УДК 517.9

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНОЇ ЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

А.М. Акименко

Ніжин. пед. ун-т
Україна, 16600, Ніжин Чернігівської обл., вул. Кропив'янського, 2

The concept of stability of solutions of a system of linear differential equations with an identically degenerated matrix at the derivative is introduced. We find necessary and sufficient conditions for such systems to be stable. For this type of systems with periodic coefficients, the Floquet – Lyapunov theory is generalized.

Введено поняття стійкості розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідній. Знайдено необхідні і достатні умови стійкості даних систем. На системи даного типу з періодичними коефіцієнтами узагальнено теорію Флоке – Ляпунова.

1. Розглянемо систему рівнянь

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \tag{1}$$

задану на проміжку $R = (a; +\infty)$, де a — число або символ $-\infty$, в якій $x, f(t)$ — n-вимірні вектори, $A(t), B(t)$ — квадратні матриці n-порядку, елементи яких є дійсними функціями змінної t. При цьому матриця $B(t)$ тотожно вироджена на проміжку R:

$$\det B(t) = 0, t \in R.$$

Будемо вважати, що система (1) на будь-якому відрізку $[\alpha; \beta] \subset R$ задовольняє умови теореми із [1] про звідність до центральної канонічної форми, а саме:

1) $A(t), B(t) \in C^{2m}[\alpha; \beta]$;

2) $\operatorname{rang} B(t) = n - r$;

3) матриця $B(t)$ має на відрізку $[\alpha; \beta]$ повний жорданів набір векторів відносно оператора $L(t) = A(t) - B(t)\dfrac{d}{dt}$, який складається з r ланцюжків завдовжки $s_1, s_2, ..., s_r$, де $\max\limits_i s_i = m$.

Як показано в [1 – 3], за цих умов система (1) має загальний розв'язок типу Коші, який можна подати у вигляді

$$x(t) = X_{n-s}(t)c + \widetilde{x}(t), \tag{2}$$

де $X_{n-s}(t)$ — прямокутна матриця розміру $n \times (n - s)$, стовпцями якої є $n - s$ лінійно незалежних розв'язків відповідної однорідної системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{3}$$

c — $(n-s)$-вимірний вектор довільних сталих, $\widetilde{x}(t)$ — довільний розв'язок неоднорідної системи (1), $s = s_1 + \ldots + s_r$.

По аналогії з нормальною лінійною системою прямокутну матрицю $X_{n-s}(t)$ називатимемо фундаментальною матрицею однорідної системи (3). Поряд з системою (3) розглянемо спряжену з нею систему

$$\frac{d}{dt}B'(t)y = -A'(t)y, \tag{4}$$

де $A'(t), B'(t)$ — матриці, транспоновані з матрицями $A(t)$ та $B(t)$ відповідно. Якщо $Y_{n-s}(t)$ — фундаментальна матриця системи (4), а $Y^*_{n-s}(t)$ — спряжена з нею, то, як показано в [2, 3], матрицю $X_{n-s}(t)$ завжди можна визначити так, щоб виконувалась рівність

$$Y^*_{n-s}(t)B(t)X_{n-s}(t) = E, \tag{5}$$

де E — одинична матриця $(n-s)$-го порядку.

Розглянемо задачу Коші для системи (1)

$$x(t_0) = x_0.$$

Як показано в [3. с. 67], для того щоб ця задача мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб початковий вектор x_0 задовольняв умови

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i}(A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_j^{k-i}(t_0)) = 0, \qquad j = \overline{1,r}, \;\; k = \overline{1,s_j},$$

де $\psi_i^j(t), i = \overline{1,r}, j = \overline{1,s_i}$, — вектори, які утворюють жорданів набір матриці $B^*(t)$ відносно оператора $L^*(t) = A^*(t) + \dfrac{d}{dt}B^*(t)$. Цей розв'язок єдиний і визначається за формулою

$$x(t) = X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(t_0)B(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(\tau)f(\tau)d\tau -$$

$$- \Phi(t)\sum_{k=0}^{m-1} J^k \frac{d^k}{dt^k}[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)]^{-1}\Psi^*(t)f(t), \tag{6}$$

де $\Phi(t),\ \Psi(t)$ — матриці розміру $n \times s$, складені з векторів, які утворюють жорданові набори матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і матриці $B^*(t)$ відносно $L^*(t)$.

2. Користуючись цими результатами (зокрема, властивістю єдиності розв'язку задачі Коші), по аналогії з теорією стійкості для нормальних лінійних систем [4] введемо поняття стійкості розв'язків виродженої лінійної системи (1).

Означення 1. *Розв'язок $\eta = \eta(t)$, визначений на проміжку R, будемо називати стійким при $t \to +\infty$, якщо для довільних $\varepsilon > 0$ та $t_0 \in R$ існує $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ таке, що для всіх розв'язків $y = y(t)$ системи (1), які задовольняють умову*

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta,$$

виконується нерівність

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \in [t_0; +\infty).$$

Означення 2. *Розв'язок $\eta = \eta(t)$, визначений на проміжку R, називатимемо нестійким, якщо для довільного $\varepsilon > 0$, $t_0 \in R$ і будь-якого $\delta > 0$ існують принаймні один розв'язок $y_\delta(t)$ і момент $t_1 = t_1(\delta) > t_0$ такі, що*

$$\|y_\delta(t) - \eta(t_0)\| < \delta, \ \|y_\delta(t_1) - \eta(t_1)\| \geq \varepsilon.$$

Означення 3. *Розв'язок $\eta = \eta(t)$ системи (1) називатимемо асимптотично стійким при $t \to +\infty$, якщо:*

1) цей розв'язок стійкий;

2) для будь-якого $t_0 \in R$ існує таке число $\delta(t_0) > 0$, що для всіх розв'язків $y = y(t)$ системи (1), які задовольняють умову

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta,$$

виконується рівність

$$\lim_{t \to \infty} \|y(t) - \eta(t)\| = 0.$$

З лінійності системи (1) випливає, що різниця будь-яких двох її розв'язків є розв'язком відповідної однорідної системи (3), і будь-який розв'язок однорідної системи можна подати у вигляді різниці деяких розв'язків неоднорідної системи. Виходячи з цього, доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Для того щоб розв'язок системи (1) був стійким, необхідно і достатньо, щоб був стійким нульовий розв'язок $x_0 \equiv 0$ відповідної однорідної системи (3).*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\eta = \eta(t), \ t_0 \leq t < \infty$, — стійкий розв'язок системи (1). Тоді згідно з означенням 1 для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого розв'язку системи (1), який задовольняє умову

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta,$$

при всіх $t_0 \leq t < \infty$ виконується нерівність

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon.$$

Але оскільки вектор-функція $x(t) = y(t) - \eta(t)$ є розв'язком однорідної системи (3) і будь-який розв'язок цієї системи можна подати у такому вигляді, то з останньої нерівності випливає, що $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всіх $t_0 \leq t < \infty$, якщо $\|x(t_0)\| < \delta$, де $x(t)$ — розв'язок однорідної системи (3). А це означає, що нульовий розв'язок однорідної системи стійкий.

Достатність. Припустимо, що нульовий розв'язок однорідної системи (3) стійкий при $t \to +\infty$. Тоді якщо $x(t), \ t_0 \leq t < \infty$, — довільний розв'язок цієї системи такий, що

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0),$$

то

$$\|x(t)\| < \varepsilon \text{ при } t_0 \le t < \infty.$$

Тому якщо $\eta(t)$ — деякий розв'язок неоднорідної системи (1), а $y(t)$ — довільний розв'язок цієї системи, то з нерівності

$$\|y(t_0) - \eta(t_0)\| < \delta(\varepsilon, t_0)$$

випливатиме нерівність

$$\|y(t) - \eta(t)\| < \varepsilon \text{ при } t_0 \le t < \infty.$$

А це означає, що розв'язок $\eta(t)$ стійкий.

Аналогічно доводиться наступне твердження.

Теорема 2. *Для того щоб розв'язок системи (1) був асимптотично стійким при $t \to +\infty$, необхідно і достатньо, щоб асимптотично стійким при $t \to +\infty$ був нульовий розв'язок відповідної однорідної системи (3).*

Безпосередньо з цих теорем випливає, що всі розв'язки лінійної системи (1) є стійкими, асимптотично стійкими або нестійкими одночасно. У зв'язку з цим коректним є таке означення.

Означення 4. *Лінійну систему (1) будемо називати стійкою, асимптотично стійкою при $t \to +\infty$ або нестійкою, якщо всі її розв'язки відповідно стійкі, асимптотично стійкі при $t \to +\infty$ або нестійкі.*

Як наслідок, з теорем 1, 2 випливає таке твердження.

Теорема 3. *Неоднорідна система (1) стійка (асимптотично стійка) тоді і тільки тоді, коли стійка (асимптотично стійка) відповідна однорідна система.*

Таким чином, вивчення стійкості розв'язків неоднорідної системи (1), як і у випадку нормальних систем, зводиться до вивчення стійкості відповідної однорідної системи (3).

3. Розглянемо однорідну систему (3). Покажемо, що при виконанні всіх умов, сформульованих у п. 1, її стійкість еквівалентна обмеженості всіх її розв'язків.

Теорема 4. *Однорідна система (3) стійка тоді і тільки тоді, коли кожний розв'язок цієї системи $x = x(t),\ t_0 \le t < \infty$, обмежений на $[t_0; \infty)$.*

Доведення. *Достатність.* Припустимо, що будь-який розв'язок системи (3) обмежений на $[t_0; \infty) \subset R$.

Розглянемо фундаментальну матрицю $X_{n-s}(t)$ цієї системи, таку, що виконується рівність (5). Оскільки за припущенням ця матриця складається з обмежених функцій, то

$$\|X_{n-s}(t)\| \le M \text{ при } t_0 \le t < \infty,$$

де M — деяка стала, яка залежить від t_0.

Згідно з (6) довільний розв'язок $x = x(t)$ системи (3) можна подати у вигляді

$$x(t) = X_{n-s}(t)Y^*_{n-s}(t_0)B(t_0)x(t_0),$$

звідки маємо

$$\|x(t)\| \leq \|X_{n-s}(t)\|\|Y^*_{n-s}(t_0)B(t_0)\|\|x(t_0)\| \leq MN\|x(t_0)\| < \varepsilon,$$

де

$$N = \|Y^*_{n-s}(t_0)B(t_0)\|.$$

Отже, якщо

$$\|x(t_0)\| < \frac{\varepsilon}{MN},$$

то

$$\|x(t)\| < \varepsilon \qquad \forall t \in [t_0; \infty).$$

А це означає, що нульовий розв'язок системи (3) стійкий при $t \to +\infty$, звідки в силу теореми 1 випливає, що система (3) стійка.

Необхідність. Припустимо, що система (3) має необмежений на $[t_0; +\infty)$ розв'язок $z(t)$. Тоді, не змінюючи загальності, можна вважати, що $z(t_0) \neq 0$. Зафіксуємо числа $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ і розглянемо розв'язок

$$x(t) = \frac{z(t)}{\|z(t_0)\|}\frac{\delta}{2},$$

для якого

$$\|x(t_0)\| = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Але з необмеженості розв'язку $z(t)$ для деякого моменту часу $t_1 > t_0$ матимемо

$$\|x(t_1)\| = \frac{\|z(t_1)\|}{\|z(t_0)\|}\frac{\delta}{2} > \varepsilon.$$

Отже, нульовий розв'язок системи (3) нестійкий, звідки в силу теореми 1 випливає, що нестійкою є й система (1), тобто вона не може бути стійкою за наявності хоча б одного необмеженого розв'язку. Теорему доведено.

Аналогічно до теореми 2 із [4] (гл. 2, §7) можна довести таке твердження.

Теорема 5. *Однорідна система (3) асимптотично стійка тоді і тільки тоді, коли всі її розв'язки $x = x(t)$ прямують до нуля при $t \to +\infty$:*

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

4. Таким чином, для вирішення питання про стійкість системи (1) необхідно з'ясувати питання про обмеженість розв'язків відповідної однорідної системи (3). Як і у випадку невироджених систем, найбільш повну відповідь на це питання можна дати, розглядаючи системи з періодичними коефіцієнтами.

Припустимо, що матриці $A(t)$, $B(t)$ ω-періодичні з періодом $\omega > 0$. Нехай $X_{n-s}(t)$ — фундаментальна матриця цієї системи. Тоді матриця $X_{n-s}(t+\omega)$ також буде фундаментальною матрицею, оскільки вона задовольняє систему (1):

$$B(t)\frac{dX_{n-s}(t+\omega)}{dt} = B(t+\omega)\frac{dX_{n-s}(t+\omega)}{d(t+\omega)} =$$

$$= A(t+\omega)X_{n-s}(t+\omega) = A(t)X_{n-s}(t+\omega),$$

а її вектор-стовпці лінійно незалежні. Тому

$$X_{n-s}(t+\omega) = X_{n-s}(t)C, \tag{7}$$

де C — деяка стала матриця розміру $(n-s)\times(n-s)$. Помноживши цю рівність зліва на матрицю $Y^*_{n-s}(0)B(0)$ і поклавши в ній $t=0$, дістанемо

$$Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(\omega) = Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(0)C.$$

Оскільки згідно з (5)

$$Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(0) = E,$$

то звідси випливає

$$C = Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(\omega) = \Omega(\omega), \tag{8}$$

де $\Omega(\omega)$ — матриця монодромії системи (3), введена в [3, с. 76]. Підставивши (8) у (7), матимемо

$$X_{n-s}(t+\omega) = X_{n-s}(t)\Omega(\omega). \tag{9}$$

Позначимо

$$\frac{1}{\omega}\mathrm{Ln}\,\Omega(\omega) = \Lambda, \tag{10}$$

звідки

$$\Omega(\omega) = e^{\Lambda\omega}. \tag{11}$$

Запишемо рівність

$$X_{n-s}(t) \equiv X_{n-s}(t)e^{-\Lambda t}e^{\Lambda t}.$$

Звідси

$$X_{n-s}(t) \equiv \Phi(t)e^{\Lambda t}, \tag{12}$$

де

$$\Phi(t) = X_{n-s}(t)e^{-\Lambda t}.$$

Покажемо, що матриця $\Phi(t)$ ω-періодична. Дійсно, беручи до уваги рівності (9), (11), маємо

$$\Phi(t+\omega) = X_{n-s}(t+\omega)e^{-\Lambda(t+\omega)} = X_{n-s}(t)\Omega(\omega)e^{-\Lambda\omega}e^{-\Lambda t} =$$

$$= X_{n-s}(t)e^{\Lambda\omega}e^{-\Lambda\omega}e^{-\Lambda t} = X_{n-s}(t)e^{-\Lambda t} = \Phi(t).$$

В результаті одержуємо теорему, аналогічну до теореми Флоке – Ляпунова.

Теорема 6. *Якщо виконуються умови 1 – 3, то фундаментальна матриця розв'язків виродженої однорідної системи (3) з ω-періодичними коефіцієнтами має вигляд*

$$X_{n-s}(t) = \Phi(t)e^{\Lambda t}, \tag{13}$$

де $\Phi(t)$ — ω-періодична прямокутна матриця розміру $n \times (n-s)$, а Λ — стала квадратна матриця $(n-s)$-го порядку.

Власні значення ρ_j матриці монодромії

$$\Omega(\omega) = Y^*_{n-s}(0)B(0)X_{n-s}(\omega)$$

називатимемо мультиплікаторами системи (3) [3, с. 76] , а власні значення λ_j матриці Λ — характеристичними показниками цієї системи. З формули (10) отримаємо такі співвідношення між характеристичними показниками і мультиплікаторами:

$$\lambda_j = \frac{1}{\omega}\mathrm{Ln}\,\rho_j = \frac{1}{\omega}[\ln|\rho_j| + i(\arg\rho_j + 2k\pi)], \qquad j = \overline{1, n-s},\;\; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{14}$$

5. Виходячи з формули (13), з'ясуємо питання про обмеженість, а отже, і стійкість розв'язків системи (3). Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k,\; k \le n-s,$ — характеристичні показники системи (3). Зведемо матрицю Λ до канонічної форми Жордана:

$$\Lambda = S^{-1}\mathrm{diag}\,\{J_1(\lambda_1), \ldots, J_k(\lambda_k)\}S,$$

де S — перетворююча матриця розміру $s \times s$ і $J_i(\lambda_i)$ — відповідні клітки Жордана. Тоді з формули (13) дістанемо

$$X_{n-s}(t) = \Phi(t)S^{-1}\mathrm{diag}\,\{e^{tJ_1(\lambda_1)}, \ldots, e^{tJ_k(\lambda_k)}\}S.$$

Оскільки матриця $U_{n-s}(t) = X_{n-s}(t)S^{-1}$ також є фундаментальною для системи (3), то ця система має фундаментальну матрицю вигляду

$$U_{n-s}(t) = \Psi(t)\mathrm{diag}\,\{e^{tJ_1(\lambda_1)}, \ldots, e^{tJ_k(\lambda_k)}\},$$

де $\Psi(t) = \Phi(t)S^{-1}$ — ω-періодична прямокутна матриця розміру $n \times (n-s)$.

Беручи до уваги, що [5]

$$e^{tJ_i(\lambda_i)} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \dfrac{t}{1!}e^{\lambda_i t} & \ldots & \dfrac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \ldots & \dfrac{t^{k_i-2}}{(k_i-2)!}e^{\lambda_i t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix},$$

де k_i — кратність відповідного елементарного дільника для характеристичного показника λ_i, а також обмеженість елементів матриці $\Psi(t)$, приходимо до висновку, що фундаментальна матриця розв'язків системи (3) буде обмеженою на проміжку $[t_0; +\infty)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq 0, \; j = \overline{1,k},$$

причому характеристичним показникам з нульовою дійсною частиною відповідають тільки прості елементарні дільники, якщо їх розглядати як власні елементи матриці Λ. Згідно із співвідношенням (14) ця умова виконується тоді і тільки тоді, коли всі мультиплікатори системи (3) задовольняють умову $|\rho_j| \leq 1$, причому мультиплікаторам, для яких $|\rho_j| = 1$, відповідають прості елементарні дільники, якщо їх розглядати як власні значення матриці монодромії.

Поєднуючи цей результат з теоремами 4, 5, одержуємо таке твердження.

Теорема 7. *Якщо виконуються умови 1–3, то однорідна періодична система (3) стійка тоді і тільки тоді, коли всі її мультиплікатори розміщені всередині замкнутого одиничного круга $|\rho| \leq 1$ комплексної площини, причому мультиплікаторам, які лежать на колі $|\rho| = 1$, відповідають прості елементарні дільники матриці монодромії.*

Для асимптотичної стійкості періодичної системи (3) необхідно і достатньо, щоб усі її мультиплікатори знаходились усередині одиничного круга $|\rho| < 1$.

1. *Самойленко А.М., Яковець В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. НАН Украины. — 1993. — № 4. — С. 10–15.
2. *Яковець В.П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журн. — 1997. — **49**, № 9. — С. 1248–1296 .
3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1988. — 548 с.

Одержано 30.05.2002