УДК 517 .92

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

І. І. Старун

Ніжин. пед. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

For a number of types of linear systems, we consider the problem of existence of a solution for a two-point boundary-value problem and give asymptotic formulas for such a solution.

Для ряду типів лінійних систем розглядається питання про існування розв'язку двоточкової крайової задачі та наводяться асимптотичні формули для такого розв'язку.

1. Розглянемо крайову задачу

$$\dot{x} = A(t)x + f(t),\ t \in [0, T], \tag{1}$$

$$I_1 x(0) + I_2 x(T) = a, \tag{2}$$

де

$$I_1 = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix},$$

$E_r,\ E_{n-r}$ — одиничні матриці порядків r і $n-r$.

Нехай $X(t) = (x_{ij}(t))_1^n$ — фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи

$$\dot{x} = A(t)x. \tag{3}$$

Розіб'ємо цю матрицю на суму двох:

$$X(t) = X_1(t) + X_2(t),$$

де

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1r}(t) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nr}(t) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ X_2(t) = X(t) - X_1(t).$$

Тоді загальний розв'язок системи (1), як показано в [1], можна подати у вигляді

$$x(t) = X(t)c + X_1(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X_2(t)\int_T^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

де c — довільний n-вимірний вектор.

Введемо до розгляду матрицю

$$F = I_1 X(0) + I_2 X(T) \tag{4}$$

і припустимо, що

$$\det F \neq 0. \tag{5}$$

Тоді крайова задача (1), (2) має єдиний розв'язок

$$x(t) = X(t)F^{-1}(a-p) + X_1(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau + X_2(t)\int\limits_T^t X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau,$$

де

$$p = (I_2 X_1(T) - I_1 X_2(0))\int\limits_0^T X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau.$$

Таким чином, якщо відома фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи (3), то при виконанні умови (6) крайова задача (1), (2) легко розв'язується. Але, як правило, ця матриця невідома. Проте в деяких випадках може бути корисною така теорема [1].

Теорема 1. *Нехай $Y(t)$ — фундаментальна матриця розв'язків системи*

$$\dot{y} = B(t)y$$

і для неї виконується умова (6). Тоді розв'язок крайової задачі (1), (2) є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(t) = Y(t)\alpha(y) + Y_1(t)\int\limits_0^t Y^{-1}(\tau)\left(\left(A(\tau) - B(\tau)\right)y(\tau) + f(\tau)\right)d\tau +$$

$$+\ Y_2(t)\int\limits_T^t Y^{-1}(\tau)\left(\left(A(\tau) - B(\tau)\right)y(\tau) + f(\tau)\right)d\tau \equiv Ly, \tag{6}$$

де

$$\alpha(y) = F^{-1}\Bigg(a + \left(I_1\left(Y_2(0) - Y_1(0)\right) + \right.$$

$$\left. +\ I_2\left(Y_2(T) - Y_1(T)\right)\right)\int\limits_0^T Y^{-1}(\tau)\left(A(\tau) - B(\tau)y(\tau) + f(\tau)\right)d\tau\Bigg).$$

Як показано в [2], систему (1) за допомогою неособливого перетворення

$$x = Q_m(t)y = \left(E + \sum_{s=1}^{m} Q^{(s)}(t)\right) y, \tag{7}$$

$$\det Q_m(t) \neq 0, \; t \in [0;T],$$

можна звести до вигляду

$$\dot{y} = (\Lambda_m(t) + C_m(t))\, y + g(t),$$

де $\Lambda_m(t) = \operatorname{diag}\left\{\lambda_m^{(1)}(t), \ldots, \lambda_m^{(n)}(t)\right\}$, а $C_m(t)$ — неперервна матриця (якщо $A(t) \in C^{m+1}_{[0;T]}$). Згідно з (7) крайова задача (1), (2) переходить у задачу

$$\begin{aligned} &\dot{y} = (\Lambda_m(t) + C_m(t))\, y + g(t), \\ &I_1 Q_m(0)y(0) + I_2 Q_m(T)y(T) = a. \end{aligned} \tag{8}$$

Використаємо теорему 1, взявши за $B(t)$ матрицю $\Lambda_m(t)$. Тоді

$$Y(t) = \exp\left(\int_0^t \Lambda_m(\tau) d\tau\right)$$

і розв'язок задачі (8) існує і єдиний, якщо оператор L в (6) є оператором стиску, що має місце при достатній малості $\|C_m(t)\|$.

2. Розглянемо крайову задачу

$$\varepsilon \dot{x} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\Theta(t)\right), \tag{9}$$

$$I_1 x(0,\varepsilon) + I_2 x(T,\varepsilon) = a(\varepsilon), \tag{10}$$

де $A(t,\varepsilon) = \sum\limits_{s\geq 0} \varepsilon^s A_s(t)$ при умові, що рівняння

$$\det\left(A_0(t) - \lambda E\right) = 0$$

має прості корені $\lambda_i(t), \; i = \overline{1,n}$, які занумеровані так, що

$$\operatorname{Re}\lambda_1(t) \leq \operatorname{Re}\lambda_2(t) \leq \ldots \leq \operatorname{Re}\lambda_n(t),$$

і для яких виконуються умови

$$\int_0^t \operatorname{Re}\lambda_i(\tau)d\tau < 0,\ i = \overline{1,r},$$
$$\int_t^T \operatorname{Re}\lambda_{r+j}(\tau)d\tau > 0,\ j = \overline{1,n-r}. \tag{11}$$

Згідно з теоремою 2.4 з [2] за допомогою невиродженого перетворення

$$x = U_m(t,\varepsilon)y = \left(\sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U^{(s)}(t)\right) y$$

система (9) зводиться до вигляду

$$\varepsilon\dot{y} = \big(W(t) + \varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\big)\, y + g(t,\varepsilon,\Theta), \tag{12}$$

де

$$W(t) = \operatorname{diag}\left\{\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)\right\},\ g(t,\varepsilon,\Theta) = U_m^{-1}(t,\varepsilon)f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\Theta(t)\right),$$

а $C_m(t,\varepsilon)$ — обмежена за нормою при $t \in [0;T],\ \varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ матриця. Крайові умови (10) наберуть вигляду

$$I_1U_m(0,\varepsilon)y(0,\varepsilon) + I_2U_m(T,\varepsilon)y(T,\varepsilon) = a(\varepsilon). \tag{13}$$

Нехай $Z(t,\varepsilon)$ — фундаментальна матриця розв'язків системи

$$\varepsilon\dot{z} = W(t)z. \tag{14}$$

Подамо її у вигляді суми двох матриць

$$Z(t,\varepsilon) = Z_1(t,\varepsilon) + Z_2(t,\varepsilon) \equiv$$
$$\equiv I_1\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_0^t W(\tau)d\tau\right) + I_2\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_T^t W(\tau)d\tau\right)$$

і запишемо рівняння (6) у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = Z(t,\varepsilon)\alpha\left(y(t,\varepsilon)\right) +$$

$$+ \varepsilon^m \left(Z_1(t,\varepsilon \int\limits_0^t Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\left(C_m(\tau,\varepsilon)y(\tau,\varepsilon) + g(\tau,\varepsilon,\Theta)\right) d\tau + \right.$$

$$\left. + Z_2(t,\varepsilon) \int\limits_T^t Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\left(C_m(\tau,\varepsilon)y(\tau,\varepsilon) + g(\tau,\varepsilon,\Theta)\right) d\tau \right) \equiv Ly. \tag{15}$$

З (15) випливає, що при $m \geq 1$ та виконанні умов (11) оператор L є оператором стиску, а тому як це рівняння, так і крайова задача (12), (13) (а отже, і задача (9), (10)), має єдиний розв’язок.

Знайдемо явний вигляд цього розв’язку. При цьому обмежимося розглядом однорідної системи, відповідної (12), оскільки вирішальну роль відіграє загальний розв’язок саме такої системи. Таким чином, розглянемо задачу

$$\varepsilon\dot{y} = \left(W(t) + \varepsilon^{m+1}C_m(t,\varepsilon)\right) y, \tag{16}$$

$$I_1U_m(0,\varepsilon)y(0,\varepsilon) + I_2U_m(T,\varepsilon)y(T,\varepsilon) = a(\varepsilon). \tag{17}$$

Цій задачі поставимо у відповідність задачу (14), (17). Загальний розв’язок системи (14) має вигляд

$$z(t,\varepsilon) = Z(t,\varepsilon)c.$$

Введемо, подібно до (4), позначення

$$F(\varepsilon) = I_1U_m(0,\varepsilon)Z(0,\varepsilon) + I_2U_m(T,\varepsilon)Z(T,\varepsilon)$$

і припустимо знову, що

$$\det F(\varepsilon) \neq 0.$$

Тоді вектор c однозначно визначається з рівняння

$$F(\varepsilon)c = a(\varepsilon),$$

а тому єдиний розв’язок задачі (14), (17) має вигляд

$$z_{kp}(t,\varepsilon) = Z(t,\varepsilon)F^{-1}(\varepsilon)a(\varepsilon). \tag{18}$$

Покажемо, що формулою (18) задається асимптотичне зображення розв'язку і крайової задачі (16), (17).

Нехай

$$w(t,\varepsilon) = y_{kp}(t,\varepsilon) - z_{kp}(t,\varepsilon),$$

де $y_{kp}(t,\varepsilon)$ — розв'язок задачі (16), (17). Тоді для $w(t,\varepsilon)$ будемо мати задачу

$$\dot{w} = \varepsilon^{-1}W(t)w + \varepsilon^m C_m(t,\varepsilon)\left(w + z_{kp}\right), \tag{19}$$

$$I_1 U_m(0,\varepsilon)w(0,\varepsilon) + I_2 U_m(T,\varepsilon)w(T,\varepsilon) = 0. \tag{20}$$

Оскільки однорідна крайова задача (20) та

$$\dot{v} = \varepsilon^{-1}W(t)v$$

має лише нульовий розв'язок, то, як показано в [3], існує матриця Гріна $G(t,\tau,\varepsilon)$, яка неперервна при $0 \le \tau \le t \le T$ і $0 \le t \le \tau \le T$ і така, що розв'язок рівняння

$$w(t,\varepsilon) = \varepsilon^m \int\limits_0^T G(t,\tau,\varepsilon)C_m(\tau,\varepsilon)\left(w(\tau,\varepsilon) + z_{kp}(\tau,\varepsilon)\right)d\tau$$

є розв'язком крайової задачі (19), (20).

Повторюючи доведення теореми 2.5 з [2], переконуємося, що має місце асимптотична оцінка

$$\|y_{kp}(t,\varepsilon) - z_{kp}(t,\varepsilon)\| \le M\varepsilon^m,$$

де $M > 0$ — стала, що не залежить від ε.

Здійснивши зворотний перехід від (12) до (9) (при $f(t,\varepsilon) \equiv 0$), отримаємо з точністю $O(\varepsilon^m)$ розв'язок задачі (9), (10):

$$x_{kp}(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)Z(t,\varepsilon)F^{-1}(\varepsilon)a(\varepsilon) + O(\varepsilon^m).$$

3. Розглянемо систему

$$\varepsilon B(t)\dot{x} = A(t,\varepsilon)x, \tag{21}$$

в якій $\det B(t) \equiv 0$, в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярна і задовольняє умову „ранг-степінь". Нехай $\operatorname{rang} B(t) = r \ge 2$.

Крайові умови задамо у вигляді

$$Mx(0,\varepsilon) + Nx(T,\varepsilon) = a(\varepsilon), \tag{22}$$

де $M,\ \ N$ — сталі матриці розмірів $n\times n$. Вектор $a(\varepsilon)$, для якого задача (21), (22) має розв'язок, будемо називати допустимим. Вияснимо, коли він є допустимим для даної задачі. Нехай

$$B(t)=\begin{pmatrix} B_{11}(t) & B_{12}(t)\\ B_{21}(t) & B_{22}(t)\end{pmatrix},\ \operatorname{rang}B(t)=\operatorname{rang}B_{11}(t)=r.$$

Тоді за допомогою заміни

$$x=Q(t)y=\begin{pmatrix} E_1 & -B_{11}^{-1}(t)B_{12}(t)\\ 0 & E_2\end{pmatrix}y \tag{23}$$

та множенням зліва на матрицю

$$P(t)=\begin{pmatrix} B_{11}^{-1}(t) & 0\\ -B_{21}(t)B_{11}^{-1}(t) & E_2\end{pmatrix}$$

від системи (21) перейдемо до системи

$$\varepsilon\begin{pmatrix} E_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix} C_{11}^{(0)} & C_{12}^{(0)}\\ C_{21}^{(0)} & C_{22}^{(0)}\end{pmatrix}+\right.$$

$$\left.+\,\varepsilon\begin{pmatrix} C_{11}(t,\varepsilon) & C_{12}(t,\varepsilon)\\ C_{21}(t,\varepsilon) & C_{22}(t,\varepsilon)\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}, \tag{24}$$

$\Bigl(y=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$, E_1 — одинична матриця розмірів $r\times r$, E_2 — одинична матриця розмірів $(n-r)\times(n-r)\Bigr)$. При цьому крайові умови (22) наберуть вигляду

$$MQ(0)y(0,\varepsilon)+NQ(T)y(T,\varepsilon)=a(\varepsilon). \tag{25}$$

Система (24) розпадається на дві:

$$\varepsilon\dot u=\Bigl(C_{11}^{(0)}(t)+\varepsilon C_{11}^{(0)}(t,\varepsilon)\Bigr)u+\Bigl(C_{12}^{(0)}(t)+\varepsilon C_{12}(t,\varepsilon)\Bigr)v, \tag{26}$$

$$0=\Bigl(C_{21}^{(0)}(t)+\varepsilon C_{21}(t,\varepsilon)\Bigr)u+\Bigl(C_{22}^{(0)}(t)+\varepsilon C_{22}(t,\varepsilon)\Bigr)v. \tag{27}$$

З леми 1.3 з [2] випливає, що при досить малих $\varepsilon>0$ матриця $C_{22}^{(0)}(t)+\varepsilon C_{22}(t,\varepsilon)$ є неособливою і тому з (27) однозначно знаходимо вектор

$$v=-\Bigl(C_{22}^{(0)}(t)+\varepsilon C_{22}(t,\varepsilon)\Bigr)^{-1}\Bigl(C_{21}^{(0)}(t)+\varepsilon C_{21}(t,\varepsilon)\Bigr)u. \tag{28}$$

Підставляючи його в (26), отримуємо систему вигляду

$$\varepsilon\dot{u} = \Phi(t,\varepsilon)u, \quad \Phi(t,\varepsilon) = \Phi_0(t) + \sum_{s\geq 0}\varepsilon^s\Phi_s(t), \tag{29}$$

причому, як легко перевірити, рівняння $\det(\Phi_0(t) - \lambda E) = 0$ має ті ж корені, що і рівняння $\det(A_0(t) - \lambda B(t)) = 0$. Нехай всі корені цього рівняння різні на $[0;T]$. За допомогою підстановки

$$u = H_m(t,\varepsilon)w = \left(\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s H_s(t)\right)w$$

від системи (29) переходимо до системи

$$\varepsilon\dot{w} = \left(\Lambda(t) + \varepsilon^{m+1}R_m(t,\varepsilon)\right)w \tag{30}$$

з діагональною матрицею $\Lambda(t)$, тобто маємо систему типу (16). Розглянемо, як при цьому перетворюються крайові умови. Враховуючи (23), (28), маємо

$$x = L(t,\varepsilon)u,$$

де $L(t,\varepsilon)$ — матриця розмірів $n\times r$, що визначається формулою

$$L(t,\varepsilon) =$$

$$= \begin{pmatrix} E_1 + B_{11}^{-1}(t)B_{12}(t)(C_{22}^{(0)}(t) + \varepsilon C_{22}(t,\varepsilon))^{-1}(C_{21}^{(0)}(t) + \varepsilon C_{21}(t,\varepsilon)) \\ -(C_{22}^{(0)}(t) + \varepsilon C_{22}(t,\varepsilon))^{-1}(C_{21}^{(0)}(t) + \varepsilon C_{21}(t,\varepsilon)) \end{pmatrix}.$$

Тоді умови (25) запишуться так:

$$ML(0,\varepsilon)u(0,\varepsilon) + NL(T,\varepsilon)u(T,\varepsilon) = a(\varepsilon). \tag{31}$$

Таким чином, маємо задачу (29), (31), яка, в свою чергу, переходить у задачу (30) та

$$ML(0,\varepsilon)H_m(0,\varepsilon)w(0,\varepsilon) + NL(T,\varepsilon)H_m(T,\varepsilon)w(T,\varepsilon) = a(\varepsilon). \tag{32}$$

Припустимо, що корені рівняння $\det(\Phi_0(t) - \lambda E) = 0$ задовольняють умови (11). Тоді, як і в п. 2, замінимо задачу (30), (32) задачею

$$\varepsilon\dot{q} = \Lambda(t)q, \tag{33}$$

$$ML(0,\varepsilon)H_m(0,\varepsilon)q(0,\varepsilon) + NL(T,\varepsilon)H_m(T,\varepsilon)q(T,\varepsilon) = a(\varepsilon). \tag{34}$$

Загальний розв'язок системи (33) має вигляд

$$q(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon)c \equiv \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_0^t \Lambda(\tau)d\tau\right)c. \tag{35}$$

Підставляючи (35) в (34), одержуємо рівність

$$R(\varepsilon)c = a(\varepsilon), \tag{36}$$

де $R(\varepsilon) = ML(0,\varepsilon)H_m(0,\varepsilon) + NL(T,\varepsilon)H_m(T,\varepsilon)\Omega(T,\varepsilon)$. Припустимо, що $\operatorname{rang} R(\varepsilon) = r$ і $R(\varepsilon) = \begin{pmatrix} R_1(\varepsilon) \\ R_2(\varepsilon) \end{pmatrix}$, $\operatorname{rang} R(\varepsilon) = \operatorname{rang} R_1(\varepsilon) = r$. Тоді з (36) знаходимо

$$c = R_1^{-1}(\varepsilon)a_1(\varepsilon),\ a_2(\varepsilon) = R_2(\varepsilon)R_1^{-1}(\varepsilon)a_1(\varepsilon), \tag{37}$$

$$\left(a(\varepsilon) = \begin{pmatrix} a_1(\varepsilon) \\ a_2(\varepsilon) \end{pmatrix}\right).$$

Таким чином, якщо матриця $R(\varepsilon)$ має ранг r, то крайова задача (21), (22) має єдиний розв'язок, причому вектор $a(\varepsilon)$ містить лише r довільних компонент, решта ж $n-r$ компонент пов'язані умовою (37).

1. *Коняев Ю.А.* Общий подход к асимптотическому интегрированию сингулярно возмущенных начальных и краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1984. — **20**, № 11. — С. 1999–2003.
2. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Выща шк., 1991. — 207 с.
3. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — 474 с.

Одержано 19.09.2002