УДК 517.94

ПРО АБСОЛЮТНУ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОДНИМ ЗАГАЮВАННЯМ

В. П. Кушнір

Укр. ун-т водн. госп-ва та природокористування
Україна, 33000, Рівне, вул. Соборна, 11

We consider a necessary condition for absolute exponential stability of a system of linear parabolic differential equations with one deley.

Розглядається виконання необхідної умови абсолютної експоненціальної стійкості систем лінійних параболічних диференціальних рівнянь з одним загаюванням.

Стійкість розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і систем рівнянь із загаюваннями вивчена достатньо повно (див., наприклад, [1 – 10]). Аналогічне питання для рівнянь з частинними похідними вивчено в меншій мірі. Це обумовлено труднощами технічного характеру, висвітленими в [10].

У роботах [11, 12] отримано необхідні і достатні умови абсолютної експоненціальної стійкості за різними парами норм розв'язків лінійних параболічних рівнянь із загаюваннями. Метою даної статті є дослідження абсолютної експоненціальної стійкості розв'язків лінійних параболічних систем диференціальних рівнянь з одним загаюванням.

Розглянемо мішану задачу для рівняння теплопровідності із загаюванням

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = A\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U(x,t-\tau)}{\partial x^2}, && t > 0, x \in [0,\pi], \\ &U(x,t) = \Phi(x,t), && (x,t) \in [0,\pi]\times[-\tau,0], \\ &U(0,t) = U(\pi,t) = O, && t \geq -\tau, \end{aligned} \tag{1}$$

де A і B — сталі дійсні квадратні матриці n-го порядку, причому A — додатно визначена, $U(x,t)$, $\Phi(x,t)$ — вектори-стовпці n-го порядку, O — нульовий вектор, $\tau = \mathrm{const} \geq 0$. Для $\Phi(x,t)$ припускається існування неперервних частинних похідних Φ''_{xx} та Φ'''_{xxt}.

Нехай розв'язок задачі (1) існує і при кожному t є вектором з елементами із $L_2(0,\pi)$. Його можна шукати методом Фур'є у вигляді

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin kx T_k(t), \tag{2}$$

де вектори $T_k(t)$ — розв'язки звичайних диференціальних рівнянь із загаюванням

$$T'_k(t) + k^2 A\, T_k(t) + k^2 B\, T_k(t-\tau) = O, \qquad t > 0,\ k \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

які задовольняють початкові умови

$$T_k(t) = \Psi_k(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin kx\, \Phi(x,t)dx, \qquad t \in [-\tau, 0].$$

Рівнянням (3) відповідають характеристичні квазіполіноми

$$h_k(s) = \det\left(sI + k^2A + k^2e^{-\tau s}B\right),\ s \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}.$$

Зауважимо, що для абсолютної експоненціальної стійкості розв'язків задачі (1) необхідно, щоб існувало таке $\varepsilon > 0$, що при всіх $k \in \mathbb{N}$

$$\{s, h_k(s) = 0\} \subset \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda < -\varepsilon\}. \tag{4}$$

Нижче наводиться достатня умова виконання (4).

Теорема. *Якщо*

$$\bigcup_{|z|=1} \sigma(A + zB) \subset \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda > 0\}, \tag{5}$$

то існує таке $\varepsilon > 0$*, що* $\{s\colon h_k(s) = 0\} \subset \{\lambda\colon \operatorname{Re}\lambda < -\varepsilon\}$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

Доведення. Нехай виконується (5). Оскільки при $|z| = 1$ множина $\sigma(A + zB)$ компактна і відображення $z \to \sigma(A + zB)$ є неперервним, то $\bigcup_{|z|=1} \sigma(A + zB)$ є компактною множиною, зокрема замкненою. Тому з (5) випливає

$$\overline{\bigcup_{|z|=1} \sigma(A + zB)} \subset \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda > 0\}. \tag{6}$$

У статті [7] доведено, що якщо виконується (6), то

$$\overline{\bigcup_{|z|\le 1} \sigma(A + zB)} \subset \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda > 0\}.$$

Множина $\bigcup_{|z|\le 1} \sigma(A + zB)$ — компактна, як і $\bigcup_{|z|=1} \sigma(A + zB)$. Тому існує спрямлюваний контур L, що охоплює множину $\bigcup_{|z|\le 1} \sigma(-A - zB)$, але не перетинається з нею, і повністю лежить у лівій півплощині $\{\lambda, \operatorname{Re}\lambda < 0\}$.

Позначимо через G область, яку обмежує контур L, $G^c = \mathbb{C} \setminus G$ — її доповнення у $\mathbb{C}$.

Доведемо, що оператор-функція $(\lambda I + A + zB)^{-1}$ обмежена при $\lambda \in G^c$, $|z| \le 1$.

Справді, оператор-функція $(\lambda I + A + zB)^{-1}$ неперервна за сукупністю змінних (λ, z) на замкненій множині $L \times K$, де $K = \{z \in \mathbb{C}, |z| \le 1\}$. Тому вона обмежена на ній:

$$\sup_{\lambda\in L,\ z\in K} \|(\lambda I + A + zB)^{-1}\| = M_1 < +\infty,$$

де $\|A\|$ — операторна норма матриці A у просторі квадратних матриць n-го порядку. Аналогічно $(\lambda I + A + zB)^{-1}$ обмежена на множині $\{(\lambda, z) \in G^c \times K, \rho(\lambda, G) \leq 1\}$, де $\rho(\lambda, G) = \inf\limits_{\mu \in G} |\lambda - \mu|$.

Якщо ж $\rho(\lambda, G) > 1$, то при $|z| \leq 1$

$$\left\|(\lambda I + A + zB)^{-1}\right\| = \left\| \int\limits_L \frac{1}{\lambda - \mu}(\mu I + A + zB)^{-1} d\mu \right\| \leq M_1 \int\limits_L |d\mu|.$$

Отже, існує таке $M > 0$, що для всіх $\lambda \in G^c$, $z \in K$

$$\|(\lambda I + A + zB)^{-1}\| \leq M.$$

Тепер доведемо, що при $\delta = 1/M$ для будь-якого оператора X, який віддалений за нормою від множини операторів $\{-A - zB, \ z \in K\}$ менше, ніж на δ, $\sigma(X) \subset G$. При таких X, z і $\lambda \in G^c$

$$\lambda I - X = \lambda I + A + zB - (A + zB + X) =$$

$$= (\lambda I + A + zB)(I - (\lambda I + A + zB)^{-1}(A + zB + X)).$$

Але $\lambda I + A + zB$ — оборотний і $I - (\lambda I + A + zB)^{-1}(A + zB + X)$ також, тому що

$$\|(\lambda I + A + zB)^{-1}(A + zB + X)\| < \delta M = 1.$$

Отже, $\sigma(X) \subset G$.

Позначимо $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{\tau}\ln\left(\frac{\delta}{\|B\|} + 1\right), \ \inf\limits_{\mu \in L}(-\mathrm{Re}\,\mu)\right\}$.

Якщо $s \in \{\lambda, \mathrm{Re}\,\lambda > -\varepsilon\}$, то знайдеться таке $z \in K$, що оператор $-A - e^{-\tau s}B$ віддалений від $-A - zB$ менше, ніж на δ, і його спектр, згідно з доведеним вище, лежить в області G. Тому s не є власним числом матриці $-A - e^{-\tau s}B$ і $\det(sI + A + e^{-\tau s}B) \neq 0$.

Але для $s \in \{\lambda, \mathrm{Re}\,\lambda > -\varepsilon\}$ при всіх $k \in \mathbb{N}$ також і $\dfrac{s}{k^2} \in \{\lambda, \mathrm{Re}\,\lambda > -\varepsilon\}$, тому аналогічно $\det\left(\dfrac{s}{k^2}I + A + e^{-\tau s}B\right) \neq 0$.

Теорему доведено.

Зауваження 1. В одновимірному випадку умова (4) еквівалентна співвідношенню $|B| < < A$, що є необхідним і достатнім для абсолютної експоненціальної стійкості розв'язків задачі (1).

Зауваження 2. В задачі (1) відрізок $[0, \pi]$ лінійною заміною можна перетворити у будь-який інший відрізок.

1. *Белман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.— 548 с.
2. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

3. *Животовский Л. А.* Абсолютная устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями // Тр. сем. по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом. — 1969. — № 7. — С. 219 – 292.

4. *Репин Ю. М.* Об условиях устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при любых запаздываниях // Уч. зап. Урал. ун-та. — 1960. — **23**. — С. 31 – 34.

5. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютная экспоненциальная устойчивость линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. — 1980. — **16**, № 3. — С. 462 – 469.

6. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений линейных скалярных дифференциальных уравнений нейтрального типа // Проблемы современной теории периодических движений. — 1982. — № 6. — С. 19 – 24.

7. *Слюсарчук В. Е.* Достаточные условия абсолютной асимптотической устойчивости линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с несколькими запаздываниями // Мат. заметки. — 1975. — **17**, № 6. — С. 919 – 923.

8. *Слюсарчук В. Е.* Абсолютная асимптотическая устойчивость линейных дифференциальных уравнений с бесконечным числом запаздываний в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. — 1976. — **12**, № 5. — С. 840 – 847.

9. *Слюсарчук В. Е.* Необходимые и достаточные условия абсолютной экспоненциальной устойчивости решений дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1983. — № 12. — С. 17 – 19.

10. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

11. *Кушнір В. П.* Про стабілізацію розв'язків лінійних параболічних диференціальних рівнянь із загаюваннями // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач. — 1997. — Вип. 15. — С. 111 – 119.

12. *Кушнір В. П.* Про стабілізацію розв'язків диференціальних рівнянь із частинними похідними з загаюваннями // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. — 1998. — Вип. 1. — С. 116 – 125.

Одержано 08.07.2002