Физика низких температур, 1996, т. 22, № 9, с. 1100–1102

Краткие сообщения

Гелий во вращающихся кольцах: равновесное распределение большого числа вихрей

Т. И. Зуева

Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина НАН Украины, Украина, 310164, г. Харьков, пр. Ленина, 47
E-mail:zueva@ilt.kharkov.ua

Статья поступила в редакцию 22 марта 1996 г., после переработки 2 апреля 1996 г.

Рассматривается течение гелия II между концентрическими цилиндрами, вращающимися с одинаковой угловой скоростью. Записано приближенное уравнение, определяющее равновесное положение вихрей в случае, когда число вихрей велико. Это соотношение связывает угловую скорость, число вихрей и число квантов циркуляции вокруг внутреннего цилиндра и является обобщением подобного выражения для узких колец. Рассмотрено условие устойчивости и обсуждены ограничения, налагаемые предположением о расположении вихрей на одной окружности. Предложен путь дальнейших исследований вихрей в кольцах: рассматривать расположение вихрей на двух и более окружностях.

Розглянуто течію гелія II між концентричними циліндрами, які обертаються з однаковою кутовою швидкістю. Записано наближене рівняння, що визначає рівноважне положення вихорів у випадку, коли число вихорів велике. Це співвідношення пов'язує кутову швидкість, число вихорів та число квантів циркуляції навколо внутрішнього циліндра і є узагальненням подібного вираження для вузьких кілець. Розглянуто умову стійкості і обмірковано обмеження, що накладають припущення про розташування вихорів на одному колі. Запропоновано шлях подальших досліджень вихорів у кільцях: розглядати розташування вихорів на двох та більше колах.

Для изучения равновесных состояний вращающегося сверхтекучего гелия необходимо знать свободную энергию системы, условие экстремума свободной энергии, из которого определяется равновесное положение вихревой цепочки r_0 (радиус окружности, на которой располагаются вихри), а также условие устойчивости этого равновесного положения, выражающееся в положительности второй вариации свободной энергии. Эти соотношения для вращающейся сверхтекучей жидкости в кольцах произвольных размеров (R_1, R_2) были получены ранее [1] в терминах ζ- и σ-функций Вейерштрасса.

Условие равновесия N-го вихря интенсивности γ (мерой интенсивности является циркуляция вокруг вихревой нити $\oint \mathbf{v}d\mathbf{l} = 2\pi\gamma$) при наличии L квантов циркуляции в кольце, вращающемся с угловой скоростью ω, может быть записано в виде уравнения

$$\frac{\omega}{\gamma} r_0 = \frac{N+L}{r_0} - \frac{1}{2r_0} - \frac{2N\eta}{\pi r_0}\ln\frac{r_0}{R_1} + \frac{1}{r_0}\mathrm{Im}\,\zeta\left(2i\ln\frac{r_0}{R_1}\right). \tag{1}$$

Здесь $\omega_1 = \pi/N$ и $\omega_2 = i\ln(R_2/R_1)$ — полупериоды ζ-функций, $\eta = \zeta(\omega_1)$. Уравнение (1) означает, что в равновесии вихри вращаются вместе с нормальной компонентой. Условие устойчивости $(N+1)$-го вихря представляется как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r_0^2} = 2\pi\gamma^2\rho_s(N+1)\left\{\frac{N+1+L}{r_0^2} - \frac{1}{2r_0^2} + \frac{2(N+1)\eta}{\pi r_0^2}\left(1 - \ln\frac{r_0}{R_1}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r_0^2}\left[\mathrm{Im}\,\zeta\left(2i\ln\frac{r_0}{R_1}\right) + 2\mathrm{Re}\,P\left(2i\ln\frac{r_0}{R_1}\right)\right]\right\} \geq 0\,. \tag{2}$$

Здесь $P(z)$ — P-функция Вейерштрасса, связанная с ζ-функцией соотношением $\zeta'(z) = -P(z)$ [2]; ρ_s — плотность сверхтекучей компоненты.

При решении уравнения (1) угловая скорость ω/γ определялась из условия $F_{N+1,\,L} \le F_{N,\,L}$, где $F_{N+1,\,L}$ — свободная энергия состояния с $(N+1)$ вихрем и L квантами циркуляции [1]; $F_{N,\,L}$ считалась известной функцией положения вихревой цепочки $\tilde{r}_0$, найденного для N вихрей и L квантов циркуляции на предыдущем шаге.

Получим и исследуем приближенные выражения этих основных соотношений в предположении, что число вихрей N велико. Для этого запишем эллиптические функции Вейерштрасса в виде рядов [2] и вычислим первые члены разложения при соответствующих значениях аргументов.

Уравнение (1) при больших N с точностью до членов второго порядка по параметрам $\varepsilon_1 = (R_1/r_0)^{N+1}$ и $\varepsilon_2 = (r_0/R_2)^{N+1}$ принимает вид

$$\frac{\omega}{\gamma} r_0^2 = L + \frac{N}{2} - (N+1)\left[\left(\frac{R_1}{r_0}\right)^{2N+2} - \left(\frac{r_0}{R_2}\right)^{2N+2}\right]. \qquad (3)$$

Заметим, что, когда параметры $(R_1/r_0)^{2N} \ll 1$ и $(r_0/R_2)^{2N} \ll 1$, т.е. вихрей достаточно много, члены $(R_1/r_0)^{2N+2}$ и $(r_0/R_2)^{2N+2}$ при больших N убывают намного быстрее, чем растет $N+1$ (а тем более быстро убывают отброшенные члены четвертого порядка). Это означает, что число вихрей в жидкости и циркуляция вокруг внутреннего цилиндра связаны с угловой скоростью вращения сосуда простым соотношением

$$\frac{\omega}{\gamma} r_0^2 = L + \frac{N}{2}. \qquad (4)$$

Это выражение не совпадает с аналогичным соотношением для узких колец, использованным при определении угловой скорости, при которой в кольце появляется первый вихрь [1,3]. Хотя формально при больших L и $N = 1$ соотношение (4) можно записать как $(\omega/\gamma)\, r_0^2 = L$, в узких кольцах при малых N следует либо учитывать все оставшиеся члены, либо «переворачивать» полупериоды, чтобы отброшенные члены стали малыми (что и было сделано для узких колец). Соотношение (4) более универсально и легко применимо.

Исследование условия для угловой скорости ω/γ при больших N позволяет сделать вывод, что корни уравнения (1) близки к точке разрыва выражения для угловой скорости (см. [1]), которая, в свою очередь, близка к середине зазора кольца. Это оправдывает обычно принимаемое предположение о расположении вихрей по середине зазора и делает бессмысленным точное решение уравнения (1) — достаточно положить $r_0 \approx (R_1 + R_2)/2$ и использовать приближенное соотношение (4).

Условие положительности второй вариации с заданной точностью принимает вид

$$\frac{\omega}{\gamma} r_0^2 + L + \frac{N}{2} - \left[\left(\frac{R_1}{r_0}\right)^{2N+2} + \left(\frac{r_0}{R_2}\right)^{2N+2}\right] \times \left[N + 1 + 2(N+1)^2\right] \ge 0. \qquad (5)$$

Поскольку показательная функция растет быстрее любой степенной, при r_0, далеком от стенок, условие положительности второй вариации выполняется при всех L и N. И только при r_0 близком к R_1 и R_2 (т.е. в случае узких колец) последнее слагаемое при больших N может стать большим отрицательным, поскольку в квадратных скобках стоит *сумма*, а не разность малых параметров, а степенной множитель растет квадратично. Однако подробное исследование этого соотношения показывает, что, хотя функция в квадратных скобках и имеет максимум в некоторой точке, для не очень узких колец этот максимум совсем невелик, а в узких кольцах величина циркуляции L настолько велика, что неравенство (5) *не дает условия потери устойчивости* первого вихревого кольца: *любое* число вихрей является устойчивым.

Этот явно неверный вывод связан с предположением *о расположении вихрей на одной окружности*. Это предположение имеет место лишь при относительно низких скоростях вращения, особенно для не очень узких колец. Для получения правильной картины течения при больших скоростях вращения следует параллельно исследовать ситуацию, когда в кольце возникает не одна, а две и более цепочки вихрей. Появление второго ряда вихрей энергетически выгодно, когда свободная энергия N вихрей, расположенных на *двух* окружностях радиусами r_1 и r_2, становится *меньше* свободной энергии N вихрей, расположенных на одной окружности. Положения вихревых цепочек r_1 и r_2 определяются из двух уравнений, аналогичных (1), но полученных в предположении, что вихри расположены на двух окружностях. Условие устойчивости (2) тоже модифицируется. Аналогично можно получить условия появления трех, четырех и т.д. рядов вихрей, хотя, конечно, условия для их нахождения гораздо более сложные, чем (1), (2).

1. А. Д. Тюпцов, Т. И. Зуева, *ФНТ* 20, 1116 (1994).
2. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*, М. Абрамовиц, И. Стиган (ред.), Наука, Москва (1979), с. 389, 442.
3. R. J. Donnelly and A. L. Fetter, *Phys. Rev. Lett.* 17,747 (1966).

Helium in the rotating annulus: the equilibrium distribution of a large number of vortices

T. I. Zueva

Helium II flowing between two concentric cylinders rotating with equal angular velocity is considered. The approximate equation for the position of vortices is given for a case of a large number of vortices. This expression is the generalisation of similar expression for the narrow annuli and relates the angular velocity, the number of vortices and the number of circulation quants. The condition of stability is considered and the restrictions of supposition that the vortices are on the same circumference are discussed. A way of further investigations of vortices in the annuli is proposed: to consider vortices as being positioned on two and more circumferences.