

Прецессионные солитоны в полосовой доменной структуре

А.Б. Борисов^{1,2}, В.В. Киселев^{1,3}, А.А. Расковалов^{1,3}

Институт физики металлов УрО РАН, 18, ул. Софьи Ковалевской, г. Екатеринбург, 620108, Россия

²*Институт естественных наук и математики УрФУ, ул. Куйбышева, 48, г. Екатеринбург, 620026, Россия*

³*Физико-технологический институт УрФУ, ул. Мира, 19, г. Екатеринбург, 620002, Россия*

E-mail: bor1947@gmail.com;

kiseliev@imp.uran.ru;

raskovalov@imp.uran.ru

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2017 г., опубликована онлайн 27 июня 2018 г.

Найдены новые решения уравнения Ландау–Лифшица для ферромагнетика с легкоосной анизотропией, которые описывают магнитные солитоны, сильно связанные с полосовой доменной структурой. Они служат элементарными переносчиками макроскопических сдвигов структуры и при определенных условиях являются зародышами перемагничивания материала. Показано, что неоднородная эллиптическая прецессия намагниченности в ядре солитона приводит к колебаниям ближайших доменных стенок структуры. Исследована модуляционная неустойчивость солитонов вблизи границ их существования.

Знайдено нові рішення рівняння Ландау–Ліфшица для феромагнетика з легковісною анізотропією, які описують магнітні солітони, сильно пов'язані зі смуговою доменною структурою. Вони служать елементарними переносниками макроскопічних зрушень структури і при певних умовах є зародками перемагнічування матеріалу. Показано, що неоднорідна еліптична прецесія намагніченості в ядрі солітону призводить до коливань найближчих доменних стінок структури. Досліджено модуляційну нестійкість солітонів поблизу кордонів їх існування.

PACS: 05.45.Yv Солитоны;

75.60.Ch. Доменные стенки и доменная структура.

Ключевые слова: уединенные домены, доменные границы, нелинейная волна намагниченности, уравнение Ландау–Лифшица, задача Римана.

1. Введение

В работах А.М. Косевича убедительно обоснована необходимость парадигмы солитонов при анализе сильно возбужденных состояний магнитных сред, и непосредственным интегрированием уравнений Ландау–Лифшица найдено много солитонных решений. Результаты анализа солитонов в магнетиках с однородным основным состоянием подытожены в коллективной монографии [1], которая стала классической. Показано, что некоторые солитоны можно трактовать как связанные состояния большого числа магнонов. Эти исследования сыграли важную роль в понимании физической природы нелинейных частицеподобных распределений намагниченности, стали ориентирами в поиске новых полностью интегрируемых систем. Под интегрируемостью далее понимается весьма сильное утверждение: возможность построения всех решений модели в опре-

деленном классе функций, например, убывающих на бесконечности. Для этого исходные нелинейные уравнения должны допускать представление в виде условия совместности некоторой вспомогательной системы линейных дифференциальных уравнений. Важное место среди интегрируемых моделей занимают динамические уравнения Ландау–Лифшица для квазиодномерных ферромагнетиков с одноосной и двухосной анизотропией [2,3].

В настоящее время подробно изучены нелинейные волны и солитоны на фоне однородного основного состояния одно- и двухосных ферромагнетиков [1,4,5]. Между тем, неоднородные доменные структуры существенно влияют на многие физические свойства магнитных материалов. Изучение магнитных солитонов в доменных структурах остается одной из важнейших проблем теории магнетизма. Простейшей является по-

лосовая доменная структура — одномерная решетка из доменных стенок (топологических солитонов), разделяющих области с противоположными направлениями намагниченности. Обсудим особенности задачи о нелинейной динамике доменной структуры одноосного ферромагнетика.

Напомним сначала, что строение отдельной доменной стенки в главном приближении можно описать в рамках модели легкоосного ферромагнетика, которая учитывает основные взаимодействия — энергию Гейзенберга и энергию кристаллографической анизотропии. Изолированная стенка разделяет два однородных основных состояния среды с одинаковой плотностью энергии и разными направлениями спонтанной намагниченности. В этом смысле она удерживается топологией. Периодическая доменная структура топологией не удерживается.

Обменные взаимодействия являются короткодействующими, поэтому не способны сформировать и упорядочить в пространстве неоднородные распределения намагниченности больших размеров. Для соседних спиновых моментов среды магнитостатические силы малы по сравнению с обменными. Однако они становятся определяющими для моментов, находящихся на больших расстояниях друг от друга, и благоприятствуют образованию неоднородных периодических структур. Силы кристаллографической анизотропии выделяют предпочтительные направления. Области, где направления намагниченности близки к таковым, будут расширяться, а области, намагниченные в других направлениях, — сокращаться. В конечном счете образуется периодическая структура из протяженных однородно намагниченных областей и тонких переходных слоев. Период доменной структуры определяется дальнедействующими магнитостатическими полями. Однако при теоретическом описании квазиодномерных солитонов в полосовой доменной структуре в первом приближении можно пренебречь магнитостатическими силами в уравнении Ландау–Лифшица, так как их основной вклад учитывается заданием периода доменной структуры.

Важно и другое обстоятельство: в модели Ландау–Лифшица вектор намагниченности $\mathbf{M}(x, t)$ (x, t — пространственная координата и время) принимает значения на сфере $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$. Поэтому полосовая доменная структура топологически не отличается от однородного распределения поля \mathbf{M} . Непрерывной деформацией ее можно «стянуть» к состоянию с $\mathbf{M} = \text{const}$. Это означает, что должна проявиться неустойчивость при рассмотрении малых добавок к полосовой структуре. В настоящей работе в пренебрежении магнитостатической энергией исследован спектр малых колебаний намагниченности около равновесных положений полосовой доменной структуры легкоосного ферромагнетика. Спектр имеет две ветви, из которых нейтрально устойчива только ветвь активационных мод. Неустой-

чивость ветви квазизвуковых продольных колебаний структуры имеет чрезвычайно малые инкременты временного нарастания. В такой ситуации «схлопыванию» доменной структуры в однородное состояние могут препятствовать закон сохранения проекции полной намагниченности на ось анизотропии (ось Oz)

$$\int_0^R M_3(x, t) dx = \text{const} \quad (1)$$

(R — размер образца) и нелинейные взаимодействия, которые не учитываются при линейном анализе устойчивости доменной структуры. В данной работе мы покажем, что нелинейные взаимодействия приводят к локализации возмущений и образованию прецессионных солитонов в полосовой доменной структуре.

Ограничение $\mathbf{M}^2 = M_0^2 = \text{const}$ обуславливает сильную геометрическую нелинейность уравнений Ландау–Лифшица. Поэтому анализ солитонов в доменной структуре легкоосного ферромагнетика в настоящее время возможен только с привлечением специальных методов интегрирования. Некоторые результаты в этом направлении получены с помощью алгеброгеометрических методов конечнозонного интегрирования [6–8]. Однако такой подход не дает эффективного решения указанного класса задач, так как приводит к малоизученным многомерным τ -функциям и трансцендентным уравнениям на параметры солитонов.

В данной работе для исследования солитонов в легкоосном ферромагнетике с полосовой доменной структурой привлекается метод интегрирования уравнений Ландау–Лифшица с помощью задачи Римана на торе. Эффективность подобной процедуры ранее была продемонстрирована на примере изучения нелинейной динамики спиральных магнитных структур в рамках модели sine-Gordon [5,9–13]. В предлагаемом подходе явные формулы для солитонов в полосовой доменной структуре выражаются через хорошо изученные эллиптические функции и допускают подробный анализ.

Мы покажем, что магнитные солитоны, подобно дислокациям в кристаллах [14], служат элементарными переносчиками макроскопических сдвигов доменной структуры и при определенных условиях являются зародышами перемагничивания материала. Неоднородная эллиптическая прецессия намагниченности в ядре солитона индуцирует деформации и продольные колебания соседних доменных стенок структуры. Вблизи границ области существования солитона происходит его трансформация либо в малоамплитудные спин-волновые колебания, либо во всплески сильных модуляций полосовой доменной структуры. Но даже в последнем случае неустойчивость развивается только на начальном временном участке, а затем система возвращается в исходное состояние. В этом отношении магнитные солитоны, встроенные в доменную структуру, напоминают «со-

литоны Кузнецова–Ма, Ахмедиева и Перегрин» над неустойчивыми состояниями, которые с превосходной точностью воспроизводятся в лабораторных экспериментах по изучению экстремальных модуляций в оптоволокне и волн-убийц в водном бассейне.

2. Спектр линейных мод полосовой структуры

Рассмотрим квазиодномерные возбуждения полосовой доменной структуры в легкоосном ферромагнетике с плотностью энергии

$$E = \frac{\alpha}{2}(\partial_x \mathbf{M})^2 - \frac{K_a}{2}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{n})^2, \quad (2)$$

где $\alpha > 0$, $K_a > 0$ — постоянные обменного взаимодействия и магнитной анизотропии вдоль выделенной оси $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Измеряя координату x в единицах магнитной длины $l = \sqrt{\alpha / K_a}$, намагниченность в единицах номинальной намагниченности M_0 , а время t в единицах $1/\omega_0$, где частота однородного ферромагнитного резонанса $\omega_0 = \gamma M_0 K_a$ (γ — магнитомеханическое отношение), уравнение Ландау–Лифшица для нормированной намагниченности \mathbf{S} представим в виде

$$\partial_t \mathbf{S} = [\mathbf{S} \times \partial_x^2 \mathbf{S}] + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S})[\mathbf{S} \times \mathbf{n}], \quad \mathbf{S}^2 = 1. \quad (3)$$

Полосовой доменной структуре отвечает статическое решение уравнения (3):

$$\mathbf{S}^{(0)}(x) = (\sin \theta_0 \cos \varphi_0, \sin \theta_0 \sin \varphi_0, \cos \theta_0), \quad (4)$$

$$\theta_0 = \pi/2 - \text{am}(\chi, k),$$

где $\varphi_0 = \text{const}$, $\chi = x/k$, $\text{am}(\chi, k)$ — эллиптическая амплитуда Якоби с модулем $0 < k \leq 1$ [15, 16]. В доменах шириной $L_0 = 2Kk$ распределение намагниченности почти однородно: $\mathbf{S}^{(0)} \approx (0, 0, \pm 1)$. Соседние домены с противоположными направлениями намагниченности разделены доменными стенками толщиной $l_0 = 2K'k/\pi$ [5, 17], в которых

$$\mathbf{S}^{(0)} \approx \left(\frac{\cos \varphi_0}{\text{ch } \xi}, \frac{\sin \varphi_0}{\text{ch } \xi}, \text{th } \xi \right), \quad \xi = l_0^{-1}(x - L_0 p).$$

Здесь $K = K(k)$ и $K' = K(k')$ — эллиптические интегралы первого рода от модуля k и дополнительного модуля $k' = \sqrt{1 - k^2}$. Угол φ_0 задает геометрию разворота намагниченности. В стенках блоховского ($\varphi_0 = \pm \pi/2$) и неелевского ($\varphi_0 = 0, \pi$) типов она становится особенно простой (вектор $\mathbf{S}^{(0)}$ вращается в плоскости Oyz и Oxz соответственно). Доменные стенки блоховского типа не создают магнитостатических полей.

Модель (3) учитывает основные взаимодействия, приводящие к образованию доменных стенок в ферромагнетиках. С ее помощью удалось теоретически описать процессы перемагничивания в массивных образцах с

полосовой доменной структурой [18]. В то же время в рамках данной модели оказываются неустойчивыми линейные моды доменной структуры. Остановимся на этом подробнее.

Для нахождения спектра малых колебаний намагниченности вблизи доменной структуры от векторного поля \mathbf{S} преобразованием $\mathbf{S} = D\mathbf{m}$:

$$D = FT, \quad F = \begin{pmatrix} \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 & 0 \\ -\cos \varphi_0 & \sin \varphi_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_0 & \sin \theta_0 \\ 0 & -\sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{pmatrix},$$

удобно перейти к новому полю \mathbf{m} , в терминах которого доменная структура выглядит особенно просто: $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 = (0, 0, 1)$, а малые добавки к ней

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \tilde{\mathbf{m}}, \quad \tilde{m}_1 + i\tilde{m}_2 = \psi, \quad \tilde{m}_3 = -\frac{|\psi|^2}{2}$$

удовлетворяют линеаризованному уравнению

$$i\partial_t \psi + \hat{L}\psi + \frac{k'^2}{2k^2} \psi^* = 0; \quad \hat{L} = k^{-2} \partial_\chi^2 - 2\text{sn}^2 \chi + \frac{1}{2}(1 + k^{-2}). \quad (5)$$

Здесь и далее, если не оговорено особо, используются эллиптические функции Якоби с модулем k : $\text{sn } \chi \equiv \sin[\text{am}(\chi, k)]$ и т. д. Поле $\psi(x, t)$ выражается через решения $\Lambda(u, \chi)$ уравнения Ламе:

$$\hat{L}\Lambda = -\left(\frac{k'^2}{2k^2} + \text{cn}^2 u \right) \Lambda, \quad \text{cn } u \equiv \cos[\text{am}(u, k)]. \quad (6)$$

Комплексный спектральный параметр u введен так, чтобы он совпал с таковым для полученных далее солитонных возбуждений доменной структуры. Выразим солитонные решения модели Ландау–Лифшица (3) через эллиптические функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$. Функции Вейерштрасса в параллелограмме периодов имеют только нули и полюсы и обладают более простыми по сравнению с функциями Якоби трансформационными свойствами. Это упрощает анализ солитонов.

Уравнение Ламе (6) имеет два линейно независимых решения $\Lambda(\pm u, \chi)$. В терминах сигма-функций Вейерштрасса $\Lambda(u, \chi)$ имеет вид [19]

$$\Lambda(u, \chi) \sim N(u, \chi) e^{i p_\Lambda(u) x}, \quad p_\Lambda(u) = -ik^{-1} Z(u, k);$$

$$N(u, \chi) = \frac{\sigma(\chi - u) \sigma(\chi - u + 2K)}{\sigma(\chi + iK') \sigma(\chi + iK' + 2K)} \exp\left(2\eta_3 \chi + \frac{\eta_1 u \chi}{K} \right). \quad (7)$$

Здесь $Z(u, k)$ — дзета-функция Якоби, параметры η_1, η_2 характеризуют трансформационные свойства функций Вейерштрасса [15,16].

Осциллирующие во времени решения уравнения (6) имеют вид

$$\psi(u, \chi) \sim a_0(u)\Lambda(u, \chi)e^{i\omega(u)t} + b_0(u)\Lambda^*(u, \chi)e^{-i\omega^*(u)t}, \quad (8)$$

где комплексная частота равна

$$\omega(u) = k^{-1} \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

а спектральные плотности $a_0(u)$ и $b_0(u)$ связаны соотношением

$$\left(\omega(u) + \frac{k'^2}{2k^2} + \operatorname{cn}^2 u \right) a_0 - \frac{k'^2}{2k^2} b_0^* = 0.$$

Здесь знак «*» означает комплексное сопряжение.

Поскольку в представлении (7) функция $N(u, \chi)$ периодична по координате x : $N(\chi \pm 2K) = -N(\chi)$, пространственная ограниченность функций Ламе при $\chi \rightarrow \pm\infty$ предполагает вещественность квазиимпульса $p_\Lambda(u)$. Это возможно только на интервалах

$$\Gamma_1 = \{u = iv, |v| \leq 2K'\}, \quad \Gamma_2 = \{u = iv - K, |v| \leq 2K'\}, \quad (9) \pmod{2K, 4iK'}$$

(см. рис. 1). Сразу отметим, что комплексные числа u из области D_+ (ПЗ), заштрихованной на рис. 1, параметризуют солитонные возбуждения доменной структуры. Отрезки $\Gamma_{1,2}$ изображены в схеме «приведенных зон» по $\operatorname{mod}(2K, 4iK')$.

Контуры Γ_1 соответствуют линейным колебаниям доменной структуры с вещественными частотами:

$$\frac{1}{k} \leq \omega_1 = \omega(u = iv) = \frac{\operatorname{dn}(v, k')}{k \operatorname{cn}^2(v, k')} < \infty.$$

Это активационная ветвь внутримоментных спин-волновых мод [20,21]. Закон дисперсии $\omega_1 = \omega_1(p_\Lambda)$ в неявном виде определяется соотношениями (см. рис. 2)

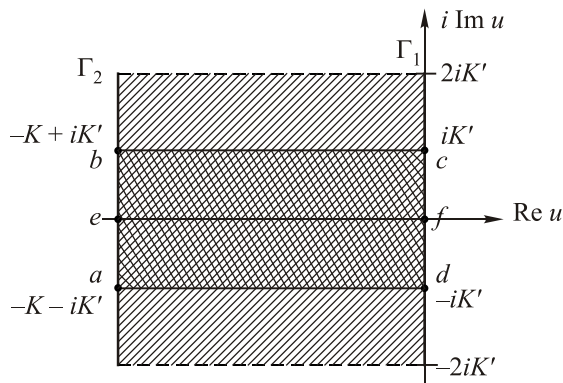


Рис. 1. Контуры $\Gamma_{1,2}$ непрерывного спектра задачи Римана. Заштрихованные области соответствуют солитонам.

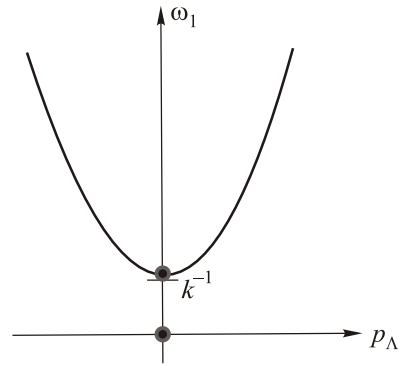


Рис. 2. Спектр спиновых волн доменной структуры.

$$\omega_1 = k^{-1} \operatorname{cn}(iv, k) \operatorname{dn}(iv, k), \quad p_\Lambda(iv) = -ik^{-1} Z(iv, k).$$

На контуре Γ_2 частоты второй ветви спектра

$$\omega_2 = \omega(u = iv - K) = \frac{ik'^2 \operatorname{sn}(v, k') \operatorname{cn}(v, k')}{k \operatorname{dn}^2(v, k')}$$

оказываются чисто мнимыми всюду, кроме точки $u = -K$. В точке $u = -K$ имеем $\omega_2 = p_\Lambda = 0$.

Полученные результаты свидетельствуют о неустойчивости доменной структуры (4) по линейному приближению. Однако линейзация не дает полного представления о волновых процессах в доменной структуре. По мере развития неустойчивости линейное приближение нарушается. Становятся важными эффекты взаимодействия разных мод. Нелинейные взаимодействия могут приводить к локализации возмущений и стабилизации доменной структуры.

Приведем численные оценки инкремента $|\omega_2(v)| = \delta$ линейных мод. Он обращается в нуль при $v = 0, \pm K'$ и достигает максимального значения $\delta_{\max} = (1-k)/k^{3/2}$, когда $v = \pm K'/2$. В образцах с доменной структурой отношение $L_0/l_0 = \pi K(k)/K(k') \gg 1$. Это возможно, только если $k' \ll 1$. При таких k' : $L_0/l_0 \approx 2 \ln(4/k')$. В массивных образцах $L_0/l_0 \sim 10^2$, поэтому инкремент пренебрежимо мал: $\delta_{\max} = O(k'^2)$, $k' \approx 4 \exp(-0,5 \cdot 10^2) \sim 10^{-21}$. В то же время отношение L_0/l_0 сильно меняется в зависимости от формы и размеров образца. В пленках возможны случаи, когда $L_0/l_0 \approx 1$ [20,21]. В данной работе численные расчеты выполнены при условии $L_0/l_0 \approx 9,5$. При этом значение параметра k близко к единице: $k = 0,9994$ ($K \approx 4,75$, $K' \approx \pi/2$). Тогда доменные стенки структуры интенсивно взаимодействуют между собой. Однако даже в этом случае $\delta_{\max} = 6 \cdot 10^{-4} \ll 1$.

На наш взгляд, вопрос о том, насколько хорошо модель Ландау–Лифшица (3) соответствует экспериментальным данным, может быть решен только после построения и анализа ее точных, а не приближенных решений. В данной работе для этой цели предложен специальный вариант метода «одевания» на торе. Мы

покажем, что нелинейные взаимодействия приводят к образованию в доменной структуре пространственно локализованных структурно устойчивых солитонов. В ядре каждого солитона намагниченность совершает прецессию с частотой ω . Внутренняя прецессия стабилизирует солитоны. Вне ядер солитонов намагниченность среды совершает лишь малые колебания относительно равновесных положений полосовой доменной структуры (4). Мы исследуем волновые процессы, которые сопровождают изменения солитонов, когда их параметры приближаются к множествам $\Gamma_{1,2}$ непрерывного спектра линейных мод.

В пределе $k \rightarrow 1$ период полосовой структуры стремится к бесконечности и статическое решение (4) превращается в уединенную доменную стенку или в однородное распределение намагниченности. При этом спин-волновая мода ω_1 дает спектр линейных магнов однородного состояния:

$$\omega_1 = \cos^{-2} v, \quad p = \operatorname{tg} v; \quad \omega_1 = 1 + p^2.$$

Точка $\omega_2 = 0$, $p = 0$ соответствует трансляционной моде доменной стенки. Ее «неустойчивость» связана просто с возможностями сдвига центра доменной стенки. Напомним, что в модели легкоосного ферромагнетика закон сохранения (1) приводит к запрету на движение изолированной доменной стенки [5].

Отметим принципиальное отличие задачи о солитонах в доменной структуре легкоосного ферромагнетика от схожей проблемы описания в рамках модели sine-Gordon солитонов в несоизмеримой фазе кристаллов без центра инверсии. В несоизмеримой фазе период полосовой доменной структуры фиксируется дивергентными членами в выражении для плотности энергии системы. В магнетиках и мультиферроиках со спиральной структурой они учитывают взаимодействие Дзялошинского–Мория (инварианты Лифшица) в контексте феноменологического подхода. Параметр порядка модели sine-Gordon меняется не на поверхности сферы, а на окружности. Спектр линейных мод содержит две ветви, отвечающие «внутридоменным» и «внутриграничным» колебаниям полосовой структуры. Подробный анализ такой задачи содержится в работах [22,23].

3. Прецессирующие солитоны

Обсуждение математических вопросов, связанных с построением солитонных решений модели Ландау–Лифшица (3) при наличии доменной структуры, выходит за рамки данной статьи. Общая схема интегрирования модели с помощью задачи Римана на торе обсуждается в Приложении. Детали вычислений содержатся в [24]. В Приложении приведено выражение (П4) для односолитонного возбуждения полосовой доменной структуры в терминах сигма- и дзета-функций Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$. Оно имеет вид «солитона огибающей» на фоне доменной структуры с периодом

$\lambda = 2L_0 = 4Kk$. Динамика солитона характеризуется скоростью V перемещения его ядра и частотой ω прецессии намагниченности (вокруг оси Oz) в ядре солитона, которые входят в комбинации $-\kappa(x - Vt) + i(\omega t - \eta x)$, где η — волновое число волновых процессов в ядре солитона, κ^{-1} — характерная длина, в пределах которой происходят наиболее заметные изменения намагниченности в солитоне. Эта длина может меняться в широких пределах. В Приложении все перечисленные величины и солитонное решение выражены в терминах спектрального параметра $u = \mu$ из области D_+ (П3). Заметим, что солитонные решения с параметрами μ и $\mu \pm 2iK'$ отличаются только несущественным переопределением произвольных постоянных. Поэтому достаточно проанализировать солитоны (П4) с параметрами μ из четырехугольника $abcd$, который выделен на рис. 1 двойной штриховкой. Причем одну из горизонтальных сторон четырехугольника, например ad , можно исключить. Положим $\mu = -\rho + i\theta$, где $0 < \rho < K$, $-K' < \theta \leq K'$. Тогда вещественные числа ρ и θ определяют все характеристики солитона: его частоту, волновой вектор, скорость, область локализации и амплитуду.

Солитон (П4) «раздвигает» доменную структуру, что проявляется в макроскопическом сдвиге доменов вне ядра солитона. Полный сдвиг доменной структуры Δ из-за образования в ней солитона выражается через параметр μ :

$$\Delta = -4\operatorname{Re}\mu = 4\rho \quad (0 < \rho < K).$$

Здесь речь идет о сдвиге структуры по координате $\chi = x/k$. Напомним, что размер домена по переменной χ равен $2K$. Подобно дислокации в кристалле, солитон (П4) служит переносчиком макроскопического сдвига $\Delta = 4\rho$ вдоль доменной структуры. Мы показали [24], что парные столкновения солитонов являются упругими. Важно, что они сопровождаются локальными сдвигами доменной структуры.

Обсудим физические особенности солитонов в зависимости от значений параметра μ . Наиболее просты и удобны для наблюдения неподвижные солитоны. Солитон (П4) неподвижен в двух случаях: $\theta = 0$ и $\theta = K'$. Значениям $\mu = -\rho$ ($0 < \rho < K$) (линии ef на рис. 1) соответствуют пространственно симметричные солитоны, в центре которых намагниченность никогда не достигает насыщения: $|S_3| < 1$. Частота их внутренней прецессии

$$0 < \omega = k^{-1} \operatorname{cn} \rho \operatorname{dn} \rho < k^{-1}.$$

Неподвижные солитоны с $\mu = -\rho + iK'$ ($0 < \rho < K$) (линия bc на рис. 1) асимметричны. В их центре намагниченность может достигать насыщения. Частота внутренней прецессии в ядре таких солитонов лежит в интервале

$$0 < |\omega| = \frac{\operatorname{cn} \rho \operatorname{dn} \rho}{k \operatorname{sn}^2 \rho} < \infty.$$

Полученные результаты обобщают анализ неподвижных солитонов на фоне однородного состояния легкоосного ферромагнетика ($k \rightarrow 1$), который был впервые выполнен в работах теоретической группы А.М. Косевича [1].

Когда параметр μ приближается к линии ab , солитонные возбуждения вырождаются в малоамплитудные спиновые волны. Вблизи отрезка cd решение (П4) описывает сильные нелинейные модуляции и перемагничивания структуры. Их мы обсудим отдельно.

Через параметры μ и k наиболее просто выражаются все наблюдаемые величины. Вместо формальных параметров μ и k всегда можно ввести подходящие физические переменные. Например, для двухпараметрических неподвижных солитонов вместо $\mu = -\rho$ и k в качестве физических параметров можно выбрать период структуры $\lambda = 2L_0 = \lambda(k)$ и частоту прецессионных солитонов $\omega = \omega(\rho, k)$.

Перейдем к более подробному анализу неподвижных солитонов. Выделим из (П4) поворот на угол φ_0 в плоскости Oxy :

$$(S_1 - iS_2) \exp\left(i\left[\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right]\right) \equiv \tilde{S}_1 - i\tilde{S}_2.$$

Для полосовой структуры блоховского типа ($\varphi_0 = \pm\pi/2$) вектор намагниченности \mathbf{S} в новых обозначениях будет иметь компоненты $\mathbf{S} = (\pm\tilde{S}_1, \pm\tilde{S}_2, S_3)$.

Обсудим неподвижный симметричный солитон с $\mu = -\rho$ (отрезок ef на рис. 1). Ему отвечает решение

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2g_0 \cos(\omega\bar{t})}{f_0^2 + g_0^2 + 1 + 2h_0 f_0 \sin(\omega\bar{t}) + (h_0^2 - 1) \sin^2(\omega\bar{t})}, \\ \tilde{S}_2 &= \tilde{c} + \frac{2g_0 [f_0 \tilde{s} - g_0 \tilde{c} + h_0 \tilde{s} \sin(\omega\bar{t})]}{f_0^2 + g_0^2 + 1 + 2h_0 f_0 \sin(\omega\bar{t}) + (h_0^2 - 1) \sin^2(\omega\bar{t})}, \\ S_3 &= -\tilde{s} + \frac{2g_0 [f_0 \tilde{c} + g_0 \tilde{s} + h_0 \tilde{c} \sin(\omega\bar{t})]}{f_0^2 + g_0^2 + 1 + 2h_0 f_0 \sin(\omega\bar{t}) + (h_0^2 - 1) \sin^2(\omega\bar{t})}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\bar{t} = t - t_0$, $t_0 = \text{const}$; $\omega(\rho) = k^{-1} c_\rho d_\rho \approx \text{ch}^{-2} \rho$ в пределе широких доменов; $h_0 = kc_\rho / d_\rho$, $c_\rho = \text{sn } \rho$, $d_\rho = \text{dn} \rho$; $\rho = \Delta / 4$; $\tilde{s} = \text{sn } \tilde{\chi}$, $\tilde{c} = \text{cn } \tilde{\chi}$, $\tilde{\chi} = \chi + \Delta / 2$, а коэффициенты g_0 и f_0 содержат периодическую зависимость от x с периодом $2L_0 = 4Kk$ доменной структуры и экспоненциальные зависимости $\exp[\pm Z(\rho, k)(\chi - \chi_0)]$ солитонной локализации:

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{d_\rho}{s_\rho} \left[\frac{s_3 a_-^2 e^{2y}}{1 + ks_3} + \frac{s_1 a_+^2 e^{-2y}}{1 + ks_1} \right], \\ f_0 &= \frac{1}{s_\rho} \left[\frac{c_3 a_-^2 e^{2y}}{1 + ks_3} + \frac{c_1 a_+^2 e^{-2y}}{1 + ks_1} \right]; \\ 2y &= Z(\rho, k)(\chi - \chi_0), \quad \chi_0 = \text{const}. \end{aligned}$$

Здесь $s_\rho = \text{sn } \rho$, $s_1 = \text{sn } (\chi + \rho)$, $s_3 = \text{sn } (\chi + 3\rho)$, $c_1 = \text{cn } (\chi + \rho)$, $c_3 = \text{cn } (\chi + 3\rho)$; коэффициенты a_\pm определены в Приложении.

Асимптотики при $x \rightarrow \pm\infty$ общего решения (П4) приведены в Приложении. Их анализ предполагает использование нетривиальных тождеств для эллиптических функций. Однако основной результат можно предсказать без вычислений. Решение (П4) удовлетворяет граничным условиям (П2) на бесконечности. Поэтому малые колебания намагниченности вдали от солитона имеют вид решения линеаризованной задачи. Ядро солитона раздвигает полосовую структуру на расстояние $k\Delta = 4\rho k$. Полную ширину d солитона можно оценить как

$$d \sim 2\kappa^{-1} + \Delta k,$$

где κ^{-1} — ширина области наиболее резкого изменения намагниченности в солитоне. При $\mu = -\rho$ она равна $\kappa^{-1} = k / Z(\rho)$. Более подробные результаты будут приведены в работе [25].

Эллиптичность и неоднородность прецессии намагниченности в ядре солитона (10) приводит к продольным колебаниям доменной структуры. Вдали от центра солитона (при $|y| \gg 1$) они имеют узловые точки:

$$\begin{aligned} \chi_n &= -2Kn - 3\rho, \quad n = 1, 2, 3... \quad \text{при } x \ll -1; \\ \chi_m &= 2Km - \rho, \quad m = 0, 1, 2, 3... \quad \text{при } x \gg 1. \end{aligned}$$

На рис. 3 узлы обозначены жирными точками и пронумерованы цифрами в кружочках. Ядро солитона расположено между узлами с номером 1. В узлах солитон (10) «прикреплен» к структуре: его намагниченность в точках $\chi = \chi_n, \chi = \chi_m$

$$\mathbf{S} = (c_0 \tilde{c}, s_0 \tilde{c}, -\tilde{s}), \quad s_0 = \sin \varphi_0, \quad c_0 = \cos \varphi_0. \quad (11)$$

при любых t совпадает с равновесными значениями (П2) доменной структуры в тех же точках. Соседние узлы отстоят друг от друга на $2K$ — полпериода по переменной $\chi = x/k$. При переходе от узла к узлу направление вектора \mathbf{S} (11) меняется на противоположное. Колебания намагниченности сосредоточены в промежутках между узлами. Части доменов, расположенные между узлами $2j-1$ и $2j$ ($2j$ и $2j+1$), $j = 1, 2, 3, \dots$, правее и левее центра бризера периодически смещаются вдоль структуры синфазно по отношению друг к другу и в противофазе (в фазе) с ядром бризера (см. рис. 3).

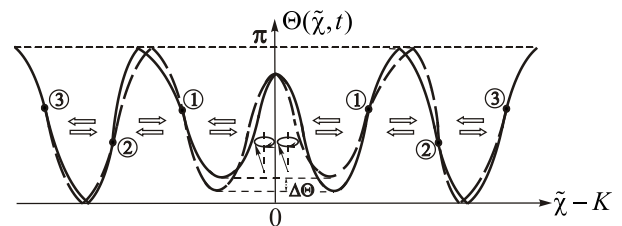


Рис. 3. Характер колебаний доменной структуры около ядра прецессионного солитона (10).

На рис. 3 центр солитона находится в середине одного из доменов структуры. Проекция намагниченности S_3 в центре солитона ($\tilde{\chi} = K$) меняется в пределах $1 - 2s_p^2 \leq S_3(\tilde{\chi} = K) \leq 1 - 2k^2s_p^2$, принимая каждое из граничных значений дважды за период. Сплошная и штриховая линии на рис. 3 соответствуют углу $\Theta = \text{Arccos } S_3$ в моменты времени $\bar{t} = 0$ и $\bar{t} = T/2$, когда $S_3(\tilde{\chi} = K)$ достигает максимума (T — период колебаний).

Параметр ρ задает макроскопический сдвиг $\Delta = 4\rho$ доменной структуры при образовании в ней солитона. В зависимости от ρ строение ядра солитона меняется. При малых значениях $0 < \rho < 0,1K$ солитон (10) представляет собой «обрезанную» малоамплитудную стоячую волну прецессии с нулевым квазиимпульсом на фоне доменной структуры. Ее протяженность $\sim \rho^{-1}$. При $0,1K \leq \rho \leq 0,5K$ ядро солитона локализовано в пределах одного домена структуры, где компонента S_3 пульсирует: $\Delta\Theta \sim 0,1 - 0,15\pi$ при $0,1K \leq \rho \leq 0,3K$ и $\Delta\Theta \sim 0,05\pi$ при $0,4K \leq \rho \leq 0,5K$ (см. рис. 3).

С ростом ρ в интервале $0,4K \leq \rho \leq 0,6K$ в центре солитона $S_3(\tilde{\chi} = K) \approx -1$. Частота прецессии мала: $0,01 < \omega < 0,1$. Ядро солитона (10) представляет собой зародыш перемагничивания шириной $d \approx 2\rho \sim K$. Зародыш ограничен доменными стенками толщиной $\kappa^{-1} \ll d$. Слева и справа к ним примыкают области малоамплитудной прецессии протяженностью порядка ширины домена структуры. Некруговая прецессия в области локализации солитона вызывает периодические синфазные смещения доменов вдоль структуры на величину $\Delta\chi \sim 0,1 - 0,4K$. На рис. 3 взаимные направления смещений соседних доменов указаны стрелками. Вне ядра солитона они экспоненциально затухают.

С дальнейшим ростом ρ (при $0,6K < \rho < 0,8K$) ширина примыкающих к ядру солитона областей малоамплитудной прецессии быстро растет. При $\rho \approx 0,8K$ их протяженность $\sim 4 - 4,5K$ превышает период структуры.

Перейдем к обсуждению асимметричного неподвижного солитона ($\mu = -\rho + iK'$; отрезок bc на рис. 1). В его центре намагниченность постоянна:

$$\mathbf{S} = (-c_0\tilde{c}, -s_0\tilde{c}, -\tilde{s}).$$

Как и для солитона на однородном фоне [1], фазы вращения намагниченности вокруг оси Oz правее и левее центра солитона различаются на π (см. рис. 4). На рис. 4 центр солитона также находится в середине одного из доменов структуры. Распределение намагниченности имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{s}_1 &= -\frac{2g \sin(\omega\bar{t})}{f^2 + g^2 + 1 + 2hf \cos(\omega\bar{t}) + (h^2 - 1)\cos^2(\omega\bar{t})}, \\ \tilde{s}_2 &= -\tilde{c} + \frac{2g[g\tilde{c} - f\tilde{s} - h\tilde{s}\cos(\omega\bar{t})]}{f^2 + g^2 + 1 + 2hf \cos(\omega\bar{t}) + (h^2 - 1)\cos^2(\omega\bar{t})}, \\ S_3 &= -\tilde{s} + \frac{2g[f\tilde{c} + g\tilde{s} + h\tilde{s}\cos(\omega\bar{t})]}{f^2 + g^2 + 1 + 2hf \cos(\omega\bar{t}) + (h^2 - 1)\cos^2(\omega\bar{t})}, \end{aligned} \quad (12)$$

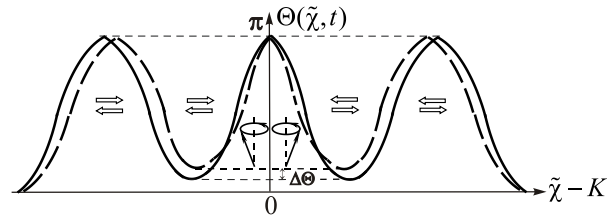


Рис. 4. Прецессионный солитон (12). Обозначения на рис. 4 аналогичны таковым на рис. 3.

$$\bar{t} = t - t_0, \quad t_0 = \text{const}; \quad h = \frac{d\rho}{c\rho}; \quad g = c\rho \left[\frac{\tilde{a}_-^2 e^{2y}}{1 + s_3} - \frac{\tilde{a}_+^2 e^{-2y}}{1 + s_1} \right],$$

$$f = s\rho \left[\frac{d_3 \tilde{a}_-^2 e^{2y}}{1 + s_3} + \frac{d_1 \tilde{a}_+^2 e^{-2y}}{1 + s_1} \right], \quad 2y = (\chi - \chi_0) \text{Re } Z(iK' - \rho),$$

$$\chi_0 = \text{const}; \quad \omega = -d\rho c\rho / (k^2 s_p^2);$$

$$\rho = \Delta / 4, \quad s_1 = \text{sn}(\chi + \rho), \quad s_3 = \text{sn}(\chi + 3\rho), \quad d_1 = \text{dn}(\chi + \rho),$$

$$d_3 = \text{dn}(\chi + 3\rho); \quad s_p = \text{sn } \rho, \quad c_p = \text{cn } \rho, \quad d_p = \text{dn } \rho.$$

Коэффициенты \tilde{a}_\pm вещественны. Они отличаются от a_\pm в (П4) множителями:

$$\frac{a_\pm}{\tilde{a}_\pm} = \exp \left[\mp \frac{\pi i(\chi + 2\rho)}{4K} \right].$$

Как и ранее, вследствие некруговой прецессии ядро солитона периодически меняет свой размер. Однако ограничивающие его доменные стенки теперь колеблются в противофазе. Их колебания передаются соседним доменам, вызывая малые продольные смещения их доменных стенок. Колебания намагниченности в доменах слева (справа) от ядра солитона синфазны (см. рис. 4). В остальном поведение намагниченности качественно такое же, как и для солитона первого типа. Так, при $0,4K < \rho < 0,6K$ ядро солитона представляет собой зародыш перемагничивания с малой прецессией: $0,01 < |\omega| < 0,1$. Заметим, что при k близких к единице и $\rho \ll 1$ частота прецессии возбуждения (12) становится большой: $\omega(\rho) \approx -\text{sh}^{-2}\rho = O(\rho^{-2})$, а область резкого изменения намагниченности — малой: $\kappa^{-1} \sim \rho$. Поэтому может нарушиться условие применимости длинноволнового приближения. Значения ρ следует ограничить условием

$$\kappa^{-1} \sim \left[\frac{k \text{sn } \rho}{\text{cn } \rho \text{dn } \rho + Z(\rho) \text{sn } \rho} \right] \sqrt{\frac{K_a}{\alpha}} \gg a, \quad (13)$$

где a — постоянная кристаллической решетки. В формуле (13) перешли к размерным переменным.

При движении солитона строение его ядра в целом напоминает строение солитона на однородном фоне [1,5]. При прохождении солитона через каждую доменную стенку проекция S_3 намагниченности в его ядре меняет знак. Солитон как бы «опрокидывается», не меняя своей формы.

Поведение солитонов вблизи границ области их существования

Особый интерес представляет поведение решений в областях неустойчивости структуры по линейному приближению (при $\mu = -K + \varepsilon + i\theta$, $0 < \varepsilon \ll 1$; отрезок ab на рис. 1). Неустойчивость приводит к протяженным модуляциям доменной структуры, которые, в общем случае, движутся с большой скоростью. Система как бы стремится избавиться от модуляций. Лучше поддаются наблюдению случаи $\mu = -K + 0$ и $\mu = -K + iK' + 0$, когда модуляции структуры неподвижны. При таких значениях μ солитон сдвигает доменную структуру на период. Потому при $\chi \rightarrow +\infty$ и $\chi \rightarrow -\infty$ решение (П4) имеет одно и то же асимптотическое поведение: $\mathbf{S} \rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)}$ (см. (П2)).

В пределе $\mu = -K + 0$ (точка e на рис. 1) из (10) получаем аperiodическое слабо локализованное эллиптически-полиномиальное возбуждение:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2\bar{t}}{A_0}C(\chi), \quad \tilde{S}_2 = -\text{cn } \chi + \frac{2}{A_0}C(\chi)(k \text{ sn } \chi + \bar{x}), \\ S_3 &= \text{sn } \chi - \frac{2}{A_0}C(\chi)B(\chi), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\bar{t} = tk'^2/k$,

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 &= \bar{t}^2 + (k \text{ sn } \chi + \bar{x})^2 + B^2(\chi), \quad B(\chi) \equiv \text{dn } \chi - k \text{ cn } \chi, \\ C(\chi) &\equiv \bar{x} \text{ cn } \chi + \text{sn } \chi \text{ dn } \chi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= -k^2 \int \text{cn}^2 \chi d\chi = -(\chi - \chi_0) \left[k^2 - \frac{1+k^2}{6} \right] - \\ &\quad - \zeta(\chi + 2K - iK') - \zeta(\chi + iK') + \eta_1. \end{aligned}$$

Положение его центра определяется константой интегрирования χ_0 . Пусть центр возбуждения совпадает с серединой одной из доменных стенок структуры ($\chi_0 = 0$). Тогда в содержащей ее области $|\chi| < K$ все три компоненты намагниченности (14) почти не меняются со временем: $\mathbf{S} \approx \mathbf{S}_2^{(0)}$. В центре доменной стенки намагниченность $\mathbf{S}(\chi = 0) = (-c_0, -s_0, 0)$ не зависит от времени.

Обсудим смещения доменной структуры в области $|\chi| > K$. При $\chi > K$ ($\chi < -K$) с ростом t намагниченность разворачивается на 360 градусов в направлении (против) часовой стрелки. Разворот происходит преимущественно вокруг оси Oz . На рис. 5 сплошной линией изображена проекция $S_3^{(0)} = \text{sn } \chi$, соответствующая фоновой структуре $\mathbf{S}_2^{(0)}$, штриховой — значения S_3 (14) при $t = 0$. Конусы прецессии указывают направление разворота намагниченности в проекции на плоскость Oxy ; цифры в кружочках нумеруют доменные стенки. Интересно, что вдоль структуры смещаются только домены с четными номерами. При $-\infty < t < 0$ с ростом t доменные стенки с центрами в точках $\chi_{2m} = 4Km$, где m — целое, сдвигаются по направлению к началу координат $\chi = 0$ на величину δ_{2m} , а затем

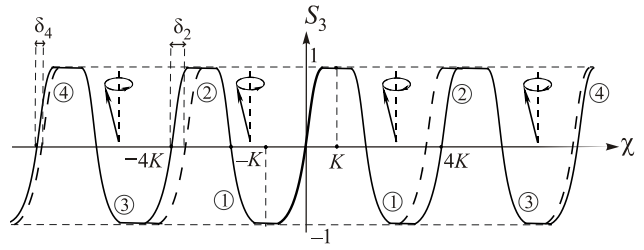


Рис. 5. Аperiodическое смещение доменной структуры в возбуждении (14), локализованном на неподвижной доменной стенке в точке $\chi = 0$.

(при $0 < t < \infty$) возвращаются в исходные положения. Максимальное смещение доменных стенок (по переменной χ) $\delta_2 \approx 0,42K$ составляет величину порядка 0,1 от периода $4K$ структуры. Сдвиги δ_{2m} экспоненциально убывают по мере удаления от центра; $\delta_4 \approx 0,12K$.

Рассмотрим второй случай неподвижных модуляций структуры вблизи границ существования солитона. В пределе $\mu = -K + iK' + 0$ (точка b на рис. 1) получаем точное решение:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= -\frac{2s_\phi \kappa}{r^2 + 1}, \quad \tilde{S}_2 = -\text{cn } \chi + \frac{2c_\phi \kappa}{r^2 + 1}, \quad S_3 = \text{sn } \chi - \frac{2r\kappa}{r^2 + 1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $\kappa \equiv r \text{ sn } \chi + c_\phi \text{ cn } \chi$, $s_\phi \equiv \sin \phi$, $c_\phi \equiv \cos \phi$,

$$\phi = \arg [(2g_2 + i\bar{t}) / (2g_1 + i\bar{t})] + \arg [\text{sn } \chi], \quad \bar{t} = tk'^2/k^2,$$

$$r(\chi, t) = \frac{k'}{2} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1}{m_2} \right), \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{k' \text{ sn } \chi}{\text{dn } \chi + \text{cn } \chi} \left[\frac{2g_1 + i\bar{t}}{2g_2 + i\bar{t}} \right],$$

$$g_1(\chi) = \zeta(\chi) - \frac{\eta_1 \chi}{2K} + \frac{E}{2K}(\chi - \chi_0),$$

$$g_2(\chi) = \zeta(\chi + 2K) - \frac{\eta_1}{2K}(\chi + 2K) + \frac{E}{2K}(\chi - \chi_0),$$

где E — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем k . Характер решения (15) качественно меняется в зависимости от положения центра возбуждения. Пусть центр возбуждения расположен в середине домена ($\chi_0 = K$), см. рис. 6. Тогда намагничен-

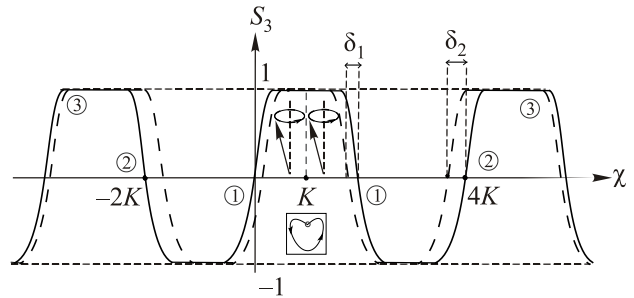


Рис. 6. Аperiodическое смещение доменной структуры в возбуждении (15) с центром в середине домена. Обозначения на рис. 6 аналогичны таковым на рис. 5.

ность в центре домена всегда совпадает с равновесной: $\mathbf{S}(\chi = K) = (0, 0, 1)$. Изменения компоненты S_3 намагниченности локализованы на доменных стенках структуры, причем, в отличие от предыдущего случая, теперь вдоль структуры смещаются все доменные стенки. Амплитуда смещений доменных стенок, ограничивающих центральный домен, определяется уравнением $\arctan \delta_1 = \arctg [4k^2 / (4 - k^4)]$. Отсюда находим $\delta_1 \approx 0,23K$ (порядка 0,125 от ширины домена). В пределах центрального домена ($0 < \chi < 2K$) смещения проекции S_3 вдоль оси структуры сопровождаются разворотом намагниченности вокруг оси Oz на 360 градусов против часовой стрелки. Заметим, что в этой области траектория движения конца вектора \mathbf{S} по поверхности сферы $\mathbf{S}^2 = 1$ имеет сердцевидную форму с выколотой угловой точкой; ей соответствуют моменты времени $t = \pm\infty$ (см. вставку на рис. 6). Крайние стенки доменов, ближайших к центральному, испытывают наибольшие смещения: $\delta_2 \approx 0,34K > \delta_1$. Величина смещений последующих доменных стенок по мере удаления от центра возбуждения быстро падает.

При $\chi_0 = 0$ решение (15) описывает более сложный процесс перемагничивания доменной структуры, происходящий в два этапа (рис. 7). Вначале доменные стенки с центрами в точках $\chi = \pm 2K$ с ростом t движутся по направлению к неподвижной доменной стенке в точке $\chi = 0$. Домены, прилегающие к этой доменной стенке (домены 1), укорачиваются, а следующие за ними (домены 2) — удлиняются. На рис. 7 сплошной линией изображена проекция $S_3^{(0)} = \text{sn}\chi$, соответствующая фоновой структуре $\mathbf{S}_2^{(0)}$; направления движения доменных стенок указаны стрелками. За время $-\infty < t < -t_0$ ($t_0 = k^2 / k' \approx 27,4$) движущиеся доменные стенки достигают точек $\chi = \pm K$, занимая положения, отмеченные на рис. 7 штрихпунктиром. На втором этапе (при $-t_0 < t < 0$) в узких доменах 1 намагниченность разворачивается, принимая значения, соответствующие однородным состояниям в соседних более широких доменах 2. В результате при $t = 0$ узкие домены 1 полностью исчезают, а два широких домена 2 занимают области $|\chi| < 4K$, разделенные доменной стенкой с центром в точке $\chi = 0$ (штриховая линия на рис. 7). Ширина новой доменной стенки почти в два раза меньше ширины доменных стенок структуры. Ос-

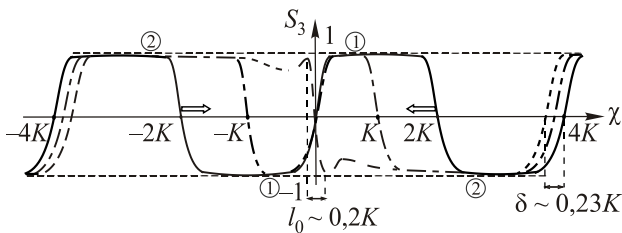


Рис. 7. Процесс перемагничивания доменной структуры в области локализации возбуждения (15) с центром на доменной стенке.

тальные части структуры незначительно смещаются по направлению к центральной доменной стенке. Наибольшие смещения $\delta \sim 0,23K$ испытывают доменные стенки вблизи точек $\chi = \pm 4K$. При $0 < t < +\infty$ указанный процесс перемагничивания происходит в обратной последовательности.

В малых окрестностях точек $\mu = -K$, $\mu = -K + iK'$ аperiodический характер рассмотренных возбуждений меняется на повторение с течением времени продольных колебаний, смещений и перемагничиваний доменной структуры. Таким образом, эти возбуждения можно назвать аналогами «солитона Перегринна» [26] в доменной структуре.

В работах А.М. Косевича и учеников его школы всегда выделялись ключевые моменты каждой конкретной задачи, поднимались и обсуждались наиболее актуальные проблемы текущего развития нелинейной физики. Авторы признательны А.С. Ковалеву за глубокие замечания физического характера, способствовавшие значительному улучшению этой работы.

Работа выполнена в рамках государственного задания ФАНО России (тема «Квант», номер г. р. 01201463332 (AAAA-A18-118020190095-4)).

Приложение: построение солитонных решений модели

Основой метода интегрирования модели (3) служит вспомогательная линейная система [3]

$$\begin{aligned} \partial_x \Psi &= -\frac{i}{2} [w_1 (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2) + w_3 S_3 \sigma_3] \Psi, \\ \partial_t \Psi &= -\frac{i}{2} [w_1 ([\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_1 \sigma_1 + [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_2 \sigma_2) + w_3 [\mathbf{S} \times \partial_x \mathbf{S}]_3 \sigma_3 - \\ &\quad - w_1^2 S_3 \sigma_3 - w_1 w_3 (S_1 \sigma_1 + S_2 \sigma_2)] \Psi, \quad (\text{П1}) \end{aligned}$$

условие совместности которой равносильно уравнению (3). Здесь σ_i — матрицы Паули, коэффициенты $w_{1,3}$ подчинены ограничению $w_1^2 - w_3^2 = 1$. Оно будет согласовано со свойствами периодической структуры (4) при униформизации: $w_1 = \text{sn}(u, k)$, $w_3 = i \text{sn}(u, k)$.

Образование солитонов всегда сопровождается макроскопическими трансляциями доменной структуры. Поэтому решения модели (3) следует искать при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}_2^{(0)} = (\sin \theta_2 \cos \varphi_0, \sin \theta_2 \sin \varphi_0, \cos \theta_2), \quad \chi \rightarrow +\infty, \\ \mathbf{S}(x, t) &\rightarrow \mathbf{S}_1^{(0)} = (\sin \theta_1 \cos \varphi_0, \sin \theta_1 \sin \varphi_0, \cos \theta_1), \quad \chi \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (\text{П2})$$

где $\theta_j = \pi/2 - \arctan(\chi + \Delta_j, k)$; $j = 1, 2$; $\Delta_1 = \Delta$, $\Delta_2 = 0$.

Функциям $\mathbf{S}_j^{(0)}$ отвечают частные решения $\Psi_{\Delta_j}^{(0)}(u, \chi, t)$ ($j = 1, 2$) вспомогательной линейной системы (П1) вида

$$\Psi_{\Delta_j}^{(0)}(u, \chi, t) = \exp\left(-\frac{i\varphi_0}{2}\sigma_3\right) \tilde{M}(u, \chi + \Delta_j) \exp\left(A(u, \chi, t)\sigma_3 - \frac{\eta_1 u \Delta_j}{2K}\sigma_3\right);$$

$$A(u, \chi, t) = ip(u)\chi + \frac{it}{2k} \operatorname{cn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k),$$

$$p(u) = \frac{1}{2i} \left(\frac{\operatorname{sn}(u, k) \operatorname{dn}(u, k)}{\operatorname{cn}(u, k)} + \zeta(u+K) + \zeta(u-K) - \frac{\eta_1 u}{K} \right) = \frac{1}{2i} Z(u, k);$$

$$\tilde{M}(u, \chi) = M(u, \chi) \operatorname{diag} \left([\sigma(-u+K+iK')]^{-1}, [\sigma(u+K+iK')]^{-1} \right);$$

$$M(u, \chi) = \begin{pmatrix} \sigma(\chi-u+K+iK') & \sigma(\chi+u-K+iK') e^{\eta_1(\chi+iK'+u)} \\ \sigma(\chi-u-K+iK') e^{\eta_1(\chi+iK'-u)} & \sigma(\chi+u+K+iK') \end{pmatrix} m(\chi) \exp\left[\frac{\eta_1 u \chi}{2K} \sigma_3\right];$$

$$m(\chi) = \left[\frac{\sigma(iK')\sigma(iK'+2K)}{2\sigma(\chi+iK')\sigma(\chi+iK'+2K)} \right]^{1/2}.$$

Здесь $\sigma(u)$ и $\zeta(u)$ — сигма- и дзета-функции Вейерштрасса с периодами $[4K, 2iK']$.

Матрица $M(u, \chi)$ периодична по χ с периодом $4K$. Для функций $\Psi_{\Delta_j}(u, \chi)$ величина $p(u) = k p_\Lambda(u) / 2$ играет роль блоховского квазимпульса:

$$\Psi_{\Delta_j}(u, \chi \pm 4K, t) = \Psi_{\Delta_j}(u, \chi, t) \exp[\pm 4Ki p(u)\sigma_3].$$

Множество $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (см. (9)) соответствует непрерывному спектру задачи (П1), (П2).

В контексте метода «одевания» интегрирование модели Ландау–Лифшица сводится к поиску решений вспомогательной системы (П1) в виде произведения

$$\Psi(u, x, t) = W(u, x, t) \Psi_{\Delta/2}^{(0)}(u, x, t).$$

Наибольший интерес представляют солитонные возбуждения полосовой доменной структуры. Для них матричная функция $W(u, x, t)$ находится в явном виде методами теории функций комплексной переменной. Для односолитонного возбуждения вычисление сводится к решению следующей задачи Римана. Требуется построить квазипериодическую мероморфную функцию $W(u)$ комплексного параметра u с периодами $[4K, 4iK']$ такую, что ее простые нули $u = \mu, \mu^* - 2K$ и полюсы $u = -\mu^*, -\mu + 2K$ расположены соответственно в областях

$$\begin{aligned} D_+ &= \{u : \operatorname{Im} p(u) > 0\} = \{-K < \operatorname{Re} u < 0, \quad |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \quad \operatorname{mod} (2K, 4iK'); \\ D_- &= \{u : \operatorname{Im} p(u) < 0\} = \{0 < \operatorname{Re} u < K, \quad |\operatorname{Im} u| \leq 2K'\}, \quad \operatorname{mod} (2K, 4iK'). \end{aligned} \tag{П3}$$

Матрица $W(u)$ должна удовлетворять редукциям

$$W(u \pm 2iK') = \sigma_3 W(u) \sigma_3 \exp[\pm \Delta \eta_3];$$

$$W^*[(u \pm 2K)^*] = \sigma_1 W(u) \sigma_1 \exp[\pm \Delta \eta_1 / 2];$$

$$W^*(-u^*) = \sigma_2 W(u) \sigma_2, \quad u \in \Gamma,$$

и условию

$$W(-u)W^\dagger(u^*) = I, \quad u \in \Gamma.$$

В данном случае матричная функция $W(u)$ не нормирована, поэтому редукции определяют ее с точностью до фазовых множителей. Множители фиксируются асимптотическими условиями (П2). Из-за наличия у функции $W(u)$ двух периодов по спектральному пара-

метру u сформулированную задачу называют задачей Римана на торе. В работах [5,9–13] метод задачи Римана на торе, предложенный в [27–29], распространен на решение такого класса задач.

Если солитонная матричная функция $W(u, x, t)$ найдена, то с ее помощью точное решение исходной существенно нелинейной модели (3) восстанавливается по формуле

$$S_k \sigma_k = W(u) (S_{\Delta/2}^{(0)})_k \sigma_k W^\dagger(-u^*)|_{u=-iK'},$$

$$S_{\Delta/2}^{(0)} = (\sin \theta_{\Delta/2}^{(0)} \cos \varphi_0, \sin \theta_{\Delta/2}^{(0)} \sin \varphi_0, \cos \theta_{\Delta/2}^{(0)}),$$

где $\theta_{\Delta/2}^{(0)} = \pi - 2 \operatorname{am}(\chi + \Delta/2, k)$.

Опуская детали вычислений, приведем односолитонное решение:

$$S_3 = \frac{(|\alpha|^2 - |\beta|^2)\tilde{s} + (\beta^*\alpha + \alpha^*\beta)\tilde{c}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \quad (П4)$$

$$S_1 - iS_2 = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\tilde{c} - 2\alpha\beta\tilde{s}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} e^{-i\varphi_0},$$

где $\alpha = c_\mu |m_2|^2 + c_\mu^* |m_1|^2$, $\beta = -im_1 m_2^* (s_\mu + s_\mu^*)$,
 $m_1 = a_- e^{y+i\gamma} + b_+ e^{-y-i\gamma}$, $m_2 = b_- e^{y+i\gamma} + a_+ e^{-y-i\gamma}$;

$$a_\pm = m(\tilde{\chi}) \frac{\sigma(\tilde{\chi} + K + iK' \pm \mu)}{\sigma(K + iK' \pm \mu)} \exp\left[\mp \frac{\eta_1 \mu \tilde{\chi}}{2K}\right],$$

$$b_\pm = m(\tilde{\chi}) \frac{\sigma(\tilde{\chi} - K + iK' \pm \mu)}{\sigma(K + iK' \pm \mu)} \exp\left[\mp \frac{\eta_1 \mu \tilde{\chi}}{2K}\right] + \eta_1(\tilde{\chi} + iK' \pm \mu),$$

$$y = \text{Re} \left[A(\mu, \chi, t) - \frac{\eta_1 \mu \Delta}{4K} \right] + y_0,$$

$$\gamma = \text{Im} \left[A(\mu, \chi, t) - \frac{\eta_1 \mu \Delta}{4K} \right] + \gamma_0.$$

Здесь введены обозначения: $c_\mu = \text{cn } \mu$, $s_\mu = \text{sn } \mu$, $\tilde{s} = \text{sn } \tilde{\chi}$, $\tilde{c} = \text{cn } \tilde{\chi}$; $\tilde{\chi} = \chi + \Delta/2$, $\Delta = 4\rho$; y_0, γ_0 — произвольные вещественные числа. Параметр $\mu = -\rho + i\theta \in D_+$ (область D_+ заштрихована на рис. 1). Функция $A(\mu, \chi, t)$ линейна по x, t :

$$A = [-\kappa(x - Vt) + i(\omega t - \eta x)]/2, \quad \kappa = -\text{Re}Z(\mu)/k > 0,$$

$$\eta = -k^{-1} \text{Im} Z(\mu), \quad V = -\kappa^{-1} k^{-1} \text{Im}(\text{cn } \mu \text{ dn } \mu), \quad (П5)$$

$$\omega = k^{-1} \text{Re}(\text{cn } \mu \text{ dn } \mu).$$

Здесь η и ω — волновое число и частота прецессии намагниченности в ядре солитона, V — скорость движения солитона как целого. Направление скорости (П5) задает знак: $\text{sign } V = -\text{sign } \theta$. Величина κ^{-1} определяет характерную длину, в пределах которой происходят наиболее значительные изменения намагниченности в солитоне.

Вдали от центра солитона (при $|y| \gg 1$) решение (П4) описывает малоамплитудную прецессию намагниченности вокруг ее равновесных положений в доменной структуре:

$$\mathbf{S} = S_R \mathbf{e}_1(\chi) + S_I \mathbf{e}_2 + \left[1 + O(e^{-4|y|})\right] \mathbf{e}_3(\chi). \quad (П6)$$

Векторы \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) образуют ортонормированный репер. При $x \ll -1$ имеем

$$\mathbf{e}_1 = c_0 s_4 \mathbf{i} + s_0 s_4 \mathbf{j} - c_4 \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{S}_1^{(0)};$$

$$S_R \approx -\text{Re}[a X_-], \quad S_I \approx -\text{Im} X_-;$$

$$X_- = \frac{2s_\rho}{c_\theta d_\theta} \left(\frac{c_3 s_\theta d_\theta + c_0 s_3 d_3}{1 - k^2 s_1^2 s_\rho^2} \right) \frac{d_\mu}{a_- b_-} e^{-2y - 2i\gamma} \sim$$

$$\sim \Lambda^*(\chi + \Delta, -\mu^*) e^{-i\omega^*(-\mu^*)t};$$

а при $x \gg 1$

$$\mathbf{e}_1 = c_0 s_\chi \mathbf{i} + s_0 s_\chi \mathbf{j} - c_\chi \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = -s_0 \mathbf{i} + c_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{S}_1^{(0)};$$

$$S_R \approx -\text{Re}[a X_+], \quad S_I \approx -\text{Im} X_+;$$

$$X_+ = \frac{2s_\rho}{c_\theta d_\theta} \left(\frac{c_1 s_\theta d_\theta - c_0 s_1 d_1}{1 - k^2 s_1^2 s_\rho^2} \right) \frac{d_\mu}{a_+ b_+} e^{2y + 2i\gamma} \sim \Lambda(\chi, \mu) e^{i\omega(\mu)t}.$$

Здесь коэффициент $a = kc_\mu / d_\mu$; $c_\mu = \text{cn } \mu$, $d_\mu = \text{dn } \mu$, $s_4 = \text{sn } (\chi + 4\rho)$, $c_4 = \text{cn } (\chi + 4\rho)$, $s_\chi = \text{sn } \chi$, $c_\chi = \text{cn } \chi$; $s_1 = \text{sn } (\chi + \rho)$, $c_1 = \text{cn } (\chi + \rho)$, $d_1 = \text{dn } (\chi + \rho)$, $s_3 = \text{sn } (\chi + 3\rho)$, $c_3 = \text{cn } (\chi + 3\rho)$, $d_3 = \text{dn } (\chi + 3\rho)$; $s_\rho = \text{sn } \rho$, $s_\theta = \text{sn } (\theta)$, $c_0 = \text{cn } (\theta)$, $d_0 = \text{dn } (\theta)$; $s_0 = \sin \varphi_0$, $c_0 = \cos \varphi_0$. При $k = 0,9994$ коэффициент $a \approx 1$. Потому конец вектора \mathbf{S} в плоскости Oe_1e_2 движется по эллипсу, близкому к окружности малого радиуса $|X_\pm|$.

Реальные частота, размер и скорость солитона получаются из безразмерных значений этих величин умножением на множители $\gamma M_0 K_a$, $\sqrt{\alpha / K_a}$, $\gamma M_0 \sqrt{\alpha K_a}$ соответственно. Полагая $M_0 \sim 10^3$ Гс, $\gamma \sim 10^7$ Гц/Гс, $K_a \sim 10-100$, $\alpha \sim 10^3-10^4 a^2$, где $a \sim 10^{-8}$ см — постоянная решетки, находим:

$$\gamma M_0 K_a \sim 10^{11}-10^{12} \text{ Гц},$$

$$\sqrt{\alpha / K_a} \sim 10-100 a \sim 10^{-7}-10^{-6} \text{ см},$$

$$\gamma M_0 \sqrt{\alpha K_a} \sim 10^2-10^3 \text{ м/с}.$$

В качестве примера можно взять Fe или Co.

1. А.М. Косевич, Б.А. Иванов, А.С. Ковалев, *Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны*, Наукова думка, Киев (1983).
2. А.Е. Боровик, В.Н. Робук, *ТМФ* **46**, 371 (1981).
3. Е.К. Sklyanin, *On Complete Integrability of the Landau-Lifshitz Equation*, Preprint LOMI 79-E-3, Leningrad (1979).
4. А.Е. Borovik, S. Klama, and S.I. Kulinich, *Physica D* **32**, 107 (1988).
5. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *Квазиодномерные магнитные солитоны*, Физматлит, Москва (2014).
6. Р.Ф. Бикбаев, А.И. Бобенко, А.Р. Итс, *Уравнение Ландау-Лифшица. Теория точных решений II*, Препринт ДонФТИ-84-7 (82), Донецк (1984).
7. Р.Ф. Бикбаев, А.И. Бобенко, Р.А. Итс, *ДАН* **272**, 1293 (1983).
8. Ю.Ф. Митропольский, Н.Н. Боголюбов (мл.), А.К. Прикарпатский, В.Г. Самойленко, *Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты*, Наукова думка, Киев (1987).
9. В.В. Киселев, А.А. Расковалов, *ТМФ* **173**, 268 (2012).
10. В.В. Киселев, А.А. Расковалов, *ЖЭТФ* **149**, 1260 (2016).
11. V.V. Kiselev and A.A. Raskovalov, *Chaos, Solitons and Fractals* **84**, 88 (2016).

12. В.В. Киселев, А.А. Расковалов, *ФНТ* **42**, 67 (2016) [*Low Temp. Phys.* **42**, 50 (2016)].
13. В.В. Киселев, А.А. Расковалов, *ФТТ* **58**, 485 (2016).
14. А.М. Косевич, *Дислокации в теории упругости*, Наукова думка, Киев (1978).
15. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Маттье*, Наука, Москва (1967).
16. P.F. Byrd and M.D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1971).
17. A.B. Borisov and V.V. Kiselev, *Physica D* **31**, 49 (1988).
18. М.К. Ширококов, *ЖЭТФ* **15**, 57 (1945).
19. А.И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, Москва (1970).
20. Б.Н. Филиппов, А.П. Танкеев, *Динамические эффекты в ферромагнетиках с доменной структурой*, Наука, Москва (1987).
21. М.М. Фартздинов, *Спиновые волны в ферро- и антиферромагнетиках с доменной структурой*, Наука, Москва (1988).
22. А.С. Ковалев, И.В. Герасимчук, *ЖЭТФ* **122**, 1116 (2002).
23. A.S. Kovalev, I.V. Gerasimchuk, and G.A. Maugin, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.* **52**, 94 (2003).
24. В.В. Киселев, А.А. Расковалов, *ТМФ* [в печати].
25. В.В.Киселев, А.А. Расковалов, *ФММ* [в печати].
26. D.H. Peregrin, *J. Austral. Math. Soc. Ser. B* **25**, 16 (1983).
27. A.V. Mikhailov, *Phys. Lett.* **92**, 51 (1982).
28. А.Б. Борисов, В.В. Киселев, *ТМФ* **54**, 246 (1983).
29. A.B. Borisov, *Lett. Math. Phys.* **7**, 195 (1983).

Precessing solitons in the stripe domain structure

A.B. Borisov, V.V. Kiselev, and A.A. Raskovalov

We present the new solutions of the Landau–Lifshitz equation for ferromagnet with the easy-axis anisotropy, which describe the magnetic solitons, strongly connected with the stripe domain structure. They bear the elementary macroscopic translations of the structure and at some conditions represent the nucleus of the magnetization reversal of the material. We show, that inhomogeneous elliptic precession of the magnetization in the core of the soliton leads to the oscillations of the nearby domain walls of the structure. We investigate the modulation instability of solitons near the boundaries of their existence.

PACS: 05.45.Yv Solitons;

75.60.Ch Domain walls and domain structure.

Keywords: solitary domains, domain boundaries, nonlinear magnetization wave, Landau–Lifshitz equation, Riemann problem.