Физика низких температур, 1996, т. 22, № 3, с. 247–251 УДК 538.94

Критерий устойчивости однородной прецессии половинной и удвоенной намагниченности в ^{3}He-B

Г. Е. Вачнадзе, Н. Г. Сурамлишвили

Институт физики Академии наук Грузии, Республика Грузия, 380077, г. Тбилиси, ул. Тамарашвили, 6

Статья поступила в редакцию 10 октября 1995 г.

В сильном магнитном поле установлен критерий устойчивости однородной прецессии удвоенной и половинной намагниченности относительно длинноволновых флуктуаций в сверхтекучем ^{3}He-B. Исследовано влияние противотоков сверхтекучей и нормальной компонент на устойчивость прецессионных состояний.

В сильному магнітному полі встановлено критерій стійкості однорідної прецесії подвоєної і половинної намагніченості відносно довгохвильових флуктуацій в надплинному ^{3}He-B. Досліджено вплив протиструмів надплинної і нормальної компонент на стійкість прецесійних станів.

Когерентное спин-орбитальное (диполь-дипольное) взаимодействие оказывает существенное влияние на свойства упорядоченных сверхтекучих фаз жидкого ^{3}He-B. В отсутствие диполь-дипольных эффектов спиновая динамика системы в статическом магнитном поле сводится к прецессии намагниченности с ларморовой частотой вокруг направления этого поля. Спин-орбитальное взаимодействие приводит к установлению когерентной «жесткости» между спиновыми и орбитальными степенями свободы конденсата, под влиянием которой формируется равновесная спин-орбитальная конфигурация ^{3}He-A и ^{3}He-B. При отклонении спиновых степеней свободы от равновесной конфигурации когерентная жесткость проявляется в виде дополнительного вращательного момента, действующего на магнитный момент жидкого ^{3}He и влияющего на спектр частот ЯМР сверхтекучих фаз. Характер спектра ЯМР зависит от равновесной спин-орбитальной конфигурации, вблизи которой происходят осцилляции спиновых степеней свободы.

Когерентные прецессионные состояния в ^{3}He-B с удвоенным и половинным значениями намагниченности осуществляются при особой спин-орбитальной конфигурации [1]. Возникает вопрос об устойчивости однородной прецессии относительно длинноволновых флуктуаций. В работе [2] эта проблема рассмотрена для ^{3}He-A. В настоящей работе исследуются прецессионные состояния с удвоенным и половинным значениями намагниченности в ^{3}He-B.

Как известно, поведение намагниченности в сверхтекучем ^{3}He в магнитном поле $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$ описывается гамильтонианом

$$\hat{H} = (M^2/2) - M_z H + F_D + F_\nabla . \qquad (1)$$

(Здесь и далее используется система единиц, в которой $\chi_B = g = 1$, где χ_B и g — магнитная восприимчивость B-фазы и гиромагнитное отношение для магнитных моментов ядер ^{3}He соответственно. В такой системе единиц намагниченность и магнитное поле имеют размерность частоты.)

Градиентную энергию определим в виде

$$F_\nabla = \frac{1}{4} c_\parallel^2 \left(\nabla_i R_{\alpha k}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(c_\parallel^2 - c_\perp^2\right)\left(\nabla_i R_{\alpha i}\right)^2 , \qquad (2)$$

где $c_\perp$ и $c_\parallel$ — скорости поперечных и продольных спиновых волн соответственно. Дипольную энергию в B-фазе запишем как

$$F_D = \frac{2}{15}\Omega_L^2 \left(\mathrm{Sp}\,\hat{R} - 1/2\right)^2 . \qquad (3)$$

Здесь Ω_L — частота линейного продольного резонанса, характеризующая диполь-дипольное взаимодействие между магнитными моментами ядер ^{3}He, а $\hat{R}$ — ортогональная матрица, являющаяся параметром порядка прецессирующего состояния. Она описывает относительные вращения спинового и орбитального пространств [1]:

$$\hat{R} = \hat{R}^{(s)}\,\hat{R}^{(L)^{-1}} , \qquad (4)$$

где $\hat{R}^{(s)}$ и $\hat{R}^{(L)}$ — матрицы трехмерных вращений спинового и орбитального пространств соответственно. Параметризуем эти матрицы с помощью углов Эйлера $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ и $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ и выразим F_D и F_∇ через эти углы. В качестве независимых переменных выберем углы α_1 и γ_1 и канонически

© Г. Е. Вачнадзе, Н. Г. Сурамлишвили, 1996

сопряженные им моменты M_z и M. Обращаясь к (1), приходим к следующей системе уравнений Гамильтона, описывающей спиновую динамику ^{3}He-B:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -H + (\partial F_D/\partial M_z) - \nabla(\partial F_\nabla/\partial\nabla M_z)\,,\\ \dot{\gamma} &= M + (\partial F_D/\partial M) - \nabla(\partial F_\nabla/\partial\nabla M)\,,\\ \dot{M}_z &= \nabla(\partial F_\nabla/\partial\nabla\alpha_1)\,,\\ \dot{M} &= -(\partial F_D/\partial\gamma) + \nabla(\partial F_\nabla/\partial\nabla\gamma)\,.\end{aligned} \tag{5}$$

В случае сильных магнитных полей ($H >> \Omega_L$) из уравнений (5) следует, что угловые переменные α_1 и γ_1 являются «быстрыми» ($\dot{\alpha}_1 \sim H, \dot{\gamma}_1 \sim M$), в то время как скорости изменения M_z и M малы ($\dot{M}_z, \dot{M} \sim \Omega_L^2$), т.е. они являются «медленными».

В состоянии половинной намагниченности ($M = H/2$) медленной является комбинация $\Phi = \alpha_1 + 2\gamma_1$, а в состоянии удвоенной намагниченности ($M = 2H$) — комбинация $\Phi = 2\alpha_1 + \gamma_1$. Усреднив дипольную энергию по быстрым переменным, для обоих случаев получим [1]

$$\widetilde{F}_D = \frac{1}{10}\Omega_L^2\Big[1 + (1 - l_z^2)(1 - s_z^2) + 2l_z^2 s_z^2 + \frac{2}{3}(1 - l_z^2)^{1/2}(1 + l_z)(1 - s_z^2)^{1/2}(1 + s_z)\cos\Phi\Big]\,, \tag{6}$$

где $s_z = \cos\beta_1$, $l_z = \cos\beta_2$.

Аналогично, усреднив градиентную энергию для половинного спинового состояния, в изотропном случае ($c_\perp = c_\parallel = c$) получаем

$$\widetilde{F}_\nabla = \frac{c^2}{2}\Big[\Big(\frac{5}{4} - \cos\beta_1\Big)(\nabla\alpha_1)^2 + (\nabla\beta_1)^2 + \frac{1}{4}(\nabla\Phi)^2 - \Big(\frac{1}{2} - \cos\beta_1\Big)\nabla\alpha_1\,\nabla\Phi\Big]\,. \tag{7}$$

Дальнейшие вычисления проведем для половинного значения намагниченности, а для удвоенного приведем лишь конечные результаты.

Переходя с помощью канонических преобразований от переменных α_1 и γ_1 к переменным α_1 и Φ, усредненный гамильтониан задачи запишем в виде

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}\big(M - H/2\big)^2 - HP + \widetilde{F}_D + \widetilde{F}_\nabla\,, \tag{8}$$

где

$$P = M_z - M/2\,.$$

В этих переменных система уравнений Гамильтона имеет вид

$$\dot{\alpha}_1 = -H + (\partial\widetilde{F}_D/\partial P) - \nabla(\partial\widetilde{F}_\nabla/\partial\nabla P)\,, \tag{9а}$$

$$\dot{\Phi} = 2\Big(M - \frac{H}{2}\Big) + 2\Big(\frac{\partial\widetilde{F}_D}{\partial M}\Big) - 2\nabla\Big(\frac{\partial\widetilde{F}_\nabla}{\partial\nabla M}\Big)\,, \tag{9б}$$

$$\dot{P} = -\nabla(\partial\widetilde{F}_\nabla/\partial\nabla\alpha_1)\,, \tag{9в}$$

$$\dot{M} = -2(\partial\widetilde{F}_D/\partial\Phi) - 2\nabla(\partial\widetilde{F}_\nabla/\partial\nabla\Phi)\,. \tag{9г}$$

В однородном случае, когда $\widetilde{F}_\nabla = 0$, система (9) описывает однородную прецессию спина с частотой, сдвинутой от ларморовой ($\omega_L = H$) на $\delta\omega_\perp = (\partial\widetilde{F}_D/\partial P)$, и малые колебания «медленной» фазы Φ около стационарной точки $\Phi_{st} = \pi$ с квадратом частоты продольного резонанса $\Omega_\parallel^2 = 4(\partial^2\widetilde{F}_D/\partial\Phi^2)$ (для удвоенной намагниченности $\Omega_\parallel'^2 = (\partial^2\widetilde{F}_D/\partial\Phi^2)$). Стационарная точка соответствует минимуму $\widetilde{F}_D$ по переменной Φ.

Теперь рассмотрим неоднородный случай. Учитывая, что $\cos\beta_1 = s_z = M_z/M = 1/2 - P/M$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widetilde{F}_\nabla}{\partial\nabla P} &= \frac{c^2}{M^2\sin^2\beta_1}\Big[\nabla P + \Big(\frac{1}{2} - \cos\beta_1\Big)\nabla M\Big]\,,\\ \frac{\partial\widetilde{F}_\nabla}{\partial\nabla M} &= \Big(\frac{1}{2} - \cos\beta_1\Big)\frac{\partial\widetilde{F}_\nabla}{\partial\nabla P}\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Применяя уравнения (10), приходим к следующим выражениям для $\dot{\alpha}_1$ и $\dot{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= -H + (\partial\widetilde{F}_D/\partial P) - \frac{c^2}{M^2\sin^2\beta_1}\Big[\Delta P + \Big(\frac{1}{2} - \cos\beta_1\Big)\Delta M\Big]\,,\\ \dot{\Phi} &= 2\Big(M - \frac{H}{2}\Big) + 2\Big(\frac{1}{2} - \cos\beta_1\Big)\big(\dot{\alpha}_1 + H\big)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Используя эти результаты, легко убедиться, что M и P являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{M} - c^2\Delta M + 2(\partial\dot{\widetilde{F}}_D/\partial\Phi) &= 0\,,\\ \ddot{P} + c^2\Big(\frac{1}{2} - \cos\beta_1\Big)\Delta M - c^2\sin\beta_1\Delta\dot{\alpha}_1 &= 0\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Запишем $\dot{\alpha}_1$ в виде $\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_1^0 + \delta\dot{\alpha}_1$, где однородной прецессии намагниченности соответствует $\dot{\alpha}_1^0 = -H + \delta\omega_\perp$, а флуктуации описывает

$$\delta\dot{\alpha}_1 = \Big(\frac{\partial^2\widetilde{F}_D}{\partial P\,\partial M}\Big)\delta M + \Big(\frac{\partial^2\widetilde{F}_D}{\partial P^2}\Big)\delta P -$$

$$-\frac{c^2}{M^2\sin^2\beta_1}\left[\Delta P+\left(\frac{1}{2}-\cos\beta_1\right)\Delta M\right]. \quad (13)$$

Поскольку $\delta\Phi = 2\delta M + 2(1/2 - \cos\beta_1)\delta\alpha_1$, системе уравнений (12) можно придать следующую форму:

$$\delta\ddot{M}+\left(\Omega_{\parallel}^2-c^2\Delta\right)\delta M+\left(\frac{1}{2}-\cos\beta_1\right)\Omega_{\parallel}^2\delta\alpha_1=0\,, \quad (14)$$

$$\delta\ddot{P}+\left(\frac{1}{2}-\cos\beta_1\right)c^2\Delta\delta M-c^2\sin\beta_1\Delta\delta\alpha_1=0\,.$$

С учетом уравнения (13), в главном приближении по Ω_L^2/H^2 система (14) может быть записана как

$$\delta\ddot{M}+\left(\Omega_{\parallel}^2-c^2\right)\delta M-\left(\frac{1}{2}-\cos\beta_1\right)\Omega_{\parallel}^2\hat{\varepsilon}\delta P=0\,, \quad (15)$$

$$\delta\ddot{P}-c^2\sin^2\beta_1\,\hat{\varepsilon}\Delta\delta P+c^2\left(\frac{1}{2}-\cos\beta_1\right)\Delta\delta M=0\,,$$

где оператор

$$\hat{\varepsilon}=\partial^2\widetilde{F}_D/\partial P^2-\frac{c^2}{M^2\sin^2\beta_1}\Delta\,. \quad (16)$$

Будем искать решение системы (15) в виде плоской волны с частотой ω и волновым вектором k. В результате получим дисперсионное уравнение

$$\left(\omega^2-\Omega_{\parallel}^2-c^2k^2\right)\left(\omega^2-c^2k^2\varepsilon\sin^2\beta_1\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}-\cos\beta_1\right)^2\Omega_{\parallel}^2\varepsilon c^2k^2=0\,, \quad (17)$$

где ε — малый параметр порядка Ω_L^2/H^2

$$\varepsilon=\partial^2\widetilde{F}_D/\partial P^2+\frac{c^2k^2}{M^2\sin^2\beta_1}\,.$$

Учитывая, что $\partial^2\widetilde{F}_D/\partial P^2 = (1/M^2)(\partial^2\widetilde{F}_D/\partial s_z^2)$ и $M = H/2$, получаем

$$\varepsilon=\frac{4}{H^2}\left(\partial^2\widetilde{F}_D/\partial s_z^2+\frac{c^2k^2}{\sin^2\beta_1}\right). \quad (18)$$

Уравнение (17) описывает две спин-волновые моды в ^{3}He-*B*. Первая из них соответствует продольным колебаниям с частотой

$$\omega_{\parallel}^2=\Omega_{\parallel}^2+c^2k^2\,. \quad (19)$$

Вторая ветвь соответствует поперечным спин-волновым возбуждениям с частотой

$$\omega^2(k)=\sin^2\beta_1\,\varepsilon(k)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{4}\frac{(1-2\cos\beta_1)^2}{\sin^2\beta_1}\frac{\Omega_{\parallel}^2}{\omega_{\parallel}^2}\right)c^2k^2\,. \quad (20)$$

Ясно, что однородная прецессия устойчива, когда $\omega^2(k)$ положительно, т.е. $\varepsilon(k) > 0$. В случае длинноволновых флуктуаций ($k \to 0$) критерий устойчивости однородной прецессии намагниченности сводится к условию

$$\partial^2\widetilde{F}_D/\partial s_z^2\geq 0\,. \quad (21)$$

Условие (21) при использовании формулы (6) примет следующий вид:

$$\left(1-3l_z^2\right)-\frac{1}{3}\left(1-l_z^2\right)^{1/2}\left(1+l_z^2\right)\times$$

$$\times\left(\frac{3s_z^2}{(1-s_z^2)^{1/2}}+\frac{1}{1-s_z^2}+\frac{s_z^3}{(1-s_z^2)^{3/2}}\right)\leq 0\,. \quad (22)$$

На рис. 1 показана область неустойчивости однородной прецессии в плоскости (s_z, l_z).

В случае удвоенной намагниченности дисперсионное уравнение относительно ω^2 вновь имеет два решения. Одно из них соответствует продольным спин-волновым колебаниям с частотой

$$\omega_{\parallel}'^2=\Omega_{\parallel}'^2+c^2k^2\,,$$

а второе — поперечным спин-волновым колебаниям с частотой

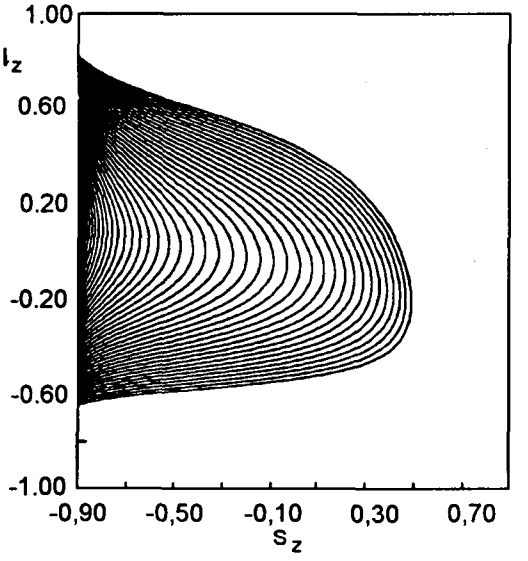

Рис. 1. Область неустойчивости однородной прецессии на (s_z, l_z) плоскости.

$$\omega'^2(k) = \sin^2\beta_1\,\varepsilon'(k) \times$$

$$\times\left(1 + \frac{4(1 - 1/2\cos\beta_1)^2}{\sin^2\beta_1}\frac{\Omega_{\|}^2}{\omega_{\|}'^2}\right), \qquad (23)$$

где

$$\varepsilon'(k) = \frac{1}{4H^2}\left(\partial^2\widetilde{F}_D/\partial s_z^2 + \frac{c^2k^2}{\sin^2\beta_1}\right). \qquad (24)$$

Таким образом, и в этом случае критерий устойчивости прецессии по отношению длинноволновых флуктуаций сводится к условиям (21) и (22).

Для краткости вычисления проводились для изотропного случая, когда $c_{\|} = c_{\perp}$. Но и для анизотропного случая, когда $c_{\|} \neq c_{\perp}$, критерий однородной прецессии намагниченности относительно длинноволновых флуктуаций не изменяется и выражается условием (22).

Теперь выясним, каково влияние противотоков сверхтекучей и нормальной компонент ^{3}He-B на устойчивость однородной прецессии намагниченности относительно длинноволновых флуктуаций. Энергия противотоков, в единицах $(2/15)\Omega_L^2$, когда $\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n \perp \mathbf{z}$, определяется формулой [3]

$$F_c = ul_z^2, \qquad (25)$$

где

$$u = \frac{15\,\rho_a(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2}{4\Omega_L^2}.$$

Здесь $\mathbf{v}_s$ и $\mathbf{v}_n$ — скорости сверхтекучей и нормальной компонент ^{3}He соответственно, а ρ_a — анизотропная составляющая тензора плотности сверхтекучей компоненты.

Наряду с дипольным взаимодействием энергия противотоков влияет на формирование спин-орбитальной конфигурации системы. В то же время можно убедиться, что добавление (25) к полному усредненному гамильтониану (8) не меняет систему уравнений Гамильтона (9). Таким образом, критерий устойчивости однородной прецессии и при наличии противотоков будет выражаться условием (21).

Равновесные состояния прецессирующей системы будут определяться минимизацией полной свободной энергии

$$F = \widetilde{F}_D + ul_z^2. \qquad (26)$$

Если состояние системы не соответствует минимуму выражения (26), но находится в области устойчивости прецессии (рис. 2), то оно будет медленно релаксировать. Важно, чтобы во время этого процесса система не оказалась в области неустойчивости. В противном случае однородно прецессирующее состояние может быть разрушено воздействием длинноволновых флуктуаций.

Выясним, находятся ли равновесные состояния в области устойчивости. В отсутствие противотоков они определяются минимизацией усредненной дипольной энергии $\widetilde{F}_D$. В этом случае осуществляются два вырожденных состояния

$$s_z = 0{,}75\,, \quad l_z = 0{,}3\,, \qquad (27a)$$

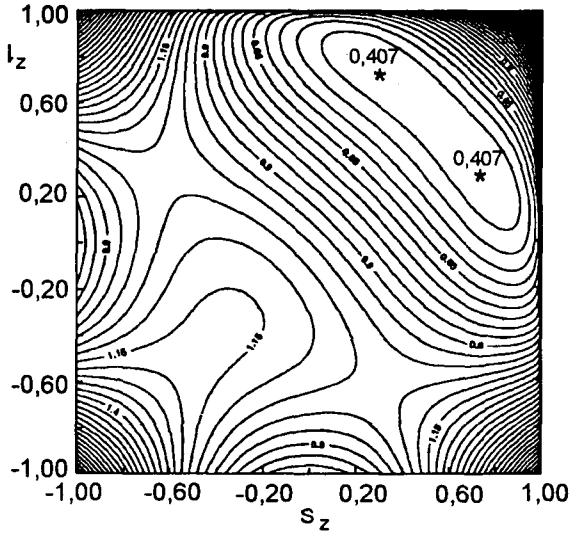

Рис. 2. Топографический профиль усредненной дипольной энергии (выражение (6), $\Phi_{st} = \pi$); * — вырожденные состояния (27а) и (27б).

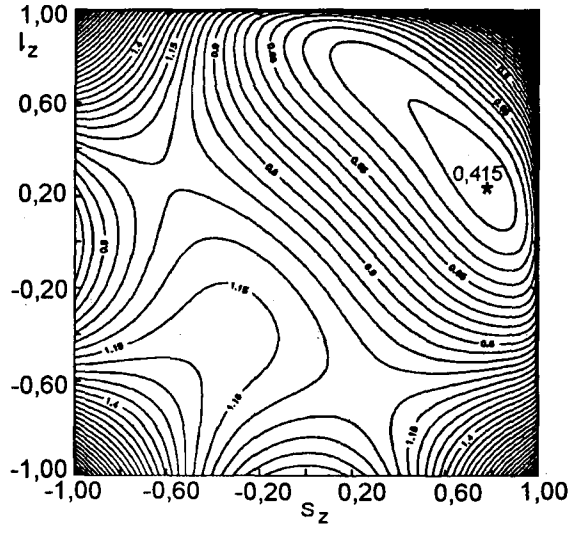

Рис. 3. Топографический профиль полной свободной энергии (выражение (26), $\Phi_{st} = \pi$) для $u = 0{,}1$; * — равновесное состояние ($s_z = 0{,}78$, $l_z = 0{,}24$).

$$s_z = 0{,}3\,, \quad l_z = 0{,}75\,. \qquad (27б)$$

Сравнивая топографический профиль, описываемый выражением (6) (рис. 2), с областью неустойчивой однородной прецессии (рис. 1), можно убедиться, что состояния (27) находятся в области устойчивости прецессии.

При наличии противотоков вырождение снимается, а спин-орбитальные конфигурации, соответствующие минимумам полной свободной энергии, смещаются относительно состояния (27а). Как показали вычисления на ЭВМ, по мере возрастания u абсолютный минимум выражения (26) все больше удаляется от области неустойчивости прецессии (рис. 3) и [4, рис. 5, 6].

Таким образом, область устойчивости однородной прецессии удвоенной и половинной намагниченности относительно длинноволновых флуктуаций определяется видом усредненного диполь-дипольного потенциала. Следует отметить, что критерий (21) не применим для состояний в непосредственной близости $s_z = 1$ и $s_z = -1$.

Авторы выражают благодарность Г. А. Харадзе за обсуждение результатов.

1. G. Kharadze and G. Vachnadze, *Письма в ЖЭТФ* 56, 474 (1992).
2. И. А. Фомин, *Письма в ЖЭТФ* 30, 179 (1979); Г. Е. Гургенивили, Г. А. Харадзе, *Письма в ЖЭТФ* 42, 374 (1985).
3. J. S. Korhonen and G. E. Volovik, *Письма в ЖЭТФ* 55, 358 (1992).
4. G. Kharadze and G. Vachnadze, *ЖЭТФ* 106, 479 (1994).

Criterion of stability of uniform precession of the half and double magnetization in ^{3}He-B

G. E. Vachnadze and N. G. Suramlishvili

The criterion of stability is determined of uniform precession of the half and double magnetization in the strong magnetic field in superfluid ^{3}He-B with respect to the long-wave fluctuations. The influence of counterflows of the superfluid and normal components on the stability of precession is investigated.