Физика низких температур, 1996, т. 22, № 4, с. 446–454

Об устойчивых двухмерных солитонах и неоднородных состояниях в магнетиках без центра инверсии

А. А. Жмудский

Киевский университет им. Тараса Шевченко, Украина, 252000, г. Киев, ул. Софьи Ковалевской, 3

Б. А. Иванов

Институт магнетизма НАН Украины, Украина, 2521142, г. Киев, ул. Вернадского, 36,б

Статья поступила в редакцию 30 октября 1995 г.

Рассмотрены двухмерные локализованные магнитные солитоны в магнетиках без центра инверсии с учетом анизотропии в базисной плоскости. Показано, что статические солитоны в таких магнетиках стабильны по критерию Ляпунова. Механизм стабилизации солитона связан с присутствием в энергии магнетика инвариантов, линейных по градиентам. Свойства таких солитонов принципиально изменяются при учете сколь угодно малой анизотропии в базисной плоскости. Если в рассматриваемых ранее моделях чистоодноосного магнетика энергия солитона может быть сколь угодно малой, то при конечной анизотропии такого типа она имеет конечное значение во всей области термодинамической стабильности однородного основного состояния.

Розглянуто двовимірні локалізовані магнітні солітони в магнетиках без центра інверсії з урахуванням анізотропії в базисній площині. Показано, що статичні солітони в таких магнетиках стабільні по критерію Ляпунова. Механізм стабілізації солітона пов'язан з присутністю у виразі для енергії магнетика інваріантів, лінійних по градієнтам. Властивості таких солітонів принципово змінюються при урахуванні скільки завгодно малої анізотропії в базисній площині. Якщо в розглянутих раніше моделях чисто одновісного магнетика енергія солітона може бути дуже малою, то при кінцевій анізотропії такого типу вона має кінцеве значення у всій області термодинамічної стабільності однорідного основного стану.

1. Введение

Хорошо известно, что для низкоразмерных магнетиков особую роль могут играть нелинейные элементарные возбуждения — топологические солитоны поля намагниченности. В одномерных магнетиках солитоны (кинки) разрушают дальний порядок, дают существенный вклад в теплоемкость, восприимчивость, сечение рассеяния нейтронов [1–3]. Хорошо известна также роль нелокализованных солитонов — магнитных вихрей, дисклинаций — в физике двухмерных магнетиков с непрерывным вырождением основного состояния [3,4]. Для этих магнетиков вихри определяют существование перехода Березинского–Костерлица–Таулесса [5,6] и свойства фаз выше и ниже точки этого перехода.

В двухмерных магнетиках с дискретным вырождением основного состояния, т.е. магнетиках с анизотропией типа легкая ось или ромбических, вихри существовать не могут, и важными могут оказаться лишь локализованные солитоны, в которых векторы намагниченности M (для антиферромагнетиков — векторы антиферромагнетизма l) имеют одинаковое направление вдали от центра солитона (о классификации солитонов см. обзоры [3,4]). В таких магнетиках могут существовать состояния с дальним порядком, и роль солитонов не столь принципиальна, как для одномерных магнетиков или двухмерных легкоплоскостных магнетиков. Однако учет двухмерных локализованных солитонов необходим для описания физических свойств двухмерных магнетиков с дискретным вырождением. Действительно, такие солитоны, согласно экспериментам [7], определяют релаксацию магнитных возмущений, а также могут приводить к появлению центральных пиков в функциях отклика [8,9].

Основная проблема, возникающая в солитонной физике двухмерных магнетиков, связана со стабильностью локализованных солитонов. Согласно теореме Хобарта—Деррика [10], для «обычных» моделей нелинейных полей, лагранжиан которых включает только квадраты градиентов компонент поля, неодномерные солитоны нестабильны относительно коллапса. Это относится и к обычной модели магнетиков, согласно которой состояние магнетика описывается в терминах единичного

© А. А. Жмудский, Б. А. Иванов, 1996

вектора намагниченности $\mathbf{m}$, $\mathbf{m}^2 = 1$, с функционалом энергии вида

$$W_0 = \int d^2x \left\{ A \left(\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial x_i} \right)^2 + w_a(\mathbf{m}) \right\}, \qquad (1)$$

где A — константа неоднородного обмена; $w_a(\mathbf{m})$ — энергия анизотропии. (В случае антиферромагнетика анализ статических солитонов проводится так же, только вместо $\mathbf{m}$ фигурирует единичный вектор антиферромагнетизма l.) Легко убедиться, что для солитона с характерным размером R в этой модели энергия $E_0(R) = \xi_1 A + \xi_2 R^2 K$, где $\xi_{1,2}$ — численные коэффициенты; K — характерное значение w_a. Функция $E_0(R)$ не имеет минимума ни при каких значениях $R \neq 0$, что и демонстрирует неустойчивость солитонов.

Одна из возможностей стабилизации солитона относительно коллапса связана с наличием дополнительных интегралов движения, например для одноосных магнетиков — с учетом сохранения проекции $\mathbf{m}$ на легкую ось [11]. В этом случае, однако, солитон получается динамическим (прецессионным), и условие минимума энергии уже не требуется (обсуждение различных подходов к проблеме стабильности солитона будет проведено ниже). Возможность существования стабильных трехмерных магнитных солитонов при учете в выражении для энергии члена типа $A'[(\nabla \mathbf{m})^2]^2$ при $A' > 0$ отмечалось Скирмом [12] и Энзом [13]. Однако для магнетиков в приближении ближайших соседей $A' < 0$, и такая стабилизация не возможна.

Еще один механизм стабилизации солитона возникает для магнетиков без центра инверсии. Как показано Дзялошинским [14], для таких магнетиков в выражении для плотности энергии могут существовать слагаемые линейные по градиентам намагниченности. В частности, для одноосных магнетиков кристаллических классов D_n и C_{nv} существуют инварианты

$$D\left(m_z \frac{\partial m_x}{\partial y} - m_x \frac{\partial m_z}{\partial y} + m_y \frac{\partial m_z}{\partial x} - m_z \frac{\partial m_y}{\partial x} \right);$$
$$D'\left(m_z \frac{\partial m_x}{\partial x} - m_x \frac{\partial m_z}{\partial x} + m_y \frac{\partial m_z}{\partial y} - m_z \frac{\partial m_y}{\partial y} \right); \qquad (2)$$

для ромбических магнетиков существуют инварианты такого же типа с различными константами для $\partial m_i / \partial x$ и $\partial m_i / \partial y$.

Обычно слагаемые такого типа обсуждаются в связи с возможностью существования термодинамически стабильных неоднородных состояний: чаще всего спиральных структур [14–16], а также вихрей с отрицательной энергией или вихревых решеток [17–19]. Для существования термодинамически стабильных, т.е. выгодных энергетически неоднородных состояний в легкоосных магнетиках, значение D должно превышать некоторое критическое значение D_c, $D_c \approx \sqrt{AK}$. Поэтому неоднородные состояния могут реализоваться только в таких легкоосных магнетиках, в которых константы D, D' имеют обменно-релятивистское происхождение (для чисто релятивистских инвариантов $D \ll \sqrt{AK}$).

При достаточно малых D, $aK \leq D \ll \sqrt{AK}$ (a — постоянная решетки) наличие инвариантов типа (2) в легкоосных магнетиках может быть весьма существенным. Как показано в работах [20,21], при сколь угодно малом значении D или D' наличие таких инвариантов приводит к стабилизации двухмерных солитонов относительно коллапса (к этому выводу пришли и авторы работы [22]). Энергия солитонов при $D < D_c$ положительна, но при любой температуре $T \neq 0$, $T < T_C$, T_C — температура Кюри, их плотность конечна и они могут играть роль специфических нелинейных элементарных возбуждений легкоосных двухмерных магнетиков (см. [7,8]). Оказалось, однако, что свойства таких солитонов принципиально изменяются при учете сколь угодной малой анизотропии в базисной плоскости. В частности, если в модели чисто одноосного магнетика (симметрия C_∞) энергия солитона E является малой ($E \sim \sqrt{D_c - D}$), то при конечной анизотропии E имеет конечное значение во всей области значений D, в которой однородное основное состояние термодинамически выгодно. Даже весьма слабая анизотропия в базисной плоскости принципиально изменяет структуру солитона немалого радиуса.

Кроме того, мы покажем, что учет сколь угодно слабой анизотропии в базисной плоскости при немалом $D > D_c$ приводит к разрушению рассмотренной в работах [17–19] гексагональной решетки вихрей. В этом случае наиболее предпочтительной является одномерная структура типа спирали с неоднородным вращением $\mathbf{m}$ или системы плоских доменных стенок, обсуждавшейся в [15,16].

2. Структура солитона

Будем исходить из обычного выражения для энергии магнетика (1) с дополнительным учетом инвариантов типа (2). Так как второй инвариант (2) может быть получен из первого заменой $x \to y$, $y \to -x$, т.е. поворотом системы координат x, y, ограничимся только учетом инварианта с константой D. Энергию анизотропии выберем в простейшей форме, характерной для ромбического магнетика $w_a = K(m_x^2 + m_y^2) + K' m_y^2$, $K, K' > 0$. При таком выборе констант ось z является легкой осью магнетика, ось y — наиболее трудной осью.

Обобщение на случай магнетика с осью симметрии C_n, $n > 2$ будет обсуждено ниже. Переходя к угловым переменным для вектора m (или l для антиферромагнетика):

$$m_z = \cos\theta, \quad m_x + im_y = \sin\theta \exp(i\varphi),$$

представим функционал энергии магнетика в следующем виде:

$$W = A \times$$

$$\times \int dxdy \left\{ (\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta(\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{\Delta_0^2}(1+\varepsilon\sin^2\varphi) + \frac{2\lambda}{\Delta_0}\left[\frac{\partial\theta}{\partial x}\sin\varphi - \frac{\partial\theta}{\partial y}\cos\varphi + \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\sin\varphi\right)\right]\right\}. \quad (3)$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon = K'/K$; $\lambda = D/2\sqrt{AK}$; $\Delta_0 = \sqrt{A/K}$. В полярных координатах r, χ выражение в квадратных скобках, описывающее инвариант типа (2), принимает вид

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}\sin\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial x}\cos\Phi + \sin\theta\cos\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\sin\Phi\right), \quad (4)$$

где $\Phi = \varphi - \chi$.

Строго говоря, для ромбического магнетика нужно писать различные обменные константы для $(\partial\mathbf{m}/\partial x)^2$ и $(\partial\mathbf{m}/\partial y)^2$, а также различные константы в инварианте (2) для членов с $\partial m_i/\partial x$ и $\partial m_i/\partial y$. Однако это не меняет результатов анализа (см. конец следующего раздела).

При $\varepsilon = 0$ энергия (3) с учетом (4) инвариантна относительно поворота намагниченности m и осей x, y в плоскости магнетика на один и тот же угол, то есть относительно преобразования $\varphi \to \varphi' = \varphi + C$, $\chi \to \chi' = \chi + C$. В силу этого обстоятельства для солитона можно выбрать простое цилиндрически-симметричное решение вида $\theta = \theta_0(r)$, $\varphi = \chi + \varphi_0$, $\varphi_0 = \text{const}$. Отсюда следует, что $(\nabla\varphi)^2 = 1/r^2$. Условие отсутствия сингулярности в нуле приводит к граничным условиям $\theta_0(r=0) = m\pi$ (m — целое число). Выбирая $m = 1$, мы естественным образом приходим к топологическому солитону с нетривиальным элементом гомотопической группы π_2 и топологическим зарядом $Q = \int \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 1$ [4,11]. В этом случае из (3), (4) легко определить причину стабилизации: первое слагаемое в (4) дает вклад в энергию солитона, равный

$$2\lambda \sin\varphi_0 \int (d\theta/dr) r\, dr \cong \lambda \sin\varphi_0 R,$$

где R — величина порядка радиуса солитона. При любом знаке λ эта величина может быть сделана отрицательной выбором значения $\varphi_0 = \pi/2$ или $\varphi_0 = -\pi/2$ (если в магнетике присутствует инвариант с D' из (2), то в формуле (4) меняется $\sin\Phi \to \cos\Phi$, и значения $\varphi_0 = 0, \pi$). Таким образом, в приведенной выше оценке для энергии солитона в простейшей модели (1) появляется дополнительное слагаемое

$$E_0(R) = A\xi_1 + KR^2\xi_2 - DR\xi_3,$$

$\xi_3 = \text{const}$. Следовательно, функция $E_0(R)$ имеет минимум при $R = R_0 \neq 0$, $R_0 = D\xi_3/2K\xi_2$, что свидетельствует о стабильности солитона относительно коллапса.

Конкретный вид функции $\theta_0(r)$ определяется уравнением в обыкновенных производных (оно выписано в [18,22]), которое может быть проинтегрировано численно. В силу этого анализ солитона в магнетике с $\varepsilon = 0$ не вызывает затруднений.

Для магнетиков с анизотропией в базисной плоскости, например для модели (3) с $\varepsilon \neq 0$, ситуация является значительно более сложной. По существу, только топологические свойства солитонов при $\varepsilon \neq 0$ не меняются по сравнению со случаем $\varepsilon = 0$. В частности, простое решение вида $\varphi = \chi + \varphi_0$, $\theta = \theta_0(r)$ отсутствует, и структура солитона определяется системой двух нелинейных уравнений в частных производных для функций $\theta(r, \chi)$, $\varphi(r, \chi)$. Общего метода поиска локализованных решений этих уравнений не существует. Еще более сложной является проблема устойчивости таких солитонов. Поэтому будем использовать сочетание качественных методов и прямого вариационного анализа.

3. Одномерные солитоны — доменные стенки

Как следует из общих свойств неодномерных солитонов [11], солитон предельно большого радиуса представляет собой область размером $R >> \sqrt{AK}$, в которой $\theta = \pi$ ($\mathbf{m} = -\mathbf{e}_z$), отделенную от остальной части магнетика с $\theta = 0$ ($\mathbf{m} = \mathbf{e}_z$) 180-градусной доменной стенкой (ДС). Анализ ДС оказывается принципиальным также и для реше-

ния вопросов об устойчивости однородного основного состояния и характере неоднородных состояний при $D \geq D'$. Поэтому до анализа неодномерных солитонов полезно исследовать свойства одномерных уединенных нелинейных решений — плоских ДС.

Будем считать, что в ДС намагниченность зависит только от одной координаты ξ ($\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha$), то есть $\theta(\xi)$, $\varphi(\xi)$. Варьируя энергию (3) по $\theta(\xi)$ и $\varphi(\xi)$, легко получить систему двух уравнений, описывающих ДС:

$$\theta'' - \sin\theta\cos\theta\left[(\varphi')^2 + \frac{1}{\Delta_0^2}(1 + \varepsilon\sin^2\varphi)\right] - \\ - 2\lambda\varphi'\sin^2\theta\cos(\varphi - \alpha) = 0 \ , \qquad (5)$$

$$(\varphi'\sin^2\theta)' - \frac{\varepsilon}{\Delta_0^2}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + \\ + 2\lambda\theta'\sin^2\theta\cos(\varphi - \alpha) = 0 \ , \qquad (6)$$

где штрихом обозначена производная по ξ.

Эта система уравнений имеет один первый интеграл Q,

$$Q = (\theta')^2 + \sin^2\theta(\varphi')^2 - \frac{1}{\Delta_0^2}\sin^2\theta\,(1 + \varepsilon\sin^2\varphi) \ . \qquad (7)$$

Дополнительный первый интеграл, необходимый для интегрируемости системы, нам построить не удалось. Поэтому даже в одномерном случае общее солитонное решение системы (5), (6) не удается построить. Однако обычно наиболее выгодной энергетически стенке отвечает решение типа $\theta = \theta(\xi)$, $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$. Ограничимся анализом таких решений.

Из (6) следует, что даже при $\varepsilon = 0$ для существования решения типа $\varphi = \text{const}$ необходимо выполнение условия $\varphi_0 - \alpha = \pm\pi/2$. Следовательно, для модели (3) возможно существование только блоховских стенок с вращением вектора $\mathbf{m}$ в плоскости стенки (для магнетика с инвариантом D' величина $\varphi_0 - \alpha = 0; \pi$, и возможны только неелевские стенки). Если же $\varepsilon \neq 0$, то не только разность $\varphi_0 - \alpha$, но само значение φ_0 фиксируется условием $\sin\varphi_0\cos\varphi_0 = 0$, то есть $\varphi_0 = (\pi/2)k$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Для стенок с любым k функция $\theta(\xi)$ описывается уравнением

$$\Delta^2(\varphi_0)\theta'' - \sin\theta\cos\theta = 0 \ , \\ \Delta(\varphi_0) = \Delta_0/\sqrt{1 + \varepsilon\sin^2\varphi_0} \ , \qquad (8)$$

решение которого хорошо известно [14–16]:

$$\cos\theta = \zeta_1\,\mathrm{th}\,[\xi/\Delta(\varphi_0)] \ , \\ \sin\theta = \zeta_2/\mathrm{ch}\,[\xi/\Delta(\varphi_0)] \ , \qquad (9)$$

где ζ_1 , $\zeta_2 = \pm1$. Энергии стенок легко вычислить, они зависят от величины φ_0 и от знака $\zeta = \zeta_1\zeta_2 = \pm1$ и определяются формулами

$$\sigma = 4\sqrt{AK(1 + \varepsilon)} - \zeta 2\pi D\cos\varphi_0 \ , \quad \varphi_0 = n\pi \ ; \\ \sigma = 4\sqrt{AK} - \zeta 2\pi D\sin\varphi_0 \ , \quad \varphi_0 = (2n + 1)\,\pi/2 \ . \qquad (10)$$

Кроме доменных стенок, уравнение (8) имеет и хорошо известные периодические решения, которые в данной задаче описывают спиральные структуры с неоднородным вращением $\mathbf{m}$ [17,18]. Формулы (8)–(10) могут быть получены из выражений работы [15], описывающих спиральную структуру ромбического магнетика предельным переходом $\kappa \to 1$, κ — модуль эллиптических функций. Энергия стенок для магнетика в чисто одноосной модели, когда $\varepsilon = 0$ и значение φ_0 или α может быть любым, приведена также в [17,18]. Из этих формул получается, что при $D^2 > 16(KA)/\pi^2$ энергия ДС становится отрицательной, в силу чего возникает состояние типа радиально-симметричного солитона (вихря $\theta = \theta_0(r)$) с отрицательной энергией. Поэтому авторы сделали вывод о существовании термодинамически стабильной гексагональной решетки вихрей.

Легко видеть, что при наличии сколь угодно малой анизотропии в базисной плоскости ситуация изменяется принципиально. Обсудим выражения (10) для энергии ДС в ромбическом магнетике. Знак ζ и значение φ_0 для каждой из стенок можно выбрать так, что член с D уменьшает энергию стенки. В отличие от чисто одноосной модели, энергии стенок с различными ориентациями, то есть с целыми и полуцелыми k, разные. Если $k = 2n$, то $\varphi_0 = n\pi$ и $\alpha = (2k + 1)\pi/2$. Следовательно, в стенке с четным k разворот $\mathbf{m}$ происходит в более выгодной плоскости zx, а $\theta = \theta(y)$. Ясно, что энергия такой стенки всегда меньше, чем ДС с $k = 2n + 1$, $\varphi_0 = (2n + 1)\pi/2$ и $\alpha = \pi k$, в которой $\theta = \theta(x)$, а $\mathbf{m}$ вращается в невыгодной плоскости, включающей трудную ось.

Необходимо отметить, что рассмотренная нами модель описывает ромбический магнетик только приближенно. На самом деле в энергии (3) для ромбического магнетика должно быть две различные константы неоднородного обмена, A_1 при $(\partial\mathbf{m}/\partial x)^2$ и A_2 при $(\partial\mathbf{m}/\partial y)^2$, и две различные константы D, D_1 при $\partial m_i/\partial x$ и D_2 при $\partial m_i/\partial y$. Однако эти обстоятельства могут быть легко учтены заме-

ной $A \to A(\alpha) = A_1 \cos^2\alpha + A_2 \sin^2\alpha$ и изменением условия $\varphi_0 - \alpha = \pi/2$ на $\varphi_0 - \bar{\alpha} = \pi/2$, где $\cos\bar{\alpha} = D_1 \cos\alpha / \sqrt{D_1^2 \cos^2\alpha + D_2^2 \sin^2\alpha}$. Вывод о существовании двух стенок с неравными энергиями, основной для дальнейшего анализа, остается в силе и при $A_1 \neq A_2$ и $D_1 \neq D_2$.

Таким образом, в ромбическом магнетике при $D > D_c = (4/\pi)\sqrt{AK}$ энергия выгодной стенки с разворотом m в более легкой плоскости zx становится отрицательной. Но при этом в конечном интервале значений D, $D_c < D < D_c\sqrt{1+\varepsilon}$ энергия второй стенки (невыгодной) остается положительной и энергия вихря положительна (это будет показано ниже более строго). Следовательно, однородное основное состояние становится энергетически невыгодным при $D \geq D_c$, но не относительно рождения решетки вихрей, а относительно появления системы плоскопараллельных стенок с $\theta = \theta(y)$. По существу, эта структура представляет собой спиральную структуру с $\kappa \leq 1$, рассмотренную в [15]. (Заметим, что однородное основное состояние в этой области параметров является устойчивым относительно малых возмущений.)

Вывод о предпочтительности плоскопараллельной структуры при учете анизотропии в базисной плоскости относится не только к ромбическим, но и к одноосным магнетикам. В них также имеет место разделение стенок на выгодные и невыгодные в зависимости от значения φ_0, для магнетиков с осью четвертого или третьего, шестого порядков выгодных ДС с различной ориентацией может быть две или три соответственно. В этих случаях также следует ожидать появления одномерных структур, составленных из стенок одного из типов. При $D > D_c\sqrt{1+\varepsilon}$ в одноосных или ромбических кристаллах в принципе можно представить себе существование неодномерной структуры, но, во-первых, она будет менее выгодной энергетически по сравнению с одномерной, во-вторых, ее симметрия будет полностью определяться симметрией кристалла, то есть будет обладать осью четвертого порядка для тетрагонального кристалла, третьего — для гексагонального и ромбического. Хотя подробное обсуждение неоднородных состояний не входит в нашу задачу, сделаем несколько замечаний о концепции смешанного состояния магнетиков, предложенной в работах [17–19].

На наш взгляд, проводя аналогию между сверхпроводниками II рода и магнетиками при $D > D_c$, авторы этих работ учли не все аспекты проблемы. У этих систем есть только одно сходство: энергия доменной стенки отрицательна. Но для формирования хорошо известной структуры смешанного состояния сверхпроводников II рода в виде гексагональной решетки вихрей выполнения условия $\sigma < 0$ не достаточно. Важную роль играют еще два фактора. Во-первых, в сверхпроводниках существует квантование потока, что вместе с условием непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции фиксирует плотность вихрей и препятствует их неограниченному дроблению. Это фундаментальное свойство для магнетиков отсутствует. Во-вторых, обычно размер вихря в сверхпроводнике мал по сравнению с расстоянием между вихрями. В этом случае слабые силы дипольного отталкивания формируют гексагональную вихревую решетку. Для магнетиков это условие также не выполняется, так как вихри малого радиуса заведомо имеют положительную энергию.

Возвращаясь к анализу магнетика в модели (3), сделаем вывод, что однородное состояние термодинамически стабильно при $D < D_c = (4/\pi)\sqrt{AK}$, при $D \to D_c$ обращается в нуль энергия одной из возможных доменных стенок. Анализ солитонных возбуждений на фоне однородного состояния имеет смысл проводить при $D < D_c$.

4. Солитонные решения

Топологические солитоны описываются двухмерными решениями уравнений Эйлера—Лагранжа функционала энергии (3):

$$\nabla^2\theta - \sin\theta\cos\theta\left[\frac{1}{\Delta_0^2}(1+\varepsilon\sin^2\varphi) + (\nabla\varphi)^2\right] + \frac{2\lambda}{\Delta_0}\sin^2\theta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\cos(\varphi-\chi) + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\chi}\sin(\varphi-\chi)\right] = 0,$$

$$\nabla(\sin^2\theta\,\nabla\varphi) - \frac{\varepsilon}{\Delta_0^2}\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - \frac{2\lambda}{\Delta_0}\sin^2\theta\left[\frac{\partial\theta}{\partial r}\cos(\varphi-\chi) + \frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\chi}\sin(\varphi-\chi)\right] = 0. \quad (11)$$

При $\varepsilon = 0$ эти уравнения имеют простое радиально-симметричное решение $\theta = \theta_0(r)$; $\varphi = \chi + \pi/2$. Свойства этого решения исследовались в [18,22]. Мы обсудим их в той мере, в которой они будут использоваться далее. Функция $\theta_0(r)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\theta_0}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\theta_0}{dr} - \sin\theta_0\cos\theta_0\left(\frac{1}{\Delta_0^2} + \frac{1}{r^2}\right) +$$

$$+\frac{2\lambda}{r}\sin^2\theta_0 = 0 \qquad (12)$$

(выписанному в [22]), с граничными условиями

$$\theta_0(r \to 0) \to \pi - Cr\ ,\quad \theta_0(r \to \infty) \to 0\ , \qquad (13)$$

где C — константа, которую можно определить путем численного решения уравнения (12). Умножая (12) на $r^2(d\theta/dr)$ и интегрируя от $r = 0$ до $r = \infty$ (этот прием использовался в ряде работ, см. [11]), можно получить соотношение [22]

$$\int \sin^2\theta\, r\, dr + 2\lambda\Delta_0 \int \sin^2\theta \frac{d\theta}{dr} r\, dr = 0\ . \qquad (14)$$

Это соотношение позволяет получить важные результаты, касающиеся свойств солитонов в предельных случаях. При малых λ ($\lambda << 1$) радиус солитона R мал, $R << \Delta_0$ (это легко получить, заметив, что в силу (14) значение $\theta' \sim \pi/R$ должно быть велико по сравнению с $\lambda\Delta_0$). В этом случае решение хорошо описывается формулой

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_0}{2} = \left(\frac{R}{\Delta_0}\right) K_1\left(\frac{r}{\Delta_0}\right)\ , \qquad (15)$$

которая правильно описывает поведение солитона при $r << \Delta_0$ ($\operatorname{tg}\theta/2 = R/r$, как в решении Белавина—Полякова), и при $r >> R$, когда $\theta << 1$ и можно пользоваться линеаризованной версией (12), совпадающей с уравнением Бесселя для $K_1(x)$ [11]. Из (14) и (15) следует формула, определяющая радиус солитона при $\lambda << 1$ [20,21]:

$$\frac{R}{\Delta_0}\ln\left(\frac{2\Delta_0}{e\gamma R}\right) = \lambda\ , \qquad (16)$$

где γ — Эйлерова постоянная; e — основание натуральных логарифмов.

С соответствии с этой формулой $R \to 0$ при $\lambda \to 0$, но величина $(dR/d\lambda)$ обращается в нуль при $\lambda \to 0$ (Эта логарифмическая зависимость отличается от зависимости $R \sim \lambda^{1,6}$, полученной в работе [22] численными методами. По-видимому, дело в сложности численного анализа солитонов малого радиуса, близких к сингулярным.) Энергия солитона в этом предельном случае близка к энергии солитона Белавина—Полякова $E_0 = 8\pi A$. Точнее, в главном логарифмическом приближении

$$E(\lambda) = E_0(1 - C\lambda^2)\ ,$$

где C — константа порядка единицы. Таким образом, производная $dE/d\lambda \to 0$ при $\lambda \to 0$.

В другом предельном случае солитона большого радиуса $R >> \Delta_0$ решение определяет «магнонную каплю» — область радиусом R, в которой $\theta \cong \pi$, отделенную от остальной части магнетика 180-градусной доменной стенкой, в стенке $\cos\theta \cong$ $\cong \operatorname{th}[(r - R)/\Delta_0]$. В этом случае (14) приводит к асимптотическому условию: $R \to \infty$ при $\lambda \to 2/\pi$. Этот результат ясен и описывает тот факт, что солитон неограниченно расширяется при $\lambda \to \lambda_c$, когда энергия стенки стремится к нулю.

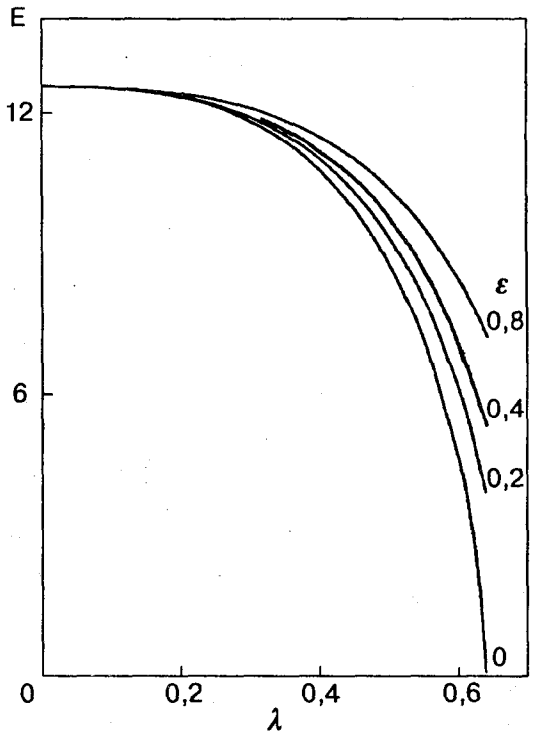

Рис. 1. Зависимости энергии солитона E от параметра λ при различных значениях параметра ε, определяющего анизотропию в базисной плоскости. Случай $\varepsilon = 0$, отвечающий радиально симметричному солитону, исследовался как на основе решения уравнения (12), так и с применением прямого вариационного метода. Солитоны в анизотропном случае, $\varepsilon \neq 0$, анализировались с применением вариационного подхода.

Эти качественные ответы хорошо согласуются с данными, полученными численным интегрированием в работах [18,22] и нами (мы использовали метод «стрельбы», подробно описанный в [11]). На рис. 1 приведена зависимость энергии солитона E от параметра λ (которая будет ниже использована для тестирования пробных функций). Решения существовали только при $\lambda < 2/\pi$, и никаких решений с отрицательной энергией обнаружено не было.

Таким образом, в изотропной модели солитоны существуют во всей области $\lambda < \lambda_c$, когда однородное основное состояние термодинамически стабильно. В этой области энергия солитона E положительна, но $E(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \lambda_c$.

Перейдем теперь к анализу анизотропного случая ($\varepsilon \neq 0$), когда структура солитона определяется системой уравнений в частных производных, для которых не существует общих методов построения самолокализованных решений. В этом случае

очень полезен прямой вариационный метод, для успешного применения которого решающим фактором является удачный выбор пробных функций. Поэтому прежде чем применять этот метод, рассмотрим предельные случаи. Можно достаточно полно проанализировать два случая: предельно малые ε при конечных значениях R/Δ_0, λ и случай солитона малого радиуса $R \ll \Delta_0$ при произвольной анизотропии ε.

В обоих случаях можно искать решение в виде

$$\theta = \theta_0(r) + \vartheta(r,\chi) \ , \quad \varphi = \chi + \pi/2 + \psi(r,\chi) \ , \quad (17)$$

считая, что $\theta_0(r)$ описывает решение для случая $\varepsilon = 0$, а ψ и ϑ малы. Действительно, при $\varepsilon \to 0$ есть точное решение $\theta = \theta_0(r)$, поэтому при $\varepsilon \ll 1$ функция ψ и ϑ пропорциональны ε. Если же ε не мало, но $R \ll \Delta_0$, то основной вклад в уравнения дают слагаемые с $1/r^2$ и $(\nabla\theta)^2$, а все остальные члены, определяющиеся энергией анизотропии, могут быть рассмотрены как малое возмущение.

Записывая систему уравнений (11) в линейном приближении по $\varepsilon\vartheta$, $\varepsilon\psi$ и вводя переменную $\mu = \psi \sin\theta_0$, получаем для определения ϑ и μ систему линейных неоднородных уравнений. Так как решения соответствующей задачи будут использованы только для выбора пробных функций, обсудим их конспективно.

Начнем с более простого случая $R \to 0$. При малом радиусе ($R \ll \Delta_0$) солитона в области $r \ll \Delta_0$ можно пользоваться решением Белавина—Полякова $\theta = \theta_0$, $\operatorname{tg}(\theta_0/2) = R/r$; $\varphi = \chi + \pi/2$. В этом случае система уравнений для определения ϑ и μ может быть представлена в виде

$$L_0\vartheta + 2\frac{\cos\theta_0}{r^2}\frac{\partial\mu}{\partial\chi} = -\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\Delta_0^{-2}\sin\theta_0\cos\theta_0 + \frac{2\lambda}{r^2}\sin^2\theta_0 - \frac{\varepsilon}{2\Delta_0^2}\sin\theta_0\cos\theta_0\cos 2\chi \ , \quad (18)$$

$$L_0\mu - 2\frac{\cos\theta_0}{r^2}\frac{\partial\vartheta}{\partial\chi} = \frac{\varepsilon}{2\Delta_0^2}\sin\theta_0\sin 2\chi \ , \quad (19)$$

где оператор L_0 определяется соотношением

$$L_0 = -\nabla^2 + \frac{1}{r^2}\cos 2\theta_0 \ .$$

Из структуры правых частей этих уравнений следует, что решение имеет вид

$$\vartheta = F + f\cos 2\chi \ , \ \mu = g\sin 2\chi \ , \quad (20)$$

функции F, f и g зависят только от r и определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Легко убедиться, что однородное уравнение для F имеет решение $F = F_0 \propto \sin\theta_0$. В этом случае разрешимость неоднородного уравнения является нетривиальной и включает условие ортогональности F_0 правой части (18). Анализ этого соотношения снова приводит нас к соотношению (16) для связи λ и радиуса солитона R. Следовательно, подход на основе (17), (18) согласуется с предыдущим анализом. Что касается поправок f и g, то их вычисление сводится к решению двух независимых неоднородных уравнений для $\Phi = f + g$, $\Psi = f - g$:

$$L_{(+)}\Phi = \left(\varepsilon/2\Delta_0^2\right)\sin\theta\,(1 - \cos\theta) \ ,$$

$$L_{(-)}\Psi = \left(\varepsilon/2\Delta_0^2\right)\sin\theta\,(1 + \cos\theta) \ ,$$

где обозначено

$$L_{(\pm)} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) + \frac{1}{r^2}(4 + \cos 2\theta \pm \cos\theta) \ .$$

Для уравнений $L_{(+)}\Phi_0 = 0$ и $L_{(-)}\Psi_0 = 0$ легко могут быть построены системы линейно независимых решений $\Phi_0^{(1,2)}$, $\Psi_0^{(1,2)}$:

$$\Phi_0^{(1)} = \sin^3(\theta/2)/\cos(\theta/2) \ ,$$

$$\Psi_0^{(1)} = \cos^3(\theta/2)/\sin(\theta/2) \ ,$$

$$\Phi_0^{(2)} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]/\sin\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\Psi_0^{(2)} = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[1 + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]/\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Легко видеть, что эти решения не являются локализованными, то есть содержат расходимость при $r \to 0$ ($\theta \to \pi$) или при $r \to \infty$ ($\theta \to 0$). Поэтому существуют ограниченные при $0 < r < \infty$ решения этих неоднородных уравнений, которые можно построить, используя метод вариации произвольной постоянной. Проще выглядит функция $\Phi(r)$, $\Phi = (\varepsilon R^2/8\Delta_0^2)\sin\theta_0$. Выражение для функции Ψ является более сложным, и мы его не приводим. Отметим только, что $\Psi \propto r^3$ при $r \to 0$, и поэтому учет Ψ не существен вблизи центра солитона. При его анализе на больших расстояниях от центра солитона надо использовать «исправленное» решение (15), что приводит к экспоненциально убывающей асимптотике.

Принимая во внимание только поправку, обусловленную Φ, получаем, что с точностью до R^2/Δ_0^2 решение можно искать в виде

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = T(r)[1 + C_1\cos 2\chi] \ , \quad (21)$$

$$\varphi = \chi + \pi/2 + C_2 \sin 2\chi \ ,$$

где $T(r)$ — некоторая функция; C_1 , C_2 не зависят от r. Для малых ε, но конечных R/Δ_0 столь же полный анализ не возможен, однако вывод о том, что поправки к $\operatorname{tg}(\theta/2)$ и φ пропорциональны $\cos 2\chi$ и $\sin 2\chi$ остается в силе. Поэтому можно ожидать, что выбор пробных функций в виде

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{R}{r}\exp\left(-\frac{r}{a}\right)(1 + C_1 \cos 2\chi) \ , \qquad (22)$$

$$\varphi = \chi + \pi/2 + C_2 \sin 2\chi \ ,$$

может дать хорошее приближение при анализе энергии солитона. Действительно, радиальная зависимость $\theta_0(r)$, которая определяется двумя пробными параметрами R и a обеспечивает описание предела Белавина—Полякова и экспоненциальное убывание $\theta_0(r)$ при $r > \Delta_0$. С другой стороны, угловые зависимости согласуются с (20). Минимизация энергии производилась численно по четырем пробным параметрам R, a, C_1 , C_2 .

Вначале для тестирования пробной функции был проведен анализ случая $\varepsilon = 0$. Программа минимизации выдавала значения параметров C_1 и C_2 , меньшие чем 10^{-6}, а функция $E(\lambda)$, описывающая зависимость энергии солитона от параметра анизотропии λ, во всей области в пределах точности вычислений (10^{-4}) не отличалась от зависимости, полученной непосредственным интегрированием уравнений для $\theta_0(r)$ методом стрельбы.

Далее производился анализ анизотропных моделей с $\varepsilon \neq 0$. Как и следовало ожидать, при малых λ величины энергий отличались мало, и при $\lambda \to 0$ для всех значений ε энергия солитона стремилась к величине $8\pi A$. При этом значения параметров анизотропии C_1 и C_2 оставались малыми при $\lambda \leq 0{,}5$. При увеличении λ радиус солитона возрастал, а его энергия убывала при всех значениях ε, причем при данном λ энергия солитона росла с ростом ε (см. рис. 1). Величины параметров анизотропии резко возрастали при приближении λ к критическому значению $2/\pi$, причем практически независимо от величины анизотропии в базисной плоскости. В случае $\varepsilon \neq 0$ энергия солитона оставалась конечной при $\lambda \to 2/\pi$. При $\lambda \geq 2/\pi$ счет становился нестабильным.

Такое поведение вполне согласуется с тем, которое следует из проведенного выше качественного анализа. Действительно, при $\lambda \to 2/\pi$, но $\lambda < 2/\pi$ в солитоне должно происходить резкое увеличение размера доменной стенки «выгодной» ориентации, энергия которой стремится к нулю при $\lambda \to 2/\pi$ (в отличие от случая $\varepsilon = 0$, для которого характерно изотропное «раздувание» солитона в этом пределе). Однако в анизотропном случае для солитона конечной площади обязательно присутствуют и «невыгодные» участки стенки, что приводит к конечному значению энергии солитона при стремлении параметра анизотропии λ к критическому значению $2/\pi$.

Для анализа устойчивости солитонов мы использовали этот же вариационный подход и исследовали характер экстремума, отвечающего солитонному решению. Оказалось, что найденным величинам параметров пробных функций всегда отвечает минимум энергии. Это означает также, что полученное статическое солитонное решение устойчиво по Ляпунову (см., например, [23]) в рамках динамических уравнений. Действительно, энергия магнетика обладает всеми свойствами функционала Ляпунова: она положительна вблизи солитонного решения, а ее производная по времени равна нулю или отрицательна в отсутствие или присутствии диссипации соответственно.

Заключение

Таким образом, анализ солитонов в реальных моделях магнетиков без центра инверсии показал, что роль анизотропии в базисной плоскости, присутствующей в этих моделях, не очень значительна в рассмотренном ранее [20,21] случае $\lambda \ll 1$. В этом случае, актуальном для анализа солитонной термодинамики квазидвухмерных магнетиков (например, рассмотренной в [21] купратной плоскости YBaCuO в антиферромагнитной фазе), существуют стабильные солитоны малого радиуса со слабо выраженной анизотропией их структуры. С другой стороны, этот анализ продемонстрировал принципиальную важность учета анизотропии в базисной плоскости при немалых значениях λ, важных для исследования термодинамически устойчивых неоднородных состояний магнетиков. Даже при сколь угодно малом значении параметра ε, описывающего эту анизотропию, при $\lambda \to 2/\pi$ она приводит к «вытягиванию» солитона в полосовой домен, который имеет смысл зародыша неоднородной фазы, представляющей собой спиральную структуру.

Авторы признательны В. Г. Барьяхтару, А. Н. Богданову и А. Хуберту за полезные обсуждения. Работа поддержана грантами UB 7200 Международного научного фонда (ISF) и 2.3/193 Государственного комитета Украины по вопросам науки и технологий. Один из авторов (Б. И.) благодарит за поддержку Международную соросовскую программу поддержки образования в области точных наук (фонд «Возрождение»), грант SP 042025.

1. Ю. А. Изюмов, *УФН* **155**, 553 (1988).
2. H.-J. Mikeska and M. Steiner, *Adv. Phys.* **40**, 191 (1991).

3. V. G. Bar'yakhtar and B. A. Ivanov, *Soviet Scientific Review. Sec. A - Phys.*, I. M. Khalatnikov (ed.), Vol. 16, 3 (1992).
4. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, *ФНТ* **21**, 355 (1995).
5. В. Л. Березинский, *ЖЭТФ* **61**, 1144 (1971).
6. J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys.* C6, 1181 (1973).
7. F. Waldner, *J. Magn. Magn. Mater.* 31–34, 1203 (1983); *ibid.* **54–57**, 873 (1983).
8. Б. А. Иванов, А. К. Колежук, *ФНТ* 16, 335 (1990).
9. А. К. Колежук, Д. В. Филин, *ФНТ* 20, 1267 (1994).
10. R. Hobart, *Proc. Phys. Soc.* 82, 201 (1963); G. M. Derrick, *J. Math. Phys.* 5, 1252 (1964).
11. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 117 (1990).
12. T. H. R. Skirme, *Proc. Roy. Soc.* A260, 127 (1961).
13. U. Enz, *J. Math. Phys.* 19, 1304 (1978).
14. И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* 46, 1420 (1964); *там же* 47, 336 (1964).
15. И. Е. Дзялошинский, *ЖЭТФ* 47, 992 (1964).
16. В. Г. Барьяхтар, Е. П. Стефановский, *ФТТ* 11, 1946 (1969).
17. А. Н. Богданов, Д. А. Яблонский, *ЖЭТФ* 95, 178 (1989); *там же* 96, 253 (1989).
18. А. Н. Богданов, М. В. Кудинов, Д. А. Яблонский, *ФТТ* 31, 99 (1989).
19. A. N. Bogdanov and A. Hubert, *J. Magn. Magn. Mater.* 183, 3 (1994).
20. B. A. Ivanov, V. A. Stephanovich, and A. A. Zhmudskii, *J. Magn. Magn. Mater.* 88, 116 (1990).
21. В. Г. Барьяхтар, Б. И. Иванов, *Письма в ЖЭТФ* 55, 597 (1992).
22. A. N. Bogdanov and A. Hubert, *Phys. Status Solidi* **186**, 2 (1994).
23. Д. В. Меркин, *Введение в теорию устойчивости движения*, Наука, Москва (1971).

On stable two-dimensional solitons and non-uniform states in magnets without inversion centre

A. A. Zhmudskii and B. A. Ivanov

The two-dimensional localized magnetic solitons are considered in the magnets, having no inversion centre, with a due regard of the anisotropy in the basal plane. It is shown that static solitons in the magnets of the above type are stable with respect to the Lyapunov criterion. The stabilization mechanism of soliton is defined by the invariants present in the magnetic energy and linear with respect to gradients. The properties of the solitons vary when even the infinitesimal anisotropy in the basal plane is taken into account. In the models of uniaxial magnets considered earlier, the soliton energy may be as small as one likes but at the finite anisotropy of such type it has the finite value over a whole range of the thermodynamic stability of homogeneous basic state. Even negligible anisotropy in the basal plane causes a significant variation in the structure of soliton of rather great radius.