УДК 517 .91/943

ПОБУДОВА АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ ТА ВИРОДЖЕНОЮ МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОХІДНИХ

П. Ф. Самусенко

Нац. пед. ун-т
Україна, 01030, Київ, вул. Пирогова, 9

By using of the step-method, we construct a solution of the initial value problem for a singularly perturbed system of differential equations with a delay and a degenerate matrix at the derivatives.

За допомогою методу кроків побудовано розв'язок основної початкової задачі сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням та виродженою матрицею при похідних.

Дана робота присвячена побудові асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь

$$B(\tau)\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt} = A(\tau)x(\tau,\varepsilon) + C(\tau)x(\tau-\Delta,\varepsilon),\ \tau \in [0;L], \tag{1}$$

де $x(\tau,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, $A(\tau)$, $B(\tau)$ та $C(\tau)$ — квадратні матриці порядку n, $\Delta > 0$ — стале відхилення, $\tau = t\varepsilon$, $\varepsilon, 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 << 1$ — малий параметр.

У випадку невиродженості матриці $B(\tau)$ для всіх $\tau \in [0;L]$ система (1) розглядалась у роботах багатьох авторів. Бібліографію з цього питання можна знайти, наприклад, в [1]. Здебільшого досліджувались системи

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt} = A(\tau)x(\tau,\varepsilon) + C(\tau)x(\tau-\Delta,\varepsilon),\ \ \tau \in [0;L]. \tag{2}$$

При цьому за допомогою методу кроків будувався розв'язок основної початкової задачі, тобто розв'язок системи (2), який при $-\Delta \le \tau \le 0\ (\Delta > 0)$ задовольняє умову

$$x(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau,\varepsilon), \tag{3}$$

де

$$\varphi(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{p} \varepsilon^k \varphi_k(\tau).$$

Всі попередні дослідження стосувались випадку, коли матриця коефіцієнтів при похідних є невиродженою на відрізку $[0;L]$.

У даній роботі за допомогою методу кроків побудовано розв'язок основної початкової задачі (1), (3) у випадку, коли $\det B(\tau) \equiv 0$, $\tau \in [0;L]$.

Нехай для системи (1) виконуються умови:

1) елементи матриць $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ та векторів $\varphi_k(\tau)$, $k = 1, 2, ..., p$, нескінченно диференційовні відповідно на відрізках $[0; L]$ та $[-\Delta; 0]$;

2) жмуток матриць $A(\tau) - \lambda B(\tau)$ регулярний на відрізку $[0; L]$;

3) „нескінченні” елементарні дільники жмутка $A(\tau) - \lambda B(\tau)$ зберігають сталу кратність для всіх $\tau \in [0; L]$;

4) корені $\lambda_i(\tau)$, $i = 1, 2, ..., \nu$, $\nu < n$, характеристичного рівняння

$$\det ||A(\tau) - \lambda B(\tau)|| = 0 \tag{4}$$

прості на відрізку $[0; L]$ і такі, що:

4^1) для будь-якого $\tau \in [0; L]$

$$\lambda_i(\tau) \neq 0, \ i = 1, 2, ..., \nu;$$

4^2) дійсні частини коренів рівняння (4) для всіх $\tau \in [0; L]$ не додатні, тобто

$$\mathrm{Re}(\lambda_i(\tau)) \leq 0, \ i = 1, 2, ..., \nu;$$

4^3) для будь-яких $\tau_1 < \tau_2$, τ_1, $\tau_2 \in [0; L]$,

$$\lambda_i(\tau_1) \neq \lambda_j(\tau_2), \ i, j = 1, 2, ..., \nu.$$

Наслідуючи [1], покладемо

$$x(\tau, \varepsilon) = U_{m1}(\tau, \varepsilon) y(\tau, \varepsilon) + p_{m1}(\tau, \varepsilon), \ m \geq 1, \tag{5}$$

де $y(\tau, \varepsilon)$ — новий шуканий ν-вимірний вектор,

$$U_{m1}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U_1^{(s)}(\tau)$$

— прямокутна матриця розмірів $n \times \nu$, а

$$p_{m1}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s p_1^{(s)}(\tau)$$

— n-вимірний вектор (матриця $U_{m1}(\tau, \varepsilon)$ і вектор $p_{m1}(\tau, \varepsilon)$ також підлягають визначенню). Тоді система (1) на першому кроці ($0 \leq \tau \leq \Delta$) набере вигляду

$$B(\tau) U_{m1}(\tau, \varepsilon) \frac{dy}{dt} = (A(\tau) U_{m1}(\tau, \varepsilon) - \varepsilon B(\tau) U'_{m1}(\tau, \varepsilon)) y + A(\tau) p_{m1}(\tau, \varepsilon) -$$

$$- \varepsilon B(\tau) p'_{m1}(\tau, \varepsilon) + C(\tau) \varphi(\tau - \Delta, \varepsilon), \tau \in [0; L].$$

Елементи матриці $U_{m1}(\tau, \varepsilon)$ та вектора $p_{m1}(\tau, \varepsilon)$ визначимо так, щоб виконувались рівності

$$A(\tau) U_{m1}(\tau, \varepsilon) - \varepsilon B(\tau) U'_{m1}(\tau, \varepsilon) = B(\tau) U_{m1}(\tau, \varepsilon)(\Lambda_{m1}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_{m1}(\tau, \varepsilon)), \tag{6}$$

$$A(\tau)p_{m1}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon B(\tau)p'_{m1}(\tau,\varepsilon) + C(\tau)\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1}B(\tau)U_{m1}(\tau,\varepsilon)q_{m1}(\tau,\varepsilon), \quad (7)$$

де

$$\Lambda_{m1}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_1^{(s)}(\tau)$$

— діагональна матриця ν-го порядку, а елементи квадратної матриці $C_{m1}(\tau,\varepsilon)$ та ν-вимірного вектора $q_{m1}(\tau,\varepsilon)$ нескінченно диференційовні для всіх $\tau \in [0; L]$, $\varepsilon \in [0; \varepsilon_0]$.

Розглянемо спочатку матричну рівність (6). Прирівнявши в ній коефіцієнти при ε^s, $s = 0, 1, \ldots, m+1$, дістанемо систему рівнянь

$$A(\tau)U_1^{(0)}(\tau) - B(\tau)U_1^{(0)}(\tau)\Lambda_1^{(0)}(\tau) = 0, \quad (8)$$

$$A(\tau)U_1^{(s)}(\tau) - B(\tau)U_1^{(s)}(\tau)\Lambda_1^{(0)}(\tau) = F_1^{(s)}(\tau), \ s = 1, 2, \ldots, m, \quad (9)$$

$$B(\tau)U_{m1}(\tau,\varepsilon)C_{m1}(\tau,\varepsilon) = Q_1(\tau,\varepsilon), \quad (10)$$

де

$$F_1^{(s)}(\tau) = B(\tau)\left(\frac{dU_1^{(s-1)}(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{s-1} U_1^{(i)}(\tau)\Lambda_1^{(s-i)}(\tau)\right), \ s = 1, 2, \ldots, m,$$

$$Q_1(\tau,\varepsilon) = -B(\tau)\left(\frac{dU_1^{(m)}(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{i-1} \sum_{j=i}^{m} U_1^{(j)}(\tau)\Lambda_1^{(m+i-j)}(\tau)\right).$$

Можна показати [2], що системи (8), (9) розв'язні відносно $U_1^{(s)}(\tau)$, $\Lambda_1^{(s)}(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots, m$, і критерієм розв'язності системи (10) є умова

$$\operatorname{rank} B(\tau)U_{m1}(\tau,\varepsilon) = \operatorname{rank}\left(B(\tau)U_{m1}(\tau,\varepsilon), Q_1(\tau,\varepsilon)\right), \tau \in [0; \Delta], \quad (11)$$

де під $(B(\tau)U_{m1}(\tau,\varepsilon), Q_1(\tau,\varepsilon))$ розуміємо розширену матрицю системи (10). При цьому

$$C_{m1}(\tau,\varepsilon) = -(B(\tau)U_{m1}(\tau,\varepsilon))^{-}Q_1(\tau,\varepsilon),$$

де $(B(\tau)U_{m1}(\tau,\varepsilon))^{-}$ — напівобернена матриця відносно матриці $B(\tau)U_{m1}(\tau,\varepsilon)$ [3].

Оскільки з [3] випливає нескінченна диференційовність на відрізку $[0; \Delta]$ елементів знайдених матриць $U_1^{(s)}(\tau)$, $\Lambda_1^{(s)}(\tau)$, $s = 0, 1, \ldots, m$, то елементи матриці $C_{m1}(\tau,\varepsilon)$ на відрізку $[0; \Delta]$ також нескінченно диференційовні.

Перейдемо до визначення коефіцієнтів вектора $p_{m1}(\tau, \varepsilon)$. Для цього в (7) прирівняємо коефіцієнти при $\varepsilon^s,\ s = 0, 1, \ldots, m$. Тоді

$$A(\tau)p_1^{(0)}(\tau) + C(\tau)\varphi_0(\tau - \Delta) = 0,$$

$$A(\tau)p_1^{(s)}(\tau) - B(\tau)\frac{dp_1^{(s-1)}(\tau)}{d\tau} + C(\tau)\varphi_s(\tau - \Delta) = 0,\ s = 1, 2, \ldots, m.$$

Звідси, враховуючи умову 4^1, отримуємо

$$p_1^{(0)}(\tau) = -A^{-1}(\tau)C(\tau)\varphi_0(\tau - \Delta),$$

$$p_1^{(s)}(\tau) = A^{-1}(\tau)\left(B(\tau)\frac{dp_1^{(s-1)}(\tau)}{d\tau} - C(\tau)\varphi_s(\tau - \Delta)\right),\ s = 1, 2, \ldots, m.$$

Отже, якщо $p < m + 1$ і для всіх $\tau \in [0; \Delta]$ виконується умова (11), то

$$q_{m1}(\tau, \varepsilon) = -(B(\tau)U_{m1}(\tau, \varepsilon))^{-}B(\tau)\frac{dp_1^{(m)}(\tau)}{d\tau}.$$

Звідси випливає нескінченна диференційовність на відрізку $[0; \Delta]$ координат вектора $q_{m1}(\tau, \varepsilon)$. Таким чином, система диференціальних рівнянь (1) набирає вигляду

$$B(\tau)U_{m1}(\tau, \varepsilon)\frac{dy}{dt} = B(\tau)U_{m1}(\tau, \varepsilon)(\Lambda_{m1}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_{m1}(\tau, \varepsilon))y +$$

$$+ \varepsilon^{m+1}B(\tau)U_{m1}(\tau, \varepsilon)q_{m1}(\tau, \varepsilon), \tau \in [0; \Delta].$$

Зрозуміло, що кожен розв'язок системи

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda_{m1}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_{m1}(\tau, \varepsilon))y + \varepsilon^{m+1}q_{m1}(\tau, \varepsilon) \tag{12}$$

задовольняє також попередню систему. Тому надалі розглядатимемо систему (12). Оскільки система (12) еквівалентна системі інтегральних рівнянь

$$y(\tau, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Lambda_{m1}(\tau, \varepsilon)d\tau\right)c_1 + \varepsilon^m\int_0^\tau \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_1}^\tau \Lambda_{m1}(\tau, \varepsilon)d\tau\right)C_{m1}(\tau_1, \varepsilon)y(\tau_1, \varepsilon)d\tau_1 +$$

$$+ \varepsilon^m\int_0^\tau \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau_1}^\tau \Lambda_{m1}(\tau, \varepsilon)d\tau\right)q_{m1}(\tau_1, \varepsilon)d\tau_1, \tag{13}$$

де c_1 — сталий вектор, то застосовуючи до системи (17) метод послідовних наближень [1], маємо

$$y(\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \Lambda_{m1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_1 + \varepsilon^m\alpha_{m1}(\tau,\varepsilon),$$

$\alpha_{m1}(\tau,\varepsilon)$ — вектор, компоненти якого нескінченно диференційовні на відрізку $[0;\Delta]$ і рівномірно обмежені в околі точки $\varepsilon = 0$ [4].

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1–3,* 4^1, 4^2 *та (11), то у випадку простих коренів рівняння (4) система диференціальних рівнянь (1) на першому кроці* $(0 \le \tau \le \Delta)$ *має розв'язок вигляду*

$$x(\tau,\varepsilon) = U_{m1}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \Lambda_{m1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_1 + p_{m1}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon^m\alpha_{m1}(\tau,\varepsilon),$$

причому компоненти вектора $\alpha_{m1}(\tau,\varepsilon)$ *нескінченно диференційовні на відрізку* $[0;\Delta]$ *і рівномірно обмежені в околі точки* $\varepsilon = 0$.

Побудуємо тепер розв'язок системи (1) на другому кроці $(\Delta \le \tau \le 2\Delta)$. Для цього запишемо її у вигляді

$$B(\tau)\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt} = A(\tau)x(\tau,\varepsilon) + C(\tau)U_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau-\Delta} \Lambda_{m1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_1 +$$

$$+\ C(\tau)p_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon^m C(\tau)\alpha_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon).$$

Покладаючи

$$x(\tau,\varepsilon) = U_{m2}(\tau,\varepsilon)y(\tau,\varepsilon) + R_{m2}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau-\Delta} \Lambda_{m1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_1 + p_{m2}(\tau,\varepsilon),$$

де $y(\tau,\varepsilon)$ — новий шуканий ν-вимірний вектор,

$$U_{m2}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s U_2^{(s)}(\tau)$$

та

$$R_{m2}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s R_2^{(s)}(\tau)$$

— прямокутні матриці розмірів $n \times \nu$, а

$$p_{m2}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s p_2^{(s)}(\tau,\varepsilon)$$

— n-вимірний вектор (матриці $U_{m2}(\tau,\varepsilon)$, $R_{m2}(\tau,\varepsilon)$ і вектор $p_{m2}(\tau,\varepsilon)$ підлягають визначенню), отримуємо систему

$$\begin{aligned} B(\tau)U_{m2}(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{dt} = {} & (A(\tau)U_{m2}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon B(\tau)U'_{m2}(\tau,\varepsilon))y + \\ & + (A(\tau)R_{m2}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon B(\tau)R'_{m2}(\tau,\varepsilon) - B(\tau)R_{m2}(\tau,\varepsilon)\Lambda_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon) + \\ & + C(\tau)U_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon)) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau-\Delta} \Lambda_{m1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right) c_1 + A(\tau)p_{m2}(\tau,\varepsilon) - \\ & - \varepsilon B(\tau)p'_{m2}(\tau,\varepsilon) + C(\tau)p_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon^m C(\tau)\alpha_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Компоненти матриці $U_{m2}(\tau,\varepsilon)$ та вектора $p_{m2}(\tau,\varepsilon)$ визначатимемо аналогічно відповідним компонентам матриці $U_{m1}(\tau,\varepsilon)$ та вектора $p_{m1}(\tau,\varepsilon)$ з теореми 1, а матрицю $R_{m2}(\tau,\varepsilon)$ побудуємо так, щоб

$$\begin{aligned} A(\tau)R_{m2}(\tau,\varepsilon) & - \varepsilon B(\tau)R'_{m2}(\tau,\varepsilon) - B(\tau)R_{m2}(\tau,\varepsilon)\Lambda_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon) + \\ & + C(\tau)U_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon) = \varepsilon^{m+1}B(\tau)U_{m2}(\tau,\varepsilon)L_{m2}(\tau,\varepsilon). \end{aligned} \tag{15}$$

Тут $L_{m2}(\tau,\varepsilon)$ — матриця, елементи якої нескінченно диференційовні на відрізку $[\Delta; 2\Delta]$.

Для цього в (15) прирівняємо коефіцієнти при ε^s, $s = 0,1,\ldots,m$. Тоді отримаємо

$$A(\tau)R_2^{(s)}(\tau) - B(\tau)R_2^{(s)}(\tau)\Lambda(\tau-\Delta) = M_2^{(s)}(\tau), s = 0,1,\ldots,m, \tag{16}$$

де

$$\begin{gathered} \Lambda(\tau) = \operatorname{diag}\{\lambda_1(\tau),\lambda_2(\tau),\ldots,\lambda_\nu(\tau)\}, \\ M_2^{(s)}(\tau) = B(\tau)\left(\frac{dR_2^{(s-1)}(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{s-1} R_2^{(i)}(\tau)\Lambda_1^{(s-i)}(\tau-\Delta) - C(\tau)U_{m1}(\tau-\Delta,\varepsilon)\right), \\ s = 0,1,\ldots,m. \end{gathered} \tag{17}$$

Перейдемо в рівнянні (16) до векторної форми запису:

$$(A(\tau) - \lambda_i(\tau-\Delta)B(\tau))r_{2i}^{(s)}(\tau) = m_{2i}^{(s)}(\tau),\ s = 0,1,\ldots,m,\ i = 1,2,\ldots,\nu. \tag{18}$$

Тут $r_{2i}^{(s)}(\tau)$ та $m_{2i}^{(s)}(\tau)$ — стовпці матриць $R_2^{(s)}(\tau)$ та $M_2^{(s)}(\tau)$ відповідно.

Оскільки жмуток матриць $A(\tau) - \lambda B(\tau)$ регулярний на відрізку $[0; L]$ і на цьому відрізку його елементарні дільники зберігають сталу кратність, то існують неособливі матриці $P(\tau)$ і $Q(\tau)$, елементи яких нескінченно диференційовні такі, що $P(\tau)A(\tau)Q(\tau) = \Omega(\tau),\ P(\tau)B(\tau)Q(\tau) = H$, де

$$\Omega(\tau) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & \Lambda(\tau) \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

E_1, E_2 — одиничні матриці порядку $n - \nu$ та ν відповідно, J — нільпотентна матриця $(n - \nu)$-го порядку, а $\Lambda(\tau)$ — матриця вигляду (17). Тоді рівняння (18) набере вигляду

$$(\Omega(\tau) - \lambda_i(\tau - \Delta)H)\bar{r}_{1i}^{(s)}(\tau) = \bar{m}_{1i}^{(s)}(\tau),\ s = 0, 1, \ldots, m,\ i = 1, 2, \ldots, \nu,$$

де

$$\bar{r}_{1i}^{(s)}(\tau) = Q^{-1}(\tau)r_{1i}^{(s)}(\tau),\ \bar{m}_{1i}^{(s)}(\tau) = P(\tau)m_{1i}^{(s)}(\tau).$$

Звідси

$$\bar{r}_{1i}^{(s)}(\tau) = (\Omega(\tau) - \lambda_i(\tau - \Delta)H)^{-1}\bar{m}_{1i}^{(s)}(\tau),\ s = 0, 1, \ldots, m,\ i = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Тоді якщо на відрізку $[\Delta; 2\Delta]$ виконується умова, аналогічна умові (11) (назвемо її (11^1)), то маємо

$$L_{m2}(\tau, \varepsilon) = -(B(\tau)U_{m2}(\tau, \varepsilon))^{-}B(\tau)\left(\frac{dR_2^{(m)}(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i\sum_{j=i}^{m}R_2^{(j)}(\tau)\Lambda_1^{(m+1+i-j)}(\tau - \Delta)\right).$$

Таким чином, система диференціальних рівнянь (14) набирає вигляду

$$\begin{aligned} B(\tau)U_{m2}(\tau, \varepsilon)\frac{dy}{d\tau} = {} & B(\tau)U_{m2}(\tau, \varepsilon)(\Lambda_{m2}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_{m1}(\tau, \varepsilon))y + \\ & + \varepsilon^{m+1}B(\tau)U_{m2}(\tau, \varepsilon)q_{m2}(\tau, \varepsilon) + \\ & + \varepsilon^{m+1}B(\tau)U_{m2}(\tau, \varepsilon)L_{m2}(\tau, \varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau-\Delta}\Lambda_{m1}(\tau, \varepsilon)d\tau\right)c_1. \end{aligned}$$

Як і в попередньому випадку, розглядаючи систему

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda_{m2}(\tau, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_{m2}(\tau, \varepsilon))y + \varepsilon^{m+1}(q_{m2}(\tau, \varepsilon) + L_{m2}(\tau, \varepsilon)),$$

можна показати справедливість теореми 2 [4].

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1–4 та (11^1), то система диференціальних рівнянь (1) на другому кроці* ($\Delta \le \tau \le 2\Delta$) *має розв'язок вигляду*

$$x(\tau,\varepsilon) = U_{m2}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\Delta}^{\tau}\Lambda_{m2}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_2 + R_{m2}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{\tau-\Delta}\Lambda_{m1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_1+$$

$$+\ p_{m2}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon^m\alpha_{m2}(\tau,\varepsilon),$$

де c_2 — сталий вектор, а компоненти вектора $\alpha_{m2}(\tau,\varepsilon)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[\Delta; 2\Delta]$ і рівномірно обмежені в околі точки $\varepsilon = 0$.

Скориставшись методом математичної індукції, останню теорему можна узагальнити на довільний крок ($r\Delta \le \tau \le (r+1)\Delta, r \ge 1$) [4].

Теорема 3. *Якщо виконуються умови 1–4 та (11^{r-1}), то система диференціальних рівнянь (1) на r-му кроці має розв'язок вигляду*

$$x(\tau,\varepsilon) = U_{mr}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{(r-1)\Delta}^{\tau}\Lambda_{mr}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_r+$$

$$+\ \sum_{j=1}^{r-1}R_{mj}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{(r-1-j)\Delta}^{\tau-j\Delta}\Lambda_{mr-j}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_j+$$

$$+\ p_{mr}(\tau,\varepsilon) + \varepsilon^m\alpha_{mr}(\tau,\varepsilon),$$

де $c_j,\ j = 1,2,\ldots,r,$ — сталі вектори, $\alpha_{mr}(\tau,\varepsilon)$ — вектор, компоненти якого нескінченно диференційовні на відрізку $[r\Delta; (r+1)\Delta]$ і рівномірно обмежені в околі точки $\varepsilon = 0$, а матриці $U_{mr}(\tau,\varepsilon)$, $\Lambda_{mr}(\tau,\varepsilon)$, $R_{mj}(\tau,\varepsilon)$ і вектор $p_{mr}(\tau,\varepsilon)$ мають розвинення вигляду

$$U_{mr}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_r^{(s)}(\tau),\ \ \Lambda_{mr}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_r^{(s)}(\tau),\ \ p_{mr}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s p_r^{(s)}(\tau,\varepsilon),$$

$$R_{mj}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s R_j^{(s)}(\tau),\ \ j = 1,2,\ldots,r-1,\ \ r \ge 1.$$

Зазначимо, що умова розв'язності (11) системи (10) виконується, якщо, наприклад, многочлен $\det(A(\tau) - \lambda B(\tau))$ задовольняє критерій „ранг-степінь” [2].

Розглянемо тепер систему диференціальних рівнянь

$$B(\tau)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(\tau)x(t,\varepsilon) + C(t)x(t-\Delta(\tau),\varepsilon)),\ \tau \in [0; L], \tag{19}$$

де $x(t,\varepsilon)$ — шуканий n-вимірний вектор, а матриці $A(\tau)$, $B(\tau)$ та $C(\tau)$ ті ж самі, що й в системі (1).

Теорема 4. *Якщо виконуються умови 1–3 та:*

5) функція $\Delta(\tau)$ нескінченно диференційовна на відрізку $[0;L]$;

6) $\Delta(\tau) \geq 0, t - \Delta(\tau) \geq 0$ для всіх $\tau \in [0;L]$;

7) характеристичне рівняння

$$\det ||A(\tau) - \lambda B(\tau) + C(\tau)\exp(-\Delta(\tau)\lambda)|| = 0$$

має простий корінь $\lambda = \lambda(\tau)$;

8) $\operatorname{rank} G(\lambda(\tau),\tau) = n-1$, де

$$G(\lambda,\tau) = A(\tau) - \lambda B(\tau) + C(\tau)\exp(-\Delta(\tau)\lambda),$$

то система диференціальних рівнянь (19) має формальний частинний розв'язок вигляду

$$x(t,\varepsilon) = u(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \lambda(\tau)d\tau,\right), \tag{20}$$

де $u(\tau,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, причому

$$u(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u^{(s)}(\tau).$$

Доведення. Підставляючи $x(t,\varepsilon)$ в систему (19), маємо

$$\begin{aligned}\varepsilon u'(\tau,\varepsilon) = &\ (A(\tau) - \lambda(\tau)B(\tau))\,u(\tau,\varepsilon) + \\ &+\ C(\tau)u(\tau - \varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_\tau^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)}\lambda(\tau)d\tau\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Вважаючи вектори $u^{(s)}(\tau),\ s = 0,1,\ldots$, нескінченно диференційовними на відрізку $[0;L]$ (дане твердження доведено нижче), розкладаємо у формальний ряд за степенями ε вектор $u(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon)$ і функцію $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)}\lambda(\tau)d\tau\right)$, тобто

$$u(\tau-\varepsilon\Delta(\tau),\varepsilon) = u^{(0)}(\tau)+\frac{\varepsilon}{1!}\left(u^{(1)}(\tau)-\Delta(\tau)\frac{du^{(0)}(\tau)}{d\tau}\right)+$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2!}\left(2u^{(2)}(\tau)-2\Delta(\tau)\frac{du^{(1)}(\tau)}{d\tau}+\Delta^2(\tau)\frac{d^2u^{(0)}(\tau)}{d\tau^2}\right)+\ldots, \tag{22}$$

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{\tau-\varepsilon\Delta(\tau)}\lambda(\tau)d\tau\right) = \exp\left(-\Delta(\tau)\lambda(\tau)\right)\left(1+\frac{\varepsilon\Delta^2(\tau)\lambda'(\tau)}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon^2\Delta^3(\tau)}{2}\left(\frac{1}{4}\Delta(\tau)\lambda'^2(\tau)-\frac{1}{3}\lambda''(\tau)\right)+\ldots\right.$$

Для визначення векторів $u^{(s)}(\tau),\ s=0,1,\ldots,$ в рівності (21) прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра ε. Зокрема, враховуючи (32), при ε^0 та ε^1 отримуємо

$$C(\tau)u^{(0)}(\tau)=0, \tag{23}$$

$$C(\tau)u^{(1)}(\tau)=f(\tau), \tag{24}$$

де

$$f(\tau)=-C(\tau)\Delta^2(\tau)\lambda'(\tau)-C'_{\lambda}(\lambda(\tau),\tau).$$

У роботі [1] доведено, що системи (23), (24) сумісні і вектори $u^{(0)}(\tau)$ та $u^{(1)}(\tau)$ на відрізку $[0;L]$ нескінченно диференційовні.

Використовуючи метод математичної індукції, можна показати [1] розв'язність системи (21) відносно $u^{(s)}(\tau),\ s=2,3,\ldots$. Теорему доведено.

Вкажемо умови, при виконанні яких формальний розв'язок (20) має асимптотичний характер.

Теорема 5. *Якщо для системи диференціальних рівнянь (19) виконуються умови теореми 4, а також:*

9) $\mathrm{Re}(\lambda(\tau))\le 0,\ \tau\in[0;L]$;

10) $\Delta(\tau)>0,\ \tau\in[0;L]$;

11) вектор

$$x_m(t,\varepsilon)=\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^s u^{(s)}(\tau)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\tau}\lambda(\tau)d\tau\right),\quad m\in\mathbf{N}, \tag{25}$$

на початковій множині ($t \in E_d$) *збігається з точним розв'язком системи (19)*

$$x_m(t,\varepsilon) = x(t,\varepsilon),\ t \in E_d;$$

12) жмуток матриць $A(\tau) - \lambda B(\tau)$ *на відрізку* $[0; L]$ *задовольняє критерій „ранг-степінь”;*

13) корені рівняння (4) прості на відрізку $[0; L]$, *причому виконується умова* 4^2,
то існує стала c_r, *яка не залежить від* ε *і така, що для всіх* $t \in [rd; (r+1)d]$, *де* $1 \leq r \leq \leq \left[\dfrac{L}{\varepsilon}\right] + 1$, $d = \min\limits_{\tau \in [0;L]} \Delta(\tau)$, *справджується нерівність*

$$||x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)|| \leq \varepsilon^{m+1-r} c_r. \tag{26}$$

Доведення. Підставляючи (25) у диференціальний вираз

$$B(\tau)\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} - A(\tau)x(t,\varepsilon) - C(\tau)x(t-\Delta(\tau),\varepsilon),$$

отримуємо

$$B(\tau)\frac{dx_m(t,\varepsilon)}{dt} = A(\tau)x_m(t,\varepsilon) + C(\tau)x_m(t-\Delta(\tau),\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} r_m(\tau,\varepsilon),$$

де $r_m(\tau,\varepsilon)$ — вектор, рівномірно обмежений в околі точки $\varepsilon = 0$. Тому вектор

$$y(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)$$

задовольняє систему диференціальних рівнянь

$$B(\tau)\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt} = A(\tau)y(t,\varepsilon) + C(\tau)y(t-\Delta(\tau),\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} r_m(\tau,\varepsilon), \tag{27}$$

причому

$$y(t,\varepsilon) = 0,\ t \in E_d.$$

Згідно з умовами 12, 13 існують неособливі матриці $P(\tau)$ та $Q(\tau)$, елементи яких нескінченно диференційовні такі, що $P(\tau)A(\tau)Q(\tau) = \Omega(\tau),\ P(\tau)B(\tau)Q(\tau) = H$, де

$$\Omega(\tau) = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & \Lambda(\tau) \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$E_1,\ E_2$ — одиничні матриці порядку $n-\nu$ та ν відповідно, а $\Lambda(\tau)$ — матриця вигляду (17). Тоді, виконавши в системі (27) заміну

$$y(t,\varepsilon) = Q(\tau)z(t,\varepsilon),\ z(t,\varepsilon) = 0,\ t \in E_d, \tag{28}$$

та помноживши обидві її частини зліва на $P(\tau)$, дістанемо

$$H\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt} = \Omega(\tau)z(t,\varepsilon) - \varepsilon HQ^{-1}(\tau)Q'(\tau)z(t,\varepsilon) +$$
$$+ P(\tau)C(\tau)Q(\tau)z(t-\Delta(\tau),\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1}\right). \tag{29}$$

Нехай

$$z(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} z_1(t,\varepsilon) \\ z_2(t,\varepsilon) \end{pmatrix}, \ K(\tau) = HQ^{-1}(\tau)Q'(\tau) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ K_1(\tau) & K_2(\tau) \end{pmatrix},$$

$$P(\tau)C(\tau)Q(\tau) = \begin{pmatrix} C_1(\tau) & C_2(\tau) \\ C_3(\tau) & C_4(\tau) \end{pmatrix},$$

де $z_1(t,\varepsilon)$ — $(n-\nu)$-вимірний вектор, координатами якого є перші $n-\nu$ координат вектора $z(t,\varepsilon)$, а $z_2(t,\varepsilon)$ — ν-вимірний вектор, координатами якого є решта координат $z(t,\varepsilon)$.

Тоді система (29) набирає вигляду

$$z_1(t,\varepsilon) = -C_1(\tau)z_1(t-\Delta(\tau),\varepsilon) - C_2(\tau)z_2(t-\Delta(\tau),\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1}\right), \tag{30}$$

$$\frac{dz_2(t,\varepsilon)}{dt} = \Lambda(\tau)z_2(t,\varepsilon) - \varepsilon K_1(\tau)z_1(t,\varepsilon) - \varepsilon K_2(\tau)z_2(t,\varepsilon) +$$
$$+ C_3(\tau)z_1(t-\Delta(\tau),\varepsilon) + C_4(\tau)z_2(t-\Delta(\tau),\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{m+1}\right). \tag{31}$$

Замінимо систему (31) рівносильною системою інтегральних рівнянь. Враховуючи (28), на r-му кроці $((r-1)d \le t \le rd)$ маємо

$$z_2(t,\varepsilon) = -\varepsilon \int\limits_{(r-1)d}^{t} \exp\left(\int\limits_{t_1}^{t}\Lambda(\tau)dt\right)\left(K_1(\tau_1)z_1(t_1,\varepsilon) + K_2(\tau_1)z_2(t_1,\varepsilon)\right)dt_1 +$$
$$+ \int\limits_{(r-1)d}^{t} \exp\left(\int\limits_{t_1}^{t}\Lambda(\tau)dt\right)\left(C_3(\tau_1)z_1(t_1-\Delta(\tau_1),\varepsilon) + C_4(\tau_1)z_2(t_1-\Delta(\tau_1),\varepsilon)\right)dt_1 +$$
$$+ \int\limits_{(r-1)d}^{t} \exp\left(\int\limits_{t_1}^{t}\Lambda(\tau)dt\right)O\left(\varepsilon^{m+1}\right)dt_1 + y((r-1)d,\varepsilon).$$

Згідно з умовою 13

$$\left\| \int_{t_1}^{t} \Lambda(\tau) dt \right\| \leq 1.$$

Тому

$$\|z_2(t,\varepsilon)\| \leq \varepsilon \int_{(r-1)d}^{t} \|K_1(\tau_1) z_1(t_1,\varepsilon) + K_2(\tau_1) z_2(t_1,\varepsilon)\| dt_1 +$$

$$+ \int_{(r-1)d}^{t} \|C_3(\tau_1) z_1(t_1 - \Delta(\tau_1),\varepsilon) + C_4(\tau_1) z_2(t_1 - \Delta(\tau_1),\varepsilon)\| \, dt_1 +$$

$$+ \; O\left(\varepsilon^m\right) + \|y((r-1)d,\varepsilon)\|. \tag{32}$$

Подальше доведення теореми проведемо методом індукції. Для цього спочатку покладемо $0 \leq t \leq d$. Тоді з (30) та (32) матимемо оцінку

$$||z(t,\varepsilon)|| \leq M\varepsilon^m.$$

Таким чином, для $t \in [0;d]$ теорему доведено. Використовуючи метод математичної індукції, можна показати справедливість оцінки (26) на r-му кроці [1, 3]. Теорему доведено.

1. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — Киев: Наук. думка, 1981. — 296 с.
2. *Шкіль М.І., Самусенко П.Ф.* Про асимптотичні формули для розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідних // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 9. — С. 1278–1285.
3. *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Выща шк., 1991. — 207 с.
4. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.

Одержано 19.09.2002