

Квантовые осцилляции в анизотропном вейлевском полуметалле в скрещенных магнитном и электрическом полях

З.З. Алисултанов^{1,2}, Г.М. Мусаев², М.М. Арсланбекова²

¹Институт физики им. Х.И. Амирханова ДНЦ РАН, Махачкала

²Дагестанский государственный университет, Махачкала

E-mail: zaur0102@gmail.com

Статья поступила в редакцию 22 апреля 2017 г., после переработки 1 июня 2017 г., опубликована онлайн 25 октября 2017 г.

Рассчитан электронный спектр анизотропного вейлевского полуметалла (ВП) в скрещенных магнитном и электрическом полях. Показано, что электрическое поле приводит к кардинальной перестройке зон Ландау. При некотором значении электрического поля происходит полный коллапс уровней Ландау, однако движение вдоль магнитного поля не исчезает в отличие от изотропного случая. Получены аналитические выражения для квантовой электроемкости в случаях слабого и сильного электрического полей. Предсказан новый фазовый переход между фазами ВП I и II типов, индуцированный электрическим полем. При значении электрического поля, соответствующего такому переходу, плотность состояний имеет особенность, как это и должно быть для фазовых переходов типа Лифшица. Используя подход Фальковского, показано, что фаза Берри для анизотропного ВП с наклонным спектром вблизи вейлевской точки равна π . Тогда квазиклассический подход приводит точно к такому же спектру, что и микроскопический.

Розраховано електронний спектр анізотропного вейлівського напівметалу (ВН) у скрещених магнітному та електричному полях. Показано, що електричне поле призводить до кардинальної перебудови зон Ландау. При деякому значенні електричного поля відбувається повний колапс рівнів Ландау, однак рух уздовж магнітного поля не зникає на відміну від ізотропного випадку. Отримано аналітичні вирази для квантової електроємності у випадках слабого та сильного електричного полів. При значенні електричного поля, яке відповідає такому переходу, щільність станів має особливість, як це і повинно бути для фазових переходів типу Ліфшиця. Використовуючи підхід Фальковського, показано, що фаза Беррі для анізотропного ВН з похилим спектром поблизу вейлівської точки дорівнює π . Тоді квазікласичний підхід призводить точно до такого ж спектру, що й мікроскопічний.

PACS: 71.10.Sa Электронный газ, газ Ферми;
71.70.Di Уровни Ландау;
71.10.Hf Не ферми-жидкостные основные состояния, электронные фазовые диаграммы и фазовые переходы в модельных системах.

Ключевые слова: квантовые осцилляции, анизотропный вейлевский полуметалл, уровни Ландау, фаза Берри.

1. Введение

В настоящее время благодаря своим уникальным свойствам топологические материалы считаются перспективными для будущей электроники. Особый интерес представляют системы с точками Дирака [1–5], Вейля [6–10], а также с более вырожденными точками [11] и даже целыми линиями вырождения [12–16] в зоне Бриллюэна. Майорановские частицы в топологических

материалах предсказаны в работах [17,18]. Безмассовые фермионы в таких системах обладают топологической защитой [19], что приводит к квантово-электродинамическим эффектам, многие из которых известны из физики высоких энергий [20]. Однако есть и принципиально новые эффекты.

Недавно были предложены вейлевские полуметаллы нового типа [21–24] (II типа ВП) с сильным нарушением лоренц-инвариантности, которые долго игно-

рировались квантовой теорией поля. Теоретически было показано, что WTe₂ также является системой фермионов нового типа. Такие материалы уже открыты экспериментально [25]. А совсем недавно были предложены ВП III и IV типов [26], которые относятся к взаимодействующим системам.

В настоящей работе исследованы зоны Ландау и квантовые осцилляции в анизотропных ВП в скрещенных магнитном и электрическом полях. Такое исследование в полупроводнике, описываемом уравнением Дирака, проведено в [27], а в графене — в работах [28–33]. В скрещенных полях дираковские материалы проявляют интересные особенности, связанные с неквадратичностью спектра. В нерелятивистских материалах, где энергетический спектр является параболическим, циклотронная масса не зависит от энергии. Действительно, в рамках квазиклассической теории, циклотронная масса определяется как

$$m_c(\varepsilon) = (2\pi)^{-1} dS/d\varepsilon,$$

где $S(\varepsilon)$ — площадь сечения поверхности, заключенной внутри изоэнергетической траектории $\varepsilon(p) = \varepsilon$ в импульсном пространстве. Для спектра $\varepsilon(p) = p^2/2m^*$ получаем $m_c = m^*$. Следовательно, в этом случае приложенное электрическое поле не будет влиять на циклотронную частоту, а соответственно, и на уровни Ландау. В дираковских материалах энергетический спектр линейный, что приводит к зависимости циклотронной массы от энергии. Это означает, что циклотронная масса, а следовательно, и уровни Ландау будут зависеть от электрического поля. Например, для графена $\varepsilon(p) \sim |p|$, следовательно, $m_c \sim \varepsilon$. Такая зависимость приводит к возможности управления диамагнетизмом дираковских систем с помощью электрического поля.

В работах [34–36] исследовались уровни Ландау в ВП I и II типов в скрещенных магнитном и электрическом полях. К этим работам мы отсылаем читателя для получения более подробной информации о подходе, используемом здесь, и анализе некоторых особенностей рассматриваемой системы. В настоящей работе будем руководствоваться двумя подходами: микроскопическим, основанным на преобразованиях Лоренца, и квазиклассическим. Будет показано, что оба подхода дают абсолютно одинаковый результат. Кроме того, в работе подробно исследованы осцилляции плотности состояний.

2. Уровни Ландау в скрещенных полях

В ВП II типа дираковский конус образуется при перекрытии электронных и дырочных ферми-карманов. В этом случае спектр становится наклонным. Такие наклонные спектры в случае графена рассматривались в работе [37]. Будем использовать модель из [37], чтобы описать спектр анизотропного ВП

$$\hat{\mathcal{H}} = v_{\perp} \sigma_{\mathbf{p}_{\perp}} + v_{\parallel} \sigma_z p_z + \omega_{\perp} \mathbf{p}_{\perp} + \omega_{\parallel} p_z, \quad (1)$$

где \mathbf{p} — импульс вблизи вейлевских точек: $\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{+})$ и $\mathbf{p} = \hbar(\mathbf{k} - \mathbf{k}_{-})$. При $v^2 > \omega^2$ гамильтониан (1) описывает анизотропный ВП с наклонным спектром, который и рассматривается в настоящей работе. Наоборот, ситуация, когда $v^2 < \omega^2$ соответствует случаю ВП I типа, гамильтониан (1) дает следующее выражение для энергетического спектра:

$$\varepsilon = \omega_{\parallel} p_z + \omega_{\perp} \mathbf{p}_{\perp} \pm \sqrt{v_{\parallel}^2 p_z^2 + v_{\perp}^2 (p_x^2 + p_y^2)}. \quad (2)$$

Такой гамильтониан защищен от появления щели, т.е. вейлевские точки устойчивы. Действительно, возмущение в виде единичной матрицы (например, электрическое поле) приводит лишь к смещению энергии точки Вейля: $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}} + IU_0 \Rightarrow \bar{E} = E + U_0$. С другой стороны, возмущение в виде матрицы Паули приводит к смещению энергии и компонент импульсов, соответствующих точке Вейля:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}} + \sigma U \Rightarrow \bar{E} = E \left(\mathbf{p}_{\perp} + \frac{U_{\perp}}{v_{\perp}}, p_z + \frac{U_z}{v_{\parallel}} \right) - \frac{\omega_{\parallel} U_z}{v_{\parallel}} - \frac{\omega_{\perp} U_{\perp}}{v_{\perp}}.$$

Ни в одном из перечисленных случаев в спектре не открывается щель.

В присутствии магнитного и электрического полей $\mathbf{p}_{\perp} \rightarrow \mathbf{p}_{\perp} + (e/c)\mathbf{A}$ и $\hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}} + eE y$, где мы выбрали следующие направления полей: $\mathbf{H} = (0, 0, H)$, $\mathbf{E} = (0, E, 0)$. Используя калибровку Ландау, запишем гамильтониан в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = v_{\perp} \sigma_x \left(p_x - \frac{e}{c} H y \right) + v_{\perp} \sigma_y p_y + v_{\parallel} \sigma_z p_z + \omega_{\perp} p_x + \left(E - \omega_{\perp} \frac{e}{c} H \right) y + \omega_{\parallel} p_z, \quad (3)$$

где мы для простоты расчетов используем приближение $\omega = (\omega_{\perp}, 0, \omega_{\parallel})$. Тогда стационарное волновое уравнение может быть записано следующим образом:

$$\hat{\mathcal{H}} \psi = (\varepsilon - \omega_{\perp} p_x - \omega_{\parallel} p_z) \psi, \quad (4)$$

где

$$\hat{\mathcal{H}} = v_{\perp} \sigma_x \left(p_x - \frac{e}{c} H y \right) + v_{\perp} \sigma_y p_y + v_{\parallel} \sigma_z p_z + e \left(E - \omega_{\perp} \frac{H}{c} \right) y \quad (5)$$

есть аналог гамильтониана для ВП I типа в скрещенных магнитном H и электрическом $\tilde{E} = E - \omega_{\perp} \frac{H}{c}$ полях. Чтобы решить волновое уравнение с гамильтонианом (5), перейдем в движущуюся со скоростью $c\tilde{E}/H$ систему отсчета. Этот переход осуществляется с помощью следующих преобразований Лоренца [28,34]:

$$p_\nu = g_{\nu\mu} \tilde{p}_\mu, \quad (6)$$

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} \text{ch } \theta & \text{sh } \theta & 0 & 0 \\ \text{sh } \theta & \text{ch } \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где $\nu = t, x, y, z$, $\text{th } \theta = c\tilde{E}/v_\perp H = \tilde{v}_0/v_\perp \equiv \beta$. В новых переменных (6) волновое уравнение для гамильтониана (5) запишется в виде

$$\left(-\tilde{\varepsilon} + v_\perp \sigma_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} \tilde{H} \hat{y} \right) + v_\perp \sigma_y \hat{p}_y + v_\parallel \sigma_z \hat{p}_z \right) \tilde{\psi} = 0. \quad (8)$$

где $\tilde{H} = H\sqrt{1-\beta^2}$, а $\tilde{\varepsilon}$ — собственное значение гамильтониана (5). Решение уравнения (8) дает следующий спектр:

$$\tilde{\varepsilon}_n, \tilde{p}_z = \text{sgn}(n) \sqrt{2\hbar^2 v_\perp^2 l_H^{-2} n \sqrt{1-\beta^2} + v_\parallel^2 \tilde{p}_z^2}. \quad (9)$$

Применяя обратные преобразования Лоренца (7), окончательно получаем

$$\varepsilon_{n, p_x, p_z} = \text{sgn}(n) \sqrt{2\hbar^2 v_\perp^2 l_H^{-2} n (1-\beta^2)^{3/2} + v_\parallel^2 p_z^2 (1-\beta^2)} + c \frac{E}{H} p_x + \omega_\parallel p_z. \quad (10)$$

Рассмотрим некоторые специальные случаи. Для нулевого уровня Ландау мы имеем

$$\varepsilon_{0, p_x, p_z}^\pm = \pm v_\parallel p_z \sqrt{1-\beta^2} + c \frac{E}{H} p_x + \omega_\parallel p_z, \quad (11)$$

где знаки \pm соответствуют различным точкам Вейля. Если электрическое поле равно

$$E = \frac{H}{c} \left(v_\perp \sqrt{1 - \frac{\omega_\parallel^2}{v_\parallel^2}} + \omega_\perp \right), \quad (12)$$

то получаем, что $\varepsilon_{0, p_x, p_z}^+ = c \frac{E}{H} p_x + 2\omega_\parallel p_z$ и

$\varepsilon_{0, p_x, p_z}^- = c \frac{E}{H} p_x$. Таким образом, для первой точки

Вейля движение вдоль магнитного поля сохраняется, а для второй точки это движение исчезает. Это вызовет разрыв замкнутых орбит, обусловленных поверхностными состояниями, называемыми ферми-дугами и, следовательно, приведет к исчезновению соответствующих квантовых осцилляций. При $E = \frac{H}{c} (\omega_\perp \pm v_\perp)$

происходит полный коллапс уровней Ландау и энергетический спектр становится полностью непрерывным

$$\varepsilon_{n, p_x, p_z} = c \frac{E}{H} p_x + \omega_\parallel p_z. \quad (13)$$

Заметим, что движение вдоль магнитного поля сохраняется, несмотря на исчезновение уровней Ландау. Это обусловлено наклоном спектра. В изотропном случае этот эффект отсутствует. Кроме того, величина $(\omega_\perp - v_\perp)H/c$ по модулю меньше, чем соответствующее поле, необходимое для коллапса уровней Ландау в изотропном ВП (это поле равно $v_\perp H/c$). В этом смысле анизотропный ВП с наклонным спектром является более подходящей системой для экспериментальной проверки эффекта коллапса уровней Ландау. В отсутствие электрического поля выражение (10) переходит в результат работы [38].

3. Осцилляции квантовой электроемкости

Получим теперь аналитическое выражение для квантовой электроемкости при низких температурах. На измерениях электроемкости, а также ее осцилляций в квантовом магнитном поле [39,40] основан один из экспериментальных методов изучения плотности состояний. В [41] были исследованы квантовые осцилляции электроемкости многослойного графена. Квантовая электроемкость определяется как

$$C = -e^2 \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \rho(\varepsilon) d\varepsilon, \quad (14)$$

где $f(\varepsilon) = (\exp((\varepsilon - \mu)/k_B T) + 1)^{-1}$ — функция распределения Ферми-Дирака, μ — химический потенциал. Плотность состояний в нашем случае определяется так

$$\rho(\varepsilon) = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \int_0^{p_{x\max}} dp_x \int dp_z \times \left\{ |\varepsilon - v_0 p_x| \delta\left((\varepsilon - v_0 p_x)^2 - (v_\parallel \gamma + \omega_\parallel)^2 p_z^2\right) + \sum_{n=1, \alpha=\pm} \delta(\varepsilon - v_0 p_x - \alpha E_{n, p_z}) \right\}. \quad (15)$$

Величину $p_{x\max}$ находим из условия вырожденности уровней Ландау. Используя результат микроскопического подхода, имеем

$$0 < \Delta y = \frac{c}{eH} \Delta p_x < L_y, \quad (16)$$

откуда получаем $\Delta p_{x\max} = eHL_y/c$. Применив формулу Пуассона

$$\frac{1}{2} f(0) + \sum_{n=1}^\infty f(n) = \int_0^\infty f(x) dx + 2 \text{Re} \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty f(x) e^{2\pi i k x} dx \quad (17)$$

к формуле (15), получим:

$$\rho = \rho_0 + \rho_{\text{osc}}, \quad (18)$$

где

$$\rho_0 = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\tilde{\nu}_{\parallel}^3}{\tilde{\nu}_{\perp}^2 (\tilde{\nu}_{\parallel}^2 - \omega_{\parallel}^2)^2} \frac{\varepsilon^3 - (\varepsilon - \nu_0 p_{x\max})^3}{3eE\hbar}, \quad (19)$$

$$\rho_{\text{osc}} = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\tilde{\nu}_{\parallel}^3}{(\tilde{\nu}_{\parallel}^2 - \omega_{\parallel}^2)^2} \frac{1}{\hbar^2 \tilde{\nu}_{\perp}^2 l_H^2} \times \int_0^{p_{x\max}} \varepsilon^2 dp_x \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} \cos \pi k \varepsilon^{-2} \tilde{l}_H^2 (1-y), \quad (20)$$

где $\tilde{l}_H^2 = \frac{1}{\hbar^2 \tilde{\nu}_{\perp}^2} \frac{\tilde{\nu}_{\parallel}^2 l_H^2}{\tilde{\nu}_{\parallel}^2 - \omega_{\parallel}^2}$. Чтобы рассчитать интеграл по y ,

воспользуемся результатом работы [42]. Тогда окончательно получим

$$\rho_{\text{osc}} = \frac{L_x L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\hbar \tilde{\nu}_{\perp}}{2\pi \nu_0 l_H \sqrt{\tilde{\nu}_{\parallel}^2 - \omega_{\parallel}^2}} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\cos \left(\pi k (\varepsilon - \nu_0 p_{x\max})^2 \tilde{l}_H^2 + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\pi k \varepsilon^2 \tilde{l}_H^2 + \frac{\pi}{4} \right) \right). \quad (21)$$

Из формул для плотности состояний видно, что при

$$E = \frac{H}{c} \left(\nu_{\perp} \sqrt{1 - \frac{\omega_{\parallel}^2}{\nu_{\parallel}^2}} + \omega_{\perp} \right), \text{ когда } \tilde{\nu}_{\parallel}^2 = \omega_{\parallel}^2, \text{ в плотности}$$

состояний имеется сингулярность. Это связано с тем, что при этом значении электрического поля происходит фазовый переход между фазами I и II вейлевского полуметалла. Действительно, при наличии электрического поля скорость вдоль магнитного поля равна $\tilde{\nu}_{\parallel}$, а не ν_{\parallel} . При условии, указанном выше, эта эффективная скорость становится равной ω_{\parallel} , что соответствует переходу к режиму вейлевского полуметалла II типа. Такой переход представляет собой фазовый переход типа Лифшица [43], для которого характерно наличие особенности в плотности состояний в точке перехода. Далее, заметим, что при $\nu_0 = \nu_F$ получаем $\rho_{\text{osc}} = 0$. Это связано с тем, что при этом условии происходит коллапс уровней Ландау, исчезает орбитальное движение, а соответственно, и соответствующие квантовые осцилляции.

Воспользуемся тригонометрическим соотношением:

$$\begin{aligned} \cos \left(\pi k \bar{\xi}_{\varepsilon} + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\pi k \xi_{\varepsilon} + \frac{\pi}{4} \right) &= \\ &= 2 \sin \left(\frac{\pi k}{2} (\bar{\xi}_{\varepsilon} + \xi_{\varepsilon}) + \frac{\pi}{4} \right) \times \\ &\times \sin \left(\pi k \nu_0 p_{x\max} (\varepsilon - \nu_0 p_{x\max} / 2) \tilde{l}_H^2 \right), \end{aligned}$$

где для удобства введены обозначения $\bar{\xi}_{\varepsilon} = (\varepsilon - \nu_0 p_{x\max})^2 \tilde{l}_H^2$ и $\xi_{\varepsilon} = \varepsilon^2 \tilde{l}_H^2$. Для слабых электрических полей, когда $\mu > eEL_y$,

$$\begin{aligned} \cos \left(\pi k \bar{\xi}_{\varepsilon} + \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(\pi k \xi_{\varepsilon} + \frac{\pi}{4} \right) &\approx \\ &\approx 2 \sin \left(\pi k \varepsilon^2 \tilde{l}_H^2 + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\pi k \varepsilon \nu_0 p_{x\max} \tilde{l}_H^2 \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, помимо осциллирующей де Гааза-ван Альфена, имеется некоторая модуляция этих осцилляций с частотой $\Delta(1/H) \propto (\varepsilon \nu_0 p_{x\max})^{-1}$, которая стремится к бесконечности при отсутствии электрического поля.

Если $\mu \ll eEL_y$, то получаем

$$\begin{aligned} \cos \pi \left(k \bar{\xi}_{\varepsilon} + \frac{1}{4} \right) - \cos \pi \left(k \xi_{\varepsilon} + \frac{1}{4} \right) &\approx \\ &\approx \cos \pi \left(k \nu_0^2 p_{x\max}^2 \tilde{l}_H^2 + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно, в случае сильных электрических полей характерной энергией, определяющей период квантовых осцилляций, является величина $\nu_0 p_{x\max}$. При отсутствии электрического поля формула (21) дает результат работы [42].

Подставим теперь плотность состояний в формулу (14). При низких температурах подынтегральное выражение в (14) существенно отлично от нуля лишь в окрестности точки химического потенциала. Поэтому запишем

$$\varepsilon^2 \approx \mu^2 + 2\mu(\varepsilon - \mu), \quad (24)$$

$$(\varepsilon - \nu_0 p_{x\max})^2 \approx (\mu - \nu_0 p_{x\max})^2 + 2(\mu - \nu_0 p_{x\max})(\varepsilon - \mu). \quad (25)$$

Тогда для осциллирующей части квантовой электроемкости получим:

$$\begin{aligned} C_{\text{osc}} &= e^2 \frac{L_x L_z}{(2\pi)^2} \frac{\tilde{\nu}_{\perp}}{2\pi\hbar \nu_0 l_H \sqrt{\tilde{\nu}_{\parallel}^2 - \omega_{\parallel}^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{\bar{\chi}_k}{\text{sh } \bar{\chi}_k} \cos \left(\pi k \bar{\xi}_{\mu} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\chi_k}{\text{sh } \chi_k} \cos \left(\pi k \xi_{\mu} + \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\bar{\chi}_k = \pi k \bar{\xi}_{\mu} k_B T$, $\chi_k = \pi k \xi_{\mu} k_B T$. При получении (26) использована формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iaz}}{4 \text{ch}^2 \frac{z}{2}} dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^z}{(e^z + 1)^2} e^{iaz} dz = \frac{\pi \alpha}{\text{sh } \pi \alpha}. \quad (27)$$

Измерение квантовой электроемкости позволит непосредственно проверить предсказанные в настоящей работе эффекты.

Работа поддержана грантами: президента РФ МК-МК-2130.2017.2, РФФИ № 15-02-03311а, главы РД (грант за 2016 г.). А.З.З. искренне благодарен фонду «Династия».

Приложение

Следуя работам Лифшица и Каганова [44,45] и нашим работам [30–33,46], применен квазиклассический подход, основанный на использовании обобщенных условий квантования Лифшица–Онсагера [47,48], в следующем виде:

$$A(\varepsilon^*) = 2\pi\hbar^2 l_H^{-2} (n + \gamma), \quad (\text{П.1})$$

где $A(\varepsilon^*)$ — площадь сечения поверхности $\varepsilon(p) - v_0 p = \varepsilon^*$, где $v_0 = c[EH]/H^2$ — средняя скорость дрейфа электрона перпендикулярно плоскости, в которой лежат E и H , $\gamma = 1/2 - \chi/2\pi$, где χ есть фаза Берри. Такое обобщение связано с тем, что в скрещенных полях сохраняется не энергия, а величина $\varepsilon^*(\mathbf{p})$. Следует отметить, что в общем случае квазиклассическое условие квантования (П.1) должно содержать еще зеемановское расщепление, которое при наличии спин-орбитального взаимодействия будет перенормированным за счет g -фактора (см., например, [49]). Однако этими эффектами мы здесь пренебрегаем. В нашем случае $E \perp H$, а $v_0 = cEe_x/H$, где e_x есть единичный вектор вдоль оси X . Тогда $v_0 p = v_0 p_x$. Для спектра вблизи вейлевской точки имеем

$$A(\varepsilon^*, p_z) = \pi \frac{((\varepsilon^* - \omega_{\parallel} p_z)^2) / (v_{\perp}^2 - (v_0 - \omega_x)^2) v_{\perp}^2 - v_{\parallel}^2 p_z^2}{\sqrt{(v_{\perp}^2 - (v_0 - \omega_x)^2) v_{\perp}^2}}. \quad (\text{П.2})$$

Тогда

$$\varepsilon = \sqrt{2v_{\perp}^2 (1 - \beta^2)^{3/2} \hbar^2 l_H^{-2} (n + \gamma) + v_{\parallel}^2 (1 - \beta^2) p_z^2} + \omega_{\parallel} p_z. \quad (\text{П.3})$$

Покажем, что для гамильтониана (1) фаза Берри равна π , т.е. $\gamma = 0$. Для этого воспользуемся методом Фальковского из работы [50], которая была написана, кстати, задолго до опубликования известной работы Берри [51]. В [52] для $\chi(\varepsilon)$ было получено следующее выражение:

$$\chi(\varepsilon) = \text{Im} \oint \frac{dk_x}{\Phi_0 \Phi_0 v_y} \Phi_0^* V_y \frac{d\Phi_0}{dk_x}, \quad (\text{П.4})$$

где $V_y = \partial H / \partial k_y$ — оператор скорости, Φ_0 — собственные функции гамильтониана. Далее воспользуемся следующим упрощением. Очевидно, что фаза Берри не должна зависеть от системы отсчета. От скорости движения системы отсчета зависит только форма изоэнергетического контура, но не соответствующий контурный интеграл. Это существенно упрощает нашу задачу и позволяет сделать аналитические расчеты. В свете сказанного, в волновом уравнении с гамильтонианом (1) перейдем в движущуюся со скоростью V систему отсчета, используя преобразования Лоренца (6). Тогда, если положить $V = \omega_{\perp}$, получим

$$\hat{H}_0 \tilde{\Psi} = \tilde{\varepsilon} \tilde{\Psi}. \quad (\text{П.5})$$

$$\hat{H}_0 = \tilde{v}_{\perp} \sigma_x \left(\tilde{p}_x + \frac{\omega_{\perp} \tilde{\varepsilon}}{v_{\perp}^2} \right) + v_{\perp} \sigma_y \tilde{p}_y + v_{\parallel} \sigma_z \tilde{p}_z + \omega_{\parallel} \tilde{p}_z, \quad (\text{П.6})$$

где введена перенормированная скорость $\tilde{v}_{\perp} = v_{\perp} / (1 - \omega_{\perp}^2 / v_{\perp}^2)$. Таким образом, теперь можно вместо гамильтониана (1) рассматривать гамильтониан \hat{H}_0 с собственными значениями $\tilde{\varepsilon}$

$$\tilde{\varepsilon} = \omega_{\parallel} \tilde{p}_z + \sqrt{\tilde{v}_{\perp}^2 \left(\tilde{p}_x + \frac{\omega_{\perp} \tilde{\varepsilon}}{v_{\perp}^2} \right)^2 + v_{\perp}^2 \tilde{p}_y^2 + v_{\parallel}^2 \tilde{p}_z^2}. \quad (\text{П.7})$$

Представим собственные функции гамильтониана (П.6) в виде

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \tilde{v}_{\perp} \left(\tilde{p}_x + \frac{\omega_{\perp} \tilde{\varepsilon}}{v_{\perp}^2} \right) - i v_{\perp} \tilde{p}_y \\ \tilde{\varepsilon} - \omega_{\parallel} \tilde{p}_z - v_{\parallel} \tilde{p}_z \end{pmatrix}. \quad (\text{П.8})$$

Тогда

$$\Phi_0^* \Phi_0 = \tilde{v}_{\perp}^2 \left(\tilde{p}_x + \frac{\omega_{\perp} \tilde{\varepsilon}}{v_{\perp}^2} \right)^2 + v_{\perp}^2 \tilde{p}_y^2 + (\tilde{\varepsilon} - \omega_{\parallel} \tilde{p}_z - v_{\parallel} \tilde{p}_z)^2. \quad (\text{П.9})$$

В нашем случае оператор V_y дается матрицей

$$V_y = v_{\perp} \sigma_y. \quad (\text{П.10})$$

$$\text{Im} \Phi_0^* V_y \frac{d\Phi_0}{dp_x} = v_{\perp} \tilde{v}_{\perp} (\tilde{\varepsilon} - \omega_{\parallel} \tilde{p}_z - v_{\parallel} \tilde{p}_z). \quad (\text{П.11})$$

Функции (П.9) и (П.11) не зависят от k_x . Далее имеем $\oint dk_x / v_y = dA / d\varepsilon$. Действительно, по определению $A = \oint dk_x dk_y$. С другой стороны, $dk_y = d\varepsilon / (\partial \varepsilon / \partial k_y) = d\varepsilon / v_y$. Тогда $A = \oint d\varepsilon dk_x / v_y$. Для спектра (П.7) получаем

$$A(\tilde{\varepsilon}, \tilde{p}_z) = \pi \frac{(\tilde{\varepsilon} - \omega_{\parallel} \tilde{p}_z)^2 - v_{\parallel}^2 \tilde{p}_z^2}{\tilde{v}_{\perp} v_{\perp}}. \quad (\text{П.12})$$

Используя формулы (П.9)–(П.12), нетрудно показать, что $\chi = \pi$. Тогда квазиклассическое выражение (П.3) превращается в точное решение.

1. Zh. Wang, Y. Sun, X.-Q. Chen, C. Franchini, G. Xu, H. Weng, X. Dai, and Zh. Fang, *Phys. Rev. B* **85**, 195320 (2012).
2. Z.K. Liu, B. Zhou, Y. Zhang, Z.J. Wang, H.M. Weng, D. Prabhakaran, S.-K. Mo, Z.X. Shen, Z. Fang, X. Dai, Z. Hussain, and Y.L. Chen, *Science* **343**, 864 (2014).

3. S. Borisenko, Q. Gibson, D. Evtushinsky, V. Zabolotnyy, B. Büchner, and R.J. Cava, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 027603 (2014).
4. B.-J. Yang and N. Nagaosa, *Nat. Commun.* **5**, 4898 (2014).
5. Su-Yang Xu, Ch. Liu, S.K. Kushwaha, R. Sankar, J.W. Krizan, I. Belopolski, M. Neupane, G. Bian, N. Alidoust, T.-R. Chang, H.-T. Jeng, Ch.-Y. Huang, W.-F. Tsai, H. Lin, P.P. Shibayev, F.-C. Chou, R.J. Cava, and M. Zahid Hasan, *Science* **347**, 294 (2015).
6. O. Vafek and A. Vishwanath, *Ann. Rev. of Condens. Matter Phys.* **5**, 83 (2014).
7. H. Weng, C. Fang, Z. Fang, B.A. Bernevig, and Xi Dai, *Phys. Rev. X* **5**, 011029 (2015).
8. S.-M. Huang, S.-Y. Xu, I. Belopolski, C.-Cheng Lee, G. Chang, B. Wang, N. Alidoust, G. Bian, M. Neupane, C. Zhang, S. Jia, A. Bansil, H. Lin, and M. Zahid Hasan, *Nature Commun.* **6**, 7373 (2015).
9. S.-Y. Xu, I. Belopolski, N. Alidoust, M. Neupane, G. Bian, C. Zhang, R. Sankar, G. Chang, Z. Yuan, C.-C. Lee, S.-M. Huang, H. Zheng, J. Ma, D.S. Sanchez, B. Wang, A. Bansil, F. Chou, P.P. Shibayev, H. Lin, S. Jia, and M. Zahid Hasan, *Science* **349**, 613 (2015).
10. B. Q. Lv, H. M. Weng, B. B. Fu, X. P. Wang, H. Miao, J. Ma, P. Richard, X. C. Huang, L. X. Zhao, G. F. Chen, Z. Fang, X. Dai, T. Qian, and H. Ding, *Phys. Rev. X* **5**, 031013 (2015).
11. B. Bradlyn, J. Cano, Z. Wang, M.G. Vergniory, C. Felser, R.J. Cava, and B. Andrei Bernevig, *Science* **353**, 5037 (2016).
12. T. Bzdusek, Q. Wu, A. Ruegg, M. Sigrist, and A.A. Soluyanov, *Nature* **538**, 75 (2016).
13. C.-K. Chiu and A.P. Schnyder, *Phys. Rev. B* **90**, 205136 (2014).
14. L.S. Xie, L.M. Schoop, E.M. Seibel, Q.D. Gibson, W. Xie, and R.J. Cava, arXiv:1504.01731.
15. R. Yu, H. Weng, Z. Fang, X. Dai, and X. Hu, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 036807 (2015).
16. G. Bian, T.-R. Chang, R. Sankar, S.-Y. Xu, H. Zheng, T. Neupert, Ch.-K. Chiu, S.-M. Huang, G. Chang, I. Belopolski, D.S. Sanchez, M. Neupane, N. Alidoust, C. Liu, B. Wang, C.-C. Lee, H.-T. Jeng, C. Zhang, Z. Yuan, S. Jia, A. Bansil, F. Chou, H. Lin, and M. Zahid Hasan, *Nature Commun.* **7**, 10556 (2016).
17. R. Schaffer, E.K.-H. Lee, Y.-M. Lu, and Y.B. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 116803 (2015).
18. M. Hermanns, K. O'Brien, and S. Trebst, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 157202 (2015).
19. P.G. Grinevich and G.E. Volovik, *J. Low Temp. Phys.* **72**, 371 (1988).
20. G.E. Volovik, *The Universe in a Helium Droplet*, Clarendon Press, Oxford (2003).
21. T.-R. Chang, S.-Y. Xu, G. Chang, C.-C. Lee, S.-M. Huang, B. Wang, G. Bian, H. Zheng, D.S. Sanchez, I. Belopolski, N. Alidoust, M. Neupane, A. Bansil, H.-T. Jeng, H. Lin, and M. Zahid Hasan, *Nat. Commun.* **7**, 10639 (2016).
22. A.A. Soluyanov, D. Gresch, Z. Wang, Q. Wu, M. Troyer, Xi Dai, and B. Andrei Bernevig, *Nature* **527**, 495 (2015).
23. Z.J. Wang, D. Gresch, A.A. Soluyanov, W. Xie, S. Kushwaha, X. Dai, M. Troyer, R.J. Cava, and B. Andrei Bernevig, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 056805 (2016).
24. Y. Sun, S.-C. Wu, M.N. Ali, C. Felser, and B. Yan *Phys. Rev. B* **92**, 161107 (2015).
25. I. Belopolski, D.S. Sanchez, Y. Ishida, X. Pan, P. Yu, S.-Y. Xu, G. Chang, T.-R. Chang, H. Zheng, N. Alidoust, G. Bian, M. Neupane, S.-M. Huang, C.-C. Lee, Y. Song, H. Bu, G. Wang, S. Li, G. Eda, Homg-Tay Jeng, T. Kondo, H. Lin, Zh. Liu, F. Song, S. Shin, and M. Zahid Hasan, *Nature Commun.* **7**, 13643 (2016).
26. J. Nissinen and G.E. Volovik, *Pis'ma v ZhETF* **105**, 442 (2017).
27. А.Г. Аронов, Г.Е. Пикус, *ЖЭТФ* **51**, 505 (1966).
28. V. Lukose, R. Shankar, and G. Baskaran, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 116802 (2007).
29. N. Peres and E.V. Castro, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 406231 (2007).
30. 3.3. Алисултанов, *Письма в ЖЭТФ* **99**, 813 (2014).
31. 3.3. Алисултанов, *Письма в ЖЭТФ* **99**, 258 (2014).
32. Z.Z. Alisultanov and M.S. Reis, *Europhys. Lett.* **113**, 28004 (2016).
33. Z.Z. Alisultanov and M.S. Reis, *Solid State Commun.* **234–235**, 26 (2016).
34. 3.3. Алисултанов, *Письма в ЖЭТФ* **105**, 437 (2017).
35. Z.-M. Yu, Y. Yao, and S.A. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 077202 (2016).
36. S. Tchoumakov, M. Civelli, and M.O. Goerbig, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 086402 (2016).
37. M.O. Goerbig, J.-N. Fuchs, G. Montambaux, and F. Piéchon, *Phys. Rev. B* **78**, 045415 (2008).
38. Г.П. Микитик, Ю.В. Шарлай, *ФНТ* **22**, 762 (1996) [*Low Temp. Phys.* **22**, 585 (1996)].
39. L.A. Ponomarenko, R. Yang, R.V. Gorbachev, P. Blake, A.S. Mayorov, K.S. Novoselov, M.I. Katsnelson, and A.K. Geim, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 136801 (2010).
40. G.L. Yu, R. Jalil, B. Belle, A.S. Mayorov, P. Blake, F. Schedin, S.V. Morozov, L.A. Ponomarenko, F. Chiappini, S. Wiedmann, U. Zeitler, M.I. Katsnelson, A.K. Geim, K.S. Novoselov, and D.C. Elias, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**, 3281 (2013).
41. V.P. Gusynin, V.M. Loktev, I.A. Luk'yanchuk, S.G. Sharapov, and A.A. Varlamov, *ФНТ* **40**, 355 (2014) [*Low Temp. Phys.* **40**, 270 (2014)].
42. P.E.C. Ashby, and J.P. Carbotte, *Eur. Phys. J. B* **87**, 92 (2014).
43. G.E. Volovik, *ФНТ* **43**, 57 (2017) [*Low Temp. Phys.* **43**, 47 (2017)].
44. И.М. Лифшиц, М.И. Каганов, *УФН* **69**, 419 (1959).
45. И.М. Лифшиц, М.Я. Азбель, М.И. Каганов. *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
46. Z.Z. Alisultanov, *Physica B* **438**, 41 (2014).
47. И.М. Лифшиц, А.М. Косевич, *ЖЭТФ* **29**, 730 (1955).
48. L. Onsager, *Philos. Mag.* **43**, 1006 (1952).
49. G.P. Mikitik and Yu.V. Sharlai, *Phys. Rev. B* **85**, 033301 (2012).
50. L.A. Falkovsky, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **49**, 609 (1965).
51. M.V. Berry, *Proc. R. Soc. London A* **392**, 45 (1984).
52. A.Yu. Ozerin and L.A. Falkovsky, *Phys. Rev. B* **85**, 205143 (2012).

Quantum oscillations in an anisotropic Weyl semimetal in crossed magnetic and electric fields

Z.Z. Alisultanov, G.M. Musaev, and M.M. Arslanbekova

We calculated the electron spectrum of an anisotropic Weyl semimetal (WSM) in crossed magnetic and electric fields. We have shown that the electric field leads to a cardinal rearrangement of the Landau bands. At a some value of the electric field, a complete collapse of the Landau levels occurs, but the motion along the magnetic field does not vanish, in contrast to the isotropic case. We obtained analytical expressions for the quantum electric capacity in cases of weak and strong electric fields. We predicted a new phase transition between the phases of type I and type II of WSMs induced

by an electric field. When the value of the electric field corresponds to such a transition, the density of states has a singularity, as it should be for phase transitions of the Lifshitz type. Using Falkowsky approach, we showed that the Berry phase for an anisotropic VP with an inclined spectrum near the Weyl point is equal to π . Then the quasiclassical approach leads exactly to the same spectrum as the microscopic one.

PACS: 71.10.Ca Electron gas, Fermi gas;
71.70.Di Landau levels;
71.10.Hf Non-Fermi-liquid ground states,
electron phase diagrams and phase transitions
in model systems.

Keywords: quantum oscillations, anisotropic Weyl semimetal, Landau levels, Berry phase.