\alpha + \alpha_1)/\beta]^{1/2}$.

В простейшем случае неподвижного солитона огибающей с $\psi = (1 - m^2(x))^{1/2} \exp(i\omega t)$ после первого интегрирования представим уравнение (2) в виде

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = u^2 \frac{(1 - \omega) - u^2}{4(L^2 - l^2)u^2 + l^2/(1 - u^2)}, \quad (3)$$

где введена новая переменная $u = [(1 - m)/2]^{1/2}$.

В пределе изинговского ферромагнетика с $l = 0$ солитонное решение уравнения (3) (рис. 1, а) имеет следующую форму:

$$u = \sqrt{1 - \omega} \cos(x/2L), \quad |x| < \pi L, \quad (4)$$

$$u = 0, \quad |x| > \pi L.$$

Поскольку в данном случае поле отлично от нуля лишь в конечной области пространства, такие решения позже были названы компактонами. Для них зависимость амплитуды от частоты такая же, как и в обычных солитонах огибающей, но

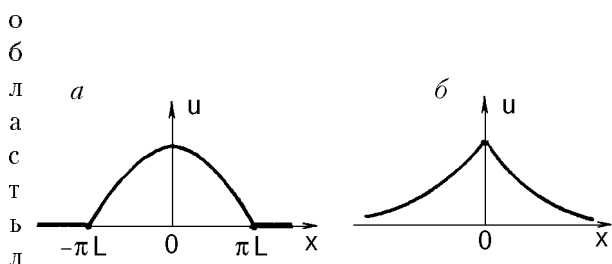


Рис. 1. Профили компактного (а) и пиконного (б) решений.

лизации не связана с частотой и определяется лишь материальными константами. Важно отметить, что в изинговском пределе линеаризованное по ψ уравнение (2) обладает нулевой дисперсией, $\omega(k) \equiv 1$. В магнетиках, близких к изинговским с $l \ll L$, в пределе малых амплитуд ($1 - \omega \ll 1$) уравнение (3) сводится к более простому уравнению:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = u^2 \frac{(1 - \omega) - u^2}{l^2 + 4L^2 u^2}. \quad (5)$$

Интерес к компактонам возник после публикации работ Розенау [3,4], который предложил новый вариант известного уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) с нелинейным дисперсионным слагаемым и показал, что этот вариант обладает компактным солитонным решением стационарного профиля с пропорциональной скорости амплитудой и с не зависящей от скорости областью локализации.

В том же году в работах [5,6] были рассмотрены компактные солитоны огибающей для противофазных высокочастотных колебаний в ангармонической цепочке при учете нелинейных дисперсионных слагаемых. В этом случае динамическое уравнение для атомных смещений $v(x)$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v + v^3 + \lambda v \frac{\partial^2 (v^2)}{\partial x^2} = 0. \quad (6)$$

При $\lambda > 0$ в резонансном приближении $v \approx W(x) \sin(\omega t)$ и в пренебрежении линейной дисперсией ($\varepsilon = 0$) решение уравнения (6) имеет форму компактона, близкую к выражению (4). Позже Холм и Камасса (1994 г.) предложили свою модификацию уравнения КдФ, которая при определенном значении скорости допускала существование локализованной волны стационарного профиля вида $A \exp(-B|x - V_0 t|)$ с определенными значениями констант A и B (см. рис 1, б). Этот новый тип экзотических солитонов был назван пиконом. По аналогии с ним могут быть найдены и солитоны огибающей пиконного типа, которые также существуют лишь при определенном, критическом значении частоты решения.

Если в обсуждавшейся выше ангармонической цепочке учесть слабую линейную дисперсию ($\varepsilon \neq 0$) и изменить знак нелинейного дисперсионного слагаемого ($\lambda < 0$), то в резонансном приближении амплитуда волны $W(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 = W^2 \frac{(\omega - 1) - 3W^2/8}{\varepsilon - 3|\lambda| W^2/2}. \quad (7)$$

Легко видеть, что при критическом значении частоты $\omega = (1 + \varepsilon/4|\lambda|)^{1/2}$ решение уравнения (7) имеет вид пикона:

$$W = \left(\frac{2\varepsilon}{3|\lambda|}\right)^{1/2} \exp(-|x| / (2\sqrt{\lambda})). \quad (8)$$

Заметим, что для решений уравнения (6) типа стоячих волн $v = W \sin(kx) \sin(\omega t)$ нелинейный закон дисперсии имеет вид $\omega^2 = 1 - \varepsilon k^2 + 9W^2/16 + 3|\lambda| k^2 W^2/2$. Таким образом, при выделенной амплитуде $W = (2\varepsilon/3|\lambda|)^{1/2}$, совпадающей с амплитудой пикона (8), дисперсия $D = \partial^2\omega/\partial k^2$ обращается в нуль.

Уравнения (5) и (7) характерны для задач, в которых возникают солитоны, близкие к компактам и пиконам. В связи с необычным характером распределения поля в экзотических солитонах представляет интерес рассмотрение вопроса о квантовых системах, в которых возможно существование состояний с аналогичными свойствами. Как известно, классическим нелинейным эволюционным уравнениям можно сопоставить определенные квантовые системы взаимодействующих частиц [7–12]. Так, например, солитонные возбуждения слабонелинейных систем обычно описываются в рамках нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) [1]

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi - g|\psi|^2 \psi = 0, \quad (9)$$

решение которого для динамических солитонов хорошо известно и имеет стандартный вид:

$$\psi = \sqrt{2/g} \varepsilon \operatorname{sech}(\varepsilon x) \exp(-i\omega t), \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \omega}. \quad (10)$$

Свойства этих солитонов во многом аналогичны свойствам связанных многобозонных стационарных состояний в квантовом одномерном бозе-газе с δ -образным притяжением между частицами [1]. Волновая функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ таких состояний удовлетворяет следующему уравнению Шредингера:

$$-\sum_i \frac{d^2 \Phi}{dx_i^2} + N\Phi + \sum_{i < j} U_{ij} \Phi = E\Phi, \quad (11)$$

$$U_{ij} = -g \delta(x_i - x_j).$$

(Мы положим $\hbar = 1$ и $m = 1/2$.) В то время как классическое нелинейное уравнение Шредингера

полностью интегрируется методом обратной задачи рассеяния, квантовое уравнение Шредингера с δ -образным взаимодействием полностью интегрируется методом анзаца Бете [13,14]. Спектр энергий связанного многобозонного комплекса имеет вид $E = N - 1/48 g^2 N(N^2 - 1)$ и совпадает с результатом квазиклассического квантования солитонного решения (9) при учете зависимости $\varepsilon(N) = gN/4$. Распределение плотности бозонов в связанном состоянии совпадает с огибающей функции $|\psi|^2$ для солитона (9) в пределе большого числа частиц $N \gg 1$.

Однако описание солитонной динамики в рамках НУШ оправданно лишь в малоамплитудном пределе (малые N), приводя к коллапсу солитонов в пределе $N \rightarrow \infty$. Ограничение роста амплитуды при больших N обычно учитывают, вводя в уравнение (9) дополнительные слагаемые с более высокой степенью нелинейности («насыщенная нелинейность»). При этом НУШ модернизируется следующим образом [1,15]:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi - g|\psi|^2 \psi + \delta|\psi|^4 \psi = 0. \quad (12)$$

Солитонное решение этого уравнения имеет вид функции с «плато» и соответствует «капле» конденсированного состояния. Квазиклассическим аналогом «НУШ с насыщением» (12) является одномерный бозе-газ с парным и трехчастичным δ -образным взаимодействием [15], в котором параметр 2δ характеризует величину трехчастичного взаимодействия.

Но из солитонного решения (20) видно, что в основном приближении амплитуда солитона $|\psi|$ и пространственная производная $\partial/\partial x$ имеют один порядок малости ($|\psi|, \partial/\partial x \sim \varepsilon$). Поэтому в уравнении (12) наряду с нелинейными слагаемыми $\sim \psi^5$, вообще говоря, необходимо учитывать кубические слагаемые, содержащие две пространственные производные. Например, уравнение Ландау-Лифшица (2), записанное с точностью до ε^5 включительно, имеет вид

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} - l^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \psi - \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi =$$

$$= \frac{1}{8} |\psi|^4 \psi - \frac{l^2}{2} |\psi|^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{L^2}{2} \psi \frac{\partial^2 (|\psi|^2)}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Поскольку в основном приближении $\psi \sim \varepsilon$ и $\partial/\partial x \sim \varepsilon/l$, для ферромагнетиков, близких к

изинговским с $L \gg l$, из всех слагаемых в правой части (13) необходимо оставить лишь последнее, переписав его в более простом виде:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - l^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \Psi - \frac{1}{2} |\Psi|^2 \Psi - \frac{L^2}{2} \Psi \frac{\partial^2 (|\Psi|^2)}{\partial x^2} = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) содержит лишь кубические нелинейные слагаемые, поэтому этой классической системе должна соответствовать квантовая система с парным, но более сложным, чем в (11), межчастичным взаимодействием.

Выберем в качестве потенциала U_{ij} в (11) более сложную функцию, включающую как притяжение, так и отталкивание на разных расстояниях. Использование таких потенциалов обычно для статистической физики, где учитывают отталкивающий кор на малых расстояниях и слабое притяжение на больших. В нашем случае для существования связанных состояний солитонного типа необходимо, чтобы суммарный потенциал имел характер притяжения. Для простоты будем моделировать потенциал системой δ -функций. При этом возможны два варианта выбора (рис. 2, а и б) подобного потенциала

$$U_{ij} = 2V\delta(x_i - x_j) - 2U[\delta(x_i - x_j + a) + \delta(x_i - x_j - a)], \quad (15)$$

где в первом случае (а) $V > 0$, $U > 0$ и $V - 2U = -W > 0$, а во втором (б) $V < 0$, $U < 0$ и $V - 2U = -W < 0$. Уравнение (11) с потенциалом (15) интегрируется методом анзаца Бете, но из-за громоздкости соответствующих вычислений мы упростим задачу, заменив потенциал (15) точечным потенциалом

$$U_{ij} = -2W\delta(x_i - x_j) - 2Ua^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \delta(x_i - x_j). \quad (16)$$

Ниже мы убедимся, что интересующие нас экзотические солитоны соответствуют предельно б

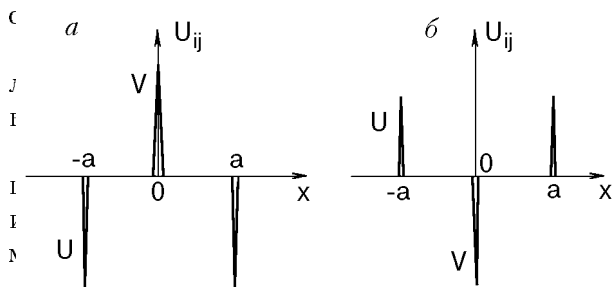


Рис. 2. Парный межчастичный потенциал взаимодействия, приводящий к компактным (а) и пиконным (б) солитонам.

слам N , при которых можно воспользоваться приближением Хартри. Для описания нестационарных состояний идеального бозе-газа обычно используют предложенное Дираком зависящее от времени приближение Хартри (ТДНА), которое приводит нас к уравнению типа (14) для хартриевской функции. Но для исследования стационарных солитонных состояний достаточно воспользоваться обычным приближением, в котором волновая функция $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_N)$ в (11) представлена в виде произведения одночастичных функций: $\Phi = \prod \phi(x_i)$, где $\phi(x)$ — нормированная хартриевская функция ($\int |\phi|^2 dx = 1$). Подставив выражение для Φ в (11), умножив обе его части на $\phi^*(x_2) \dots \phi^*(x_N)$ и проинтегрировав по x_2, x_3, \dots, x_N , легко получить уравнение для функции $\phi(x)$ в случае потенциала (16):

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} - \epsilon \phi + 2(N-1)W\phi^3 + 2(N-1)Ua^2 \phi \frac{d^2(\phi^2)}{dx^2} = 0, \quad (17)$$

где хартриевская энергия ϵ и полная энергия E выражаются через решения уравнения (17) следующим образом:

$$\epsilon = \int dx \left[-\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + 2(N-1)W\phi^4 - 2(N-1)Ua^2 \phi^2 \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 \right], \quad (18)$$

$$E = N + N \int dx \left[\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - (N-1)W\phi^4 + (N-1)Ua^2 \phi^2 \left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 \right]. \quad (19)$$

(Для стационарных состояний функция ϕ может быть выбрана вещественной.) Как видим, уравнение (17) имеет ту же структуру, что и уравнение (14) для изинговского ферромагнетика.

Решение уравнения (17) зависит от ϵ и N как от параметров, и подстановка его в условие нормировки задает зависимость хартриевской

энергии от числа частиц $\varepsilon = \varepsilon(N)$. После этого из уравнения (19) находится зависимость $E(N)$.

Использование дифференциальных уравнений предполагает малость пространственных производных d/dx . При этом последнее слагаемое в (17) имеет смысл учитывать лишь при условии $Ua^2/W \gg 1$, т.е. суммарный потенциал должен быть мал либо должна существенно проявляться конечность области парного взаимодействия a . Если же исходить из потенциальной энергии (15), то можно показать, что переход к упрощенному потенциалу (16) возможен при выполнении дополнительного неравенства $WUa^2 \ll 1$. Выполнение обоих неравенств $W^2 \ll WUa^2 \ll 1$ требует малости суммарного потенциала $W \ll 1$.

После первого интегрирования уравнение (17) сводится к виду, допускающему анализ на фазовой плоскости $(\varphi, d\varphi/dx)$:

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \varphi^2 \frac{\varepsilon - NW\varphi^2}{1 + 4NUa^2\varphi^2}, \quad (20)$$

где мы учли, что $N \gg 1$.

В случае (а) уравнение (20) имеет качественно тот же вид, что и уравнение (5), допускающее в предельном варианте компактные решения. С другой стороны, в случае (б), когда $U < 0$, уравнение (20) качественно совпадает с (7), имеющим при критическом значении параметра пиконное решение.

Уравнение (20) интегрируется, хотя его солитонные решения и получаются лишь в неявной форме.

В случае (а) при $U > 0$ это решение выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{\sqrt{A}} \ln \frac{\sqrt{A} - f}{\sqrt{A} + f} - \arcsin \frac{f^2 - 1}{f^2 + 1} = 2x \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{A}}, \quad (21)$$

где $A = 4Ua^2\varepsilon/W$ и $f = [(4Ua^2/W) \times (\varepsilon - WN\varphi^2)/(1 + 4Ua^2N\varphi^2)]^{1/2}$.

В случае (б) при $U < 0$ решение также записывается в неявном виде:

$$\frac{1}{\sqrt{B}} \ln \frac{F - \sqrt{B}}{F + \sqrt{B}} - 2 \ln [(1 - F)\sqrt{1 - 4|U|Na^2\varphi^2}] = \left(\frac{W}{4|U|a^2}\right)^{1/2} x, \quad (22)$$

где $B = 4|U|a^2\varepsilon/W$ и $F = [(4|U|a^2/W) \times (\varepsilon - WN\varphi^2)/(1 - 4|U|a^2N\varphi^2)]^{1/2}$.

Решения (21), (22) содержат подлежащую определению зависимость $\varepsilon = \varepsilon(N)$. Ее можно

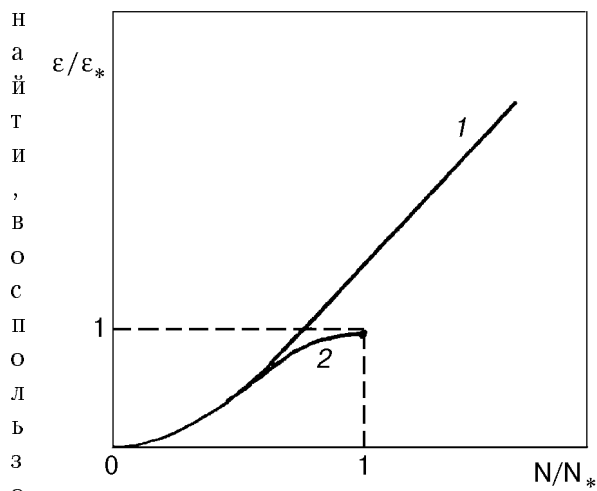


Рис. 3. Зависимость хартриевской энергии связанного многобозонного комплекса от числа связанных в нем частиц в случае потенциала (а) — кривая 1 и потенциала (б) — кривая 2.

используем условие нормировки и уравнением (20).

Если ввести характерную величину хартриевской энергии $\varepsilon_* = W/4Ua^2$ и характерное число частиц $N_* = 1/\sqrt{4WUa^2}$, то зависимость $N = N(\varepsilon)$ в случае (а) имеет вид

$$\frac{N}{N_*} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right)^{1/2} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right) \arcsin \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_*}\right)^{1/2}. \quad (23)$$

Таким образом, при малых значениях N ($N \ll N_*$) хартриевская энергия пропорциональна квадрату N , $\varepsilon \approx (NW/2)^2$, а при $N \gg N_*$ эта зависимость переходит в линейную, $\varepsilon \approx (NW/2\pi) \times (4W/Ua^2)^{1/2}$ (рис. 3, кривая 1).

В случае (б) зависимость $N = N(\varepsilon)$ изменяется:

$$\frac{N}{N_*} = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_*}\right) \ln \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_*} + \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_*} - \sqrt{\varepsilon}}\right)^{1/2}, \quad (24)$$

где в определении ε_* и N_* сделана замена $U \rightarrow |U|$. При малых N зависимость $\varepsilon = \varepsilon(N)$ совпадает со случаем (а). Однако в случае (б) число частиц N ограничено сверху величиной N_* , при которой ε принимает максимальное значение ε_* (рис. 3, кривая 2).

При малом числе связанных бозонов $N \ll N_*$ решения для случаев (а) и (б) практически совпадают и имеют стандартный вид:

$$\varphi = \frac{\sqrt{NW}}{2} \operatorname{sech} \left(\frac{NW}{2} x\right). \quad (25)$$

Заметим, что из обсуждавшихся выше неравенств следует, что $N_* \gg 1$. Поэтому

решение (25) существует и при больших значениях N ($1 \ll N \ll N_*$).

В противоположном пределе $N \gg N_*$ амплитуда солитона стремится к конечной величине $(W/\pi^2 U a^2)^{1/4}$ и он локализуется в конечной области пространства $2\Delta = 2/\epsilon_*^{1/2}$. При $N \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \varphi &= \sqrt{2/\pi\Delta} \cos \frac{x}{\Delta}, \quad |x| > \pi \Delta/2, \\ \varphi &= 0, \quad |x| < \pi \Delta/2, \end{aligned} \quad (26)$$

т. е. солитон имеет типичный компактный вид (см. (4)), приведенный на рис. 1,а. Хотя плотность бозонов в солитоне $\rho = N\varphi^2$ возрастает до бесконечности с ростом N , размер солитона остается конечным и его коллапс отличается от коллапса в бозе-газе с обычным δ -функциональным взаимодействием.

Подставляя компактное решение (26) в выражение для энергии (19), легко убедиться, что для таких решений зависимость $E = E(N)$ также необычна:

$$E = N(1 + \epsilon_*) - N^2 \frac{11\epsilon_*}{12\pi N_*}. \quad (27)$$

Таким образом, в компакте перенормируется собственная энергия частицы, а нелинейная по N добавка к энергии пропорциональна N^2 , а не N^3 , как в обычных солитонах. Заметим, что зависимость $E = N\omega_0 - \gamma N^2$ характерна для ангармонического осциллятора, т. е. компакт в результате своей необычной локализации обладает некоторыми чертами локализованного нелинейного осциллятора. Этот же результат сохраняется и для магнитного компакта (4) в изинговском ферромагнетике. Подставляя решение (4) в выражение для энергии (1) при $\alpha = 0$ и для спиновых отклонений $N = \int (1 - m) dx = 2 \int u^2 dx$, находим ту же зависимость

$$E = N - N^2/8\pi L. \quad (28)$$

В заключение рассмотрим предел большого числа связанных бозонов $N \rightarrow N_*$ в случае (б) с отрицательным параметром U . В этом пределе уравнение (20) принимает вид

$$(\sqrt{\epsilon_*} - \varphi^2) \left(\Delta^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \varphi^2 \right) = 0, \quad (29)$$

его солитонное решение имеет форму пикона (см. рис. 1,б):

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \exp(-|x|/\Delta), \quad (30)$$

где по-прежнему $\Delta = \epsilon_*^{-1/2}$. Формально решение (30) имеет скачок производной в точке сшивки ($x = 0$). Но амплитуда солитона в этой точке не является произвольной, а совпадает с однородным решением $\varphi^2 = \epsilon_*^{1/2}$ нелинейного уравнения (29). Подставляя решение (30) в формулу (19), находим связь полной энергии с числом бозонов в солитоне $E = N_*(1 + 3\epsilon_*/8)$.

Энергия пикона оказывается больше энергии N_* свободных частиц, и эти же состояния, возможно, неустойчивы.

Таким образом, связанные многочастичные комплексы в одномерной квантовой системе бозонов со сложным парным взаимодействием в пределе большого числа связанных частиц обладают свойствами классических экзотических солитонов (компактонов и пиконов) в приближении среднего поля и описываются аналогичными нелинейными эволюционными уравнениями с малой пространственной дисперсией.

1. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
2. А. М. Косевич, А. С. Ковалев, *Введение в нелинейную физическую механику*, Наукова думка, Киев (1989).
3. P. Rosenau and J. Human, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 564 (1993).
4. P. Rosenau, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1737 (1994).
5. Yu. A. Kosevich, *Phys. Lett.* **A176**, 257 (1993).
6. Yu. A. Kosevich, *Phys. Rev.* **B47**, 3138 (1993).
7. L. D. Faddeev and V. E. Korepin, *Phys. Rep.* **42C**, 1 (1978).
8. Е. К. Склянин, Л. Д. Фаддеев, *ДАН СССР* **243**, 1430 (1978).
9. Е. К. Склянин, Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *ТМФ* **40**, 194 (1979).
10. В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджан, *ТМФ* **38**, 26 (1979).
11. G. R. W. Quispel and H. R. Capel, *Physica A* **117**, 1 (1983).
12. H. B. Thacker, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 253 (1981).
13. E. H. Lieb and W. Lineger, *Phys. Rev.* **130**, 1605 (1963).
14. J. B. Mc Guire, *J. Math. Phys.* **5**, 622 (1964).
15. А. С. Ковалев, А. М. Косевич, *ФНТ* **2**, 913 (1976).

The Bose-gas with a nontrivial interparticle interaction and the quasi-classical treatment of exotic solitons

A. S. Kovalev and M. V. Gvozdikova

Many-particle bound states in a Bose-gas with a complicated pairwise interaction are investigated. It is shown that the combination of attractive and re-

pulsive interparticle interactions makes the existence of bound states with nontrivial physical properties quite possible. In the Hartree approximation in the limit of a large number of bound particles these states are similar in structure and properties to exotic solitons (compactons and peakons) in classical

nonlinear systems with a weak spatial dispersion. Exotic magnetic solitons of different types are considered.