Low Temperature Physics/Фізика низьких температур, 2018, т. 44, № 10, с. 1358–1362

Возбуждение колебаний концентрации и температуры вибрирующими телами в сверхтекучем растворе ^{3}He–^{4}He

Т.Г. Вихтинская, К.Э. Немченко, С.Ю. Рогова

Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61022, Украина
E-mail: nemchenko@karazin.ua

Статья поступила в редакцию 16 июня 2018 г., опубликована онлайн 28 августа 2018 г.

Проведено исследование возбуждения колебаний концентрации и температуры в волнах первого и второго звуков, а также в тепловой волне вибрирующим камертоном в сверхтекучем растворе ^{3}He–^{4}He, с концентрацией более 10% ^{3}He. В частности, исследована возможность излучения второго звука и тепловой диссипативной волны колеблющимся камертоном, эффективность такого излучения в зависимости от концентрации раствора и возможное влияние этого излучении на затухание колебаний камертона, которое наблюдается в экспериментах и не получило пока теоретического объяснения.

Ключевые слова: сверхтекучие растворы, диссипативная тепловая волна, второй звук, первый звук, колеблющаяся стенка.

Введение

Использование осциллирующего кварцевого камертона в чистом сверхтекучем гелии (He II) стало одним из плодотворных методов изучения явлений переноса за последние десять лет [1–12]. В этих экспериментах было обнаружено много интересных и необычных явлений, включая, например, переход к режиму квантовой турбулентности [11,12].

В недавних работах [13,14] представлены результаты экспериментов с осциллирующим кварцевым камертоном, погруженным в сверхтекучий раствор ^{3}He–^{4}He с концентрациями до 15% ^{3}He.

Этот раствор обладает некоторыми свойствами, которые отличаются от свойств чистого гелия. Одним из них является наличие квазичастиц (квазичастицы ^{3}He) при любых температурах, включая температуры, близкие к нулю. Другая особенность — очень малая величина типичного времени взаимодействия между квазичастицами ^{3}He, поэтому газ этих квазичастиц всегда можно рассматривать в гидродинамическом приближении. В частности, это предположение справедливо при относительно высоких концентрациях 10–15% ^{3}He, при которых проводились эксперименты [13,14].

В этом пределе вибрации твердой стенки, например кварцевых камертонов, могут вызывать излучение не только первого звука, но и второго звука [15] и тепловой волны. Дело в том, что теплопередача в сверхтекучем растворе ^{3}He–^{4}He имеет ряд особенностей. Одна из них заключается в том, что возбуждения концентрации и температуры релаксируют как в волне второго звука, так и в диссипативной диффузионной волне [16–18]. Цель этой работы — выяснить, при каких условиях осцилляции твердой стенки возбуждают первый и второй звуки, генерируют диссипативную волну, и определить вклады этих процессов в затухание колебаний камертона.

Дисперсионное уравнение для нормальных мод сверхтекучего раствора

Для того чтобы решить задачу об излучении второго звука и тепловой волны колеблющейся твердой стенкой, будем исходить из полной системы гидродинамических уравнений для сверхтекучего раствора [19,20] с соответствующими эксперименту граничными условиями.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \\ \dfrac{\partial\mathbf{j}}{\partial t} + \nabla P = 0, \\ \dfrac{\partial\rho\,\sigma}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\sigma\,\mathbf{v}_\mathrm{n} + \dfrac{\mathbf{q}}{T}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\mathbf{v}_\mathrm{s}}{\partial t} + \nabla\left(\mu - \dfrac{Z}{\rho}c\right) = 0, \\ \dfrac{\partial\rho\,c}{\partial t} + \rho c \operatorname{div}\mathbf{v}_\mathrm{n} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь ρ описывает полную плотность раствора, $\mathbf{j}$ — плотность импульса, P — давление, σ — энтропии единицы массы, c — концентрация ^{3}He, μ — химический потенциал раствора, Z — химический потенциал, обусловленный растворенным изотопом ^{3}He. Величины $\mathbf{v_n}$ и $\mathbf{v_s}$ — скорости нормальной и сверхтекучей компонент соответственно. Плотность ρ связана с плотностями нормальной ρ_n и сверхтекучей ρ_s компонент раствора соотношением $\rho = \rho_n + \rho_s$, а плотность потока массы $\mathbf{j}$ связана со скоростями $\mathbf{v_n}$ и $\mathbf{v_s}$ соотношением $\mathbf{j} = \rho_n\mathbf{v_n} + \rho_s\mathbf{v_s}$.

Из диссипативных процессов мы учитываем только процесс переноса тепла за счет теплопроводности, и соответствующий диссипативный поток тепла определяем обычным соотношением

$$\mathbf{q} = -\kappa\,\nabla T\,, \tag{2}$$

где κ — коэффициент теплопроводности раствора.

Излучение первого и второго звуков колеблющейся твердой стенкой исследовалось в работах [15] исходя из системы (1) без учета диссипативного потока тепла. Следуя работам [15,19], в качестве независимых переменных выбираем давление P и энтропию σ. Далее проводим процедуру линеаризации системы (1), представляя термодинамические величины в виде суммы равновесных значений и малых добавок: $P = P_0 + P'$ и т.п. Эти малые добавки, а также скорости нормальной и сверхтекучей компонент представляем в виде плоских волн, пропорциональных exp ($ikx - i\omega t$), движущихся вдоль оси x, которая направлена по нормали к колеблющейся плоскости.

В результате преобразований системы (1) получаем два уравнения, которые связывают между собой колебания давления и энтропии:

$$\begin{cases} \left[1 - \dfrac{k^2c_\mathrm{I}^2}{\omega^2}\right]\dfrac{P'}{\rho_0 c_\mathrm{I}^2} = -\bar{c}G\dfrac{\sigma'}{\sigma_0} \\ \left[\dfrac{k^2c_{II}^2}{\omega^2} - 1\right]G\dfrac{\sigma'}{\sigma_0} = \bar{c}\dfrac{\rho_s}{\rho_n}\dfrac{k^2c_\mathrm{I}^2}{\omega^2}\dfrac{P'}{\rho_0 c_\mathrm{I}^2}. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь введены величины, характеризующие свойства сверхтекучего раствора:

$$c_\mathrm{I}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_{T,c}$$

— величина, характеризующая скорость первого звука;

$$c_\mathrm{II}^2 = \frac{c_{2\varepsilon}^2}{1 + i\Gamma} + c_{2N}^2$$

— величина, определяющая параметры второго звука;

$$c_{2\varepsilon}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n}\frac{\bar{\sigma}^2 T}{c_P}\,,\; c_{2N}^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n}c^2\left(\frac{\partial(Z/\rho)}{\partial c}\right)_{T,P},$$

$$\bar{\sigma} = \sigma(1 - \tilde{\sigma})\,,\; c_P = \left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_{P,c}$$

и безразмерные производные по концентрации:

$$\tilde{\sigma} = \frac{c}{\sigma}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial c}\right)_{P,T},\quad \bar{c} = \frac{c}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial c}\right)_{P,T}.$$

Множитель $G = (1 + i\Gamma)/(1 + i\Gamma\tilde{\sigma})$, а параметр Γ определяет диссипативную моду, а также вклад теплопроводности в поглощение звуков:

$$\Gamma = \frac{k^2}{\omega}\frac{\kappa}{c_P}. \tag{4}$$

Из условия совместности системы уравнений (3) получаем искомое дисперсионное уравнение

$$\left[\frac{\omega^2}{k^2} - c_\mathrm{I}^2\right]\left[c_{II}^2 - \frac{\omega^2}{k^2}\right] = -\beta\frac{\omega^2}{k^2}c_\mathrm{I}^2, \tag{5}$$

где

$$\beta = \bar{c}^2\frac{\rho_s}{\rho_n}. \tag{6}$$

Это уравнение, как и следовало ожидать из количества уравнений в системе (1), является уравнением пятого порядка относительно ω и, следовательно, описывает пять нормальных мод. При получении соотношения (5) коэффициент теплового расширения раствора полагался равным нулю ($\partial\rho/\partial T$) = 0. Такое приближение справедливо для растворов с c > 0,1 и позволяет уделить основное внимание генерации второго звука и тепловой волны колеблющимися телами за счет взаимной зависимости плотности и концентрации, которая количественно описывается коэффициентом $\bar{c}$ = (c/ρ)($\partial\rho/\partial c$).

Явные аналитические решения уравнения (5) приведем для простоты в приближении малости отношения

$$\frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{c_{2\varepsilon}^2 + c_{2N}^2}{c_1^2} \ll 1,$$

определяемое квадратом отношения скоростей второго и первого звуков.

Для акустических решений, когда $\omega \sim k$, из соотношения (5) получаем дисперсионные соотношения для первого и второго звуков:

$$\omega^2 = u_{1,2}^2 k^2 , \tag{7}$$

где

$$u_1^2 = c_1^2 (1+\beta) \tag{8}$$

— квадрат скорости первого звука, и

$$u_2^2 = \frac{c_2^2}{1+\beta} \tag{9}$$

— квадрат скорости второго звука.

Пятый корень уравнения (5) соответствует тепловой диссипативной моде, для которой характерна квадратичная зависимость частоты от волнового вектора:

$$\omega = -i \frac{c_{2N}^2}{c_2^2} \frac{\kappa}{c_P} k^2 . \tag{10}$$

Уравнение (5) переходит в дисперсионное решение, полученное в [15] только для случая акустических мод. В общем случае, когда необходимо учитывать диссипативные процессы, соотношение (5) соответствует результатам работ [16,17,20–22], где исследовалась полная система гидродинамических мод в сверхтекучем растворе.

Относительные амплитуды колебаний параметров раствора

Для дальнейшего исследования выпишем соотношения между амплитудами параметров раствора, которые были получены при переходе от исходной системы уравнений (1) к уравнениям (3). Так, колебания температуры и концентрации полностью определяются колебаниями энтропии:

$$\frac{T'}{T_0} = \frac{\bar{\sigma}}{c_P} \frac{1}{1+i\Gamma\tilde{\sigma}} \frac{\sigma'}{\sigma_0}, \qquad \frac{c'}{c_0} = G \frac{\sigma'}{\sigma_0} . \tag{11}$$

Колебания плотности определяются и давлением и энтропией в меру коэффициента $\bar{c}$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{P'}{\rho_0 c_1^2} + \bar{c} G \frac{\sigma'}{\sigma_0} . \tag{12}$$

Соотношения для амплитуд скоростей оказываются зависящими от частоты и волнового вектора и имеют следующий вид для скорости сверхтекучей компоненты:

$$v_s = \frac{k}{\omega} \left[c_1^2 (1+\bar{c}) \frac{P'}{\rho_0 c_1^2} - \frac{\rho_n}{\rho_s} c_{II}^2 G \frac{\sigma'}{\sigma_0} \right], \tag{13}$$

и для скорости нормальной компоненты:

$$v_n = \frac{\omega}{k} \left[(1+\bar{c}) G \frac{\sigma'}{\sigma_0} + \frac{P'}{\rho_0 c_1^2} \right]. \tag{14}$$

Относительные потери энергии колеблющейся стенкой

Найденные соотношения между амплитудами термодинамических величин позволяют определить относительные потери энергии колеблющейся стенкой за счет каждой из нормальных мод.

Для решения этой задачи необходимо выписать граничные условия на колеблющейся стенке для амплитуд соответствующих величин

$$\begin{cases} v_{sx} = v_W \\ v_{nx} = v_W \\ Q_{nx} = Q_W \end{cases} . \tag{15}$$

Здесь v_W — амплитуда скорости колебаний стенки,

$$\mathbf{Q} = (Z_0 c_0 + S_0 T_0) \mathbf{v}_n + \mathbf{q}$$

— полный поток тепла,

$$Q = (Z_0 c_0 + S_0 T_0) v_W + q_K$$

— поток тепла на границе твердое тело–гелий, где

$$q_K = r (T_0 + T' - T_W)$$

— поток тепла, обусловленный разностью температур твердого тела $T_W = T_0$ и гелия, и коэффициент r — сопротивление Капицы.

Наличие граничных условий (15) также обеспечивает отсутствие потока примесей через границу в приближении малой эффективности диффузии, которое рассматривается в этой статье.

Теперь, по аналогии с работами [15,20], из (11)–(14) выражаем амплитуды колебаний нормальной скорости и температуры через амплитуды сверхтекучей скорости и, используя эти соотношения в системе (15), находим связь амплитуды всех величин с величиной амплитуды скорости колебаний стенки. Это позволяет найти искомые отношения потерь энергии колеблющейся стенкой во всех модах.

В частности, отношение потоков энергии в волне второго звука I_2 к потоку энергии в волне первого звука I_1 оказывается равным

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \bar{c}^2 \frac{u_2}{u_1} . \tag{16}$$

Этот результат совпадает с результатом работы [15], где делался вывод о малости этого отношения. Однако следует отметить, что для растворов с концентрацией больше 10% величина (16) не является малой величиной, особенно при достаточно низких температурах. В этом случае плотность сверхтекучей компоненты на порядок превышает плотность нормальной компоненты, что компенсирует отношение скоростей звуков, а оценка для величины $\bar{c}^2$ показывает, что она может достигать величины 0,4. Таким образом, колеблющаяся стенка может достаточно эффективно излучать второй звук. Такой результат согласуется с наблюдаемыми в эксперименте [13] дополнительными потерями энергии в растворе с 15% ^{3}He, которые растут с понижением температуры.

Потери энергии W_T колеблющейся стенкой за счет тепловой волны определяются диссипацией за счет теплопроводности в пристеночном слое, толщина которого равна длине тепловой волны

$$\lambda_T = \left(\frac{1}{\omega}\frac{\kappa}{c_P}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Отношение потерь W_T к потоку энергии в волне второго звука вычисляется с помощью диссипативной функции раствора [20] и оказывается равным

$$\frac{W_T}{I_2} = \left(\frac{c_P}{\bar{\sigma}}\right)^2 \frac{c_{2\varepsilon}^2}{u_2^2}\left(\frac{\omega\kappa}{c_P u_2^2}\right)^{3/2}. \tag{18}$$

Результат (18) показывает, что потери энергии колеблющейся стенкой за счет тепловой волны меньше потока энергии в излучаемой при этом волне второго звука. Поэтому вклад диссипативной волны становится существенным, если в экспериментах подавляют каким-то образом излучение звуковых волн. Одна из таких методик широко используется в экспериментах с кварцевым камертоном [12,13]. В этих работах для подавления излучения звуковых колебаний кварцевый камертон помещается в жесткую оболочку подходящего размера. В таких условиях необходимо учитывать полный набор нормальных мод раствора, включая тепловую волну, которая генерируется колеблющимся камертоном.

Выводы

Проведено исследование возбуждения колебаний концентрации и температуры в волнах первого, второго звуков и в тепловой волне колеблющимися телами в сверхтекучем растворе ^{3}He–^{4}He с не малой концентрацией превышающей 10% ^{3}He. Из общей системы гидродинамических уравнений растворов (1) получены дисперсионные соотношения (7) для волн первого (8) и второго (9) звуков и для диссипативной тепловой волны (10). Определены соотношения между амплитудами в этих модах (3), (11)–(14). Решена задача о потерях энергии колеблющейся стенкой во всех нормальных модах и определены отношения потерь энергии в волне второго и первого звуков (16), а также в тепловой волне и волне второго звука (18). Эти результаты позволили исследовать возможность излучения второго звука и тепловой диссипативной волны колеблющимся камертоном, эффективность такого излучения в зависимости от концентрации раствора и возможное влияние этого излучения на затухание колебаний камертона, которое наблюдается в экспериментах и не получило пока теоретического объяснения.

1. D.O. Clubb, O.V.L. Buu, R.M. Bowley, R. Nyman, and J.R. Owers-Bradley, *J. Low Temp. Phys.* **136**, 1 (2004).
2. M. Blažková, D. Schmoranzer, and L. Skrbek, *Phys. Rev. E* **75**, 025302-1 (2007).
3. M. Blažková, M. Človečko, E. Gažo, L. Skrbek, and P. Skyba, *J. Low Temp. Phys.* **148**, 305 (2007).
4. M. Blažková, M. Človečko, V.B. Eltsov, E. Gažo, R. de Graaf, J.J. Hosio, M. Krusius, D. Schmoranzer, W. Schoepe, L. Skrbek, P. Skyba, R.E. Solntsev, and W.F. Vinen, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 525 (2008).
5. E.M. Pentti, J.T. Tuoriniemi, A.J. Salmela, and A.P. Sebedash, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 555 (2008).
6. E. Pentti, J. Rusti, A. Salmela, A. Sebedash, and J. Tuoriniemi, *REPORT TKK-KYL* 020, 36 (2009).
7. D. Schmoranzer, M. La Mantia, G. Sheshin, I. Gritsenko, A. Zadorozhko, M. Rotter, and L. Skrbek, *J. Low Temp. Phys.* **136**, 317 (2011).
8. A. Salmela, J. Tuoriniemi, and J. Rysti, *J. Low Temp. Phys.* **162**, 678 (2011)
9. D. Schmoranzer, M. La Mantia, G. Sheshin, I. Gritsenko, A. Zadorozhko, M. Rotter, and L. Skrbek, *J. Low Temp. Phys.* **136**, 317 (2011).
10. D.I. Bradley, M. Človečko, S.N. Fisher, D. Garg, E. Guise, R.P. Haley, O. Kolosov, G.R. Pickett, V. Tsepelin, D. Schmoranzer, and S. Skrbek, *Phys. Rev. B* **85**, 014501 (2012).
11. D. Schmoranzer, M.J. Jackson, V. Tsepelin, M. Poole, A.J. Woods, M. Človečko, and L. Skrbek, *Phys. Rev. B* **94**, 214503 (2016)
12. И.А. Гриценко, К.А. Клокол, С.С. Соколов, Г.А. Шешин, *ФНТ* **42**, 211 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 169 (2016)].
13. V. Bakhvalova, V. Chagovets, I. Gritsenko, and A.G. Sheshin, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 413 (2017).
14. T.S. Riekki, M.S. Manninen, and J.T. Tuoriniemi, *Phys. Rev. B* **94**, **224514**, (2016).
15. Э.Я. Рудавский, И.А. Сербин, *ЖЭТФ* **51**, 1930 (1966).
16. K. Nemchenko and S. Rogova, *J. Low Temp. Phys.* **150**, 187 (2008).
17. K. Nemchenko and S. Rogova, *J. Mod. Phys. Lett. B* **26**, 1 (2012).
18. K. Nemchenko, S. Rogova, and T. Vikhtinskaya, *J. Low Temp. Phys.* **187**, 324 (2017).
19. I.M. Khalatnikov, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, Redwood City, Addison-Wesley (1989).
20. И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, Наука, Москва (1970).
21. Л.П. Горьков, Л.П. Питаевский, *ЖЭТФ* **33**, 634 (1957).
22. A. Griffin, *Can. J. Phys.* **47**, 426 (1969).

Збудження коливань концентрації та температури тілами, які коливаються в надплинному розчині ^{3}He–^{4}He

Т.Г. Віхтинська, К.Е. Нємченко, С.Ю. Рогова

Проведено дослідження збудження коливань концентрації і температури в хвилях першого, другого звуків та в тепловій хвилі тілами, які коливаються в надплинному розчині ^{3}He–^{4}He з концентрацією, що перевищує 10% ^{3}He. Зокрема, досліджено можливість випромінювання другого звуку та теплової дисипативної хвилі камертоном, який вібрірує, ефективність такого випромінювання в залежності від концентрації розчину та можливий вплив цього випромінювання на затухання коливань камертона, яке спостерігається в експериментах та не отримало досі теоретичного пояснення.

Ключові слова: надплинні розчини, дисипативна теплова хвиля, другий звук, перший звук, стінка, яка коливається.

Generation of concentration and temperature oscillations by vibrating bodies in superfluid ^{3}He–^{4}He solution

T.G. Vikhtinskaya, K.E. Nemchenko, and S.Yu. Rogova

We study the generation of concentration and temperature oscillations in waves of the first and second sounds and in a thermal wave by vibrating bodies in superfluid solutions of ^{3}He–^{4}He with a small concentration exceeding 10% of ^{3}He are studied. In particular, the possibility of radiation of second sound and a thermal dissipative wave by an oscillating tuning fork, the efficiency of such radiation as a function of the concentration of the solution, and the possible effect of this radiation on the damping of vibrations of the tuning fork, which is observed in experiments and has not yet been explained theoretically are considered in this paper.

Keywords: superfluid solutions, dissipative heat wave, second sound, first sound, oscillating wall.