УДК 517 .91/943

ЗНАХОДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

Ю. П. Підченко

Нац. пед. ун-т
Україна, 01030, Київ, вул. Пирогова, 9

Asymptotic methods developed in works of S. F. Feshchenko, M. I. Shkil', and their collaborators for integrating differential equations with slowly changing coefficients are applied to solving certain nonlinear differential-difference equations.

Асимптотичні методи, розроблені у працях С.Ф. Фещенка, М.І. Шкіля та їхніх учнів і послідовників для інтегрування диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, застосовуються до розв'язування деяких нелінійних диференціально-різницевих рівнянь.

Розглянемо систему

$$\frac{dx(\tau,\varepsilon)}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x(\tau,\varepsilon) + B(\tau, x(\tau-\Delta,\varepsilon)) +$$

$$+ C(\tau, x'(\tau-\Delta,\varepsilon)) + f(\tau,\varepsilon)e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)}, \tag{1}$$

де $x(\tau,\varepsilon), f(\tau,\varepsilon), B$ і C — n-вимірні вектори, $A(\tau,\varepsilon)$ — квадратна матриця, $\Delta > 0$ — стале відхилення, $i = \sqrt{-1}$.

При цьому матриця $A(\tau,\varepsilon)$ і вектор $f(\tau,\varepsilon)$ зображуються у вигляді збіжних рядів за степенями малого дійсного параметра $\varepsilon (\varepsilon > 0)$:

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A^{(s)}(\tau), \quad f(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s f^{(s)}(\tau), \quad 0 \le \tau = \varepsilon t \le L < +\infty, \tag{2}$$

а компоненти $B_i(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $C_i(\tau, x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $i = \overline{1,n}$, вектор-функцій B і C — нескінченно диференційовні функції змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ відповідно для $\tau \in [0; L]$.

Крім того, вважаємо, що мають місце розвинення

$$B_i(\tau, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ k_1,\ldots,k_n \ge 0}} b_{ik_1k_2\ldots k_n}(\tau) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

$$(3)$$

$$C_i(\tau, x_1', x_2', \ldots, x_n') = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=k \\ k_1,\ldots,k_n \ge 0}} c_{ik_1k_2\ldots k_n}(\tau) (x_1')^{k_1} (x_2')^{k_2} \ldots (x_n')^{k_n}$$

© Ю. П. Підченко, 2002

і коефіцієнти $b_{ik_1k_2\ldots k_n}$ і $c_{ik_1k_2\ldots k_n}$ для всіх $\tau \in [0; L]$ задовольняють нерівності

$$|b_{ik_1k_2\ldots k_n}| < \frac{M}{R^{k_1+\ldots+k_n}}, \qquad |c_{ik_1k_2\ldots k_n}| < \frac{N}{S^{k_1+\ldots+k_n}},$$

M, N, R, S — деякі дійсні сталі, що не залежать від $\tau, i, k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Отже, якщо $0 < \alpha < \min\{R, S\}$, то на множині $Q = [0 \le \tau \le L, ||x|| < \alpha]$ збігається перший із рядів (3), а на множині $Q_1 = [0 \le \tau \le L, ||x|| < \alpha]$ — другий.

Розглянемо для системи (1) основну початкову задачу, тобто шукатимемо неперервні або кусково-неперервні розв'язки цієї системи для $\tau \in [0; L]$, що задовольняють початкові умови

$$x(\tau,\varepsilon) = \varphi(\tau,\varepsilon),\ -\Delta \le \tau \le 0;\ \ x'(\tau,\varepsilon) = \varphi'(\tau,\varepsilon),\ -\Delta \le \tau \le 0,$$

де $\varphi(\tau,\varepsilon)$ — вектор-функція, що виражається збіжним рядом вигляду (2).

Лінійні системи вигляду (1) досліджено в [1, 2], а в [3] дану задачу розглянуто для випадку простих коренів характеристичного рівняння

$$|A^{(0)}(\tau) - \lambda E| = 0. \tag{4}$$

У даній статті розглянемо випадок кратних коренів. Отже, нехай рівняння (4) має $p,\ 1 \le p \le n$, кратних коренів $\lambda_1^{(0)}(\tau), \ldots, \lambda_p^{(0)}(\tau)$, що задовольняють для $\tau \in [0; L]$ такі умови:

1) матриця $A(\tau,\varepsilon)$, вектори $f(\tau,\varepsilon),\ \varphi(\tau,\varepsilon)$ і функція $\nu(\tau) = \dfrac{d\theta(\tau)}{d\tau}$ мають похідні до m-го порядку включно (m — натуральне число) відповідно на сегментах $[0; L]$ і $[-\Delta; 0]$;

2) корені $\lambda_1^{(0)}(\tau), \ldots, \lambda_p^{(0)}(\tau)$:

а) для $\tau \in [0; L]$ не перетворюються в нуль:

$$\lambda_j^{(0)}(\tau) \ne 0,\ \ j = \overline{1,p};$$

б) дійсні частини цих коренів для $\tau \in [0; L]$ недодатні:

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_j^{(0)}(\tau)) \le 0,\ \ j = \overline{1,p};$$

в) для будь-яких $\tau_1 < \tau_2,\ \tau_1, \tau_2 \in [0; L]$,

$$\lambda_i^{(0)}(\tau) \ne \lambda_j^{(0)}(\tau),\ \ i \ne j,\ \ i,j = \overline{1,p};$$

3) корені $\lambda_1^{(0)}(\tau), \ldots, \lambda_p^{(0)}(\tau)$ зберігають постійну кратність $l_1, \ldots, l_p$ $(l_1 + \ldots + l_p = n)$, причому вони занумеровані так, що виконується співвідношення $l_1 \ge l_2 \ge \ldots \ge l_p \ge 2$.

Кратним кореням можуть відповідати прості або кратні елементарні дільники. Розглянемо, як більш складний, випадок кратних елементарних дільників. При цьому вважатимемо, що кореневі $\lambda_j^{(0)}(\tau)$ кратності l_j відповідає один елементарний дільник такої ж кратності. Тоді, як відомо, для матриці $A^{(0)}(\tau)$ існує невироджена матриця $V(\tau)$ така, що матриця $W(\tau) = V^{-1}(\tau)A^{(0)}(\tau)V(\tau)$ має квазідіагональну структуру:

$$W(\tau) = \{W_1(\tau), W_2(\tau), \ldots, W_p(\tau)\},$$

де $W_j(\tau)$ — клітина Жордана довжини l_j, що відповідає кореневі $\lambda_j^{(0)}(\tau)$.

Побудуємо асимптотичне розвинення розв'язку для „резонансного" випадку, тобто коли

$$i\nu(\tau) \equiv \lambda_1^{(0)}(\tau), \text{ але } i\nu(\tau) \neq \lambda_j^{(0)}(\tau),\ j = \overline{2,p},\ \forall\tau \in [0;l] \ \left(\nu(\tau) = \frac{d\theta(\tau)}{d\tau}\right).$$

Для цього в системі (1) виконаємо на першому кроці $0 \le \tau \le \Delta$ заміну змінних

$$x(\tau,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{p} U_{jm,1}(\tau,\mu_j)y_j(\tau,\varepsilon) + p_{m,1}(\tau,\varepsilon) + h_{m,1}(\tau,\varepsilon)e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)}, \tag{5}$$

де матриця $U_{jm,1}(\tau,\mu_j)$ розмірів $n \times k_j$ має вигляд

$$U_{jm,1}(\tau,\mu_j) = \sum_{s=0}^{l_j m-1} \mu_j^s u_{j1}^{(s)}(\tau),\ \ \mu_j = \sqrt[l_j]{\varepsilon},\ j = \overline{1,p}, \tag{6}$$

а n-вимірні вектори $p_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ і $h_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ такі:

$$p_{m,1}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{m-1} \varepsilon^s p_1^{(s)}(\tau),\ \ h_{m,1}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=-1}^{m-1} \varepsilon^s h_1^{(s)}(\tau). \tag{7}$$

Тоді система (1) набирає вигляду

$$\sum_{j=1}^{p} U_{jm,1}\,(\tau,\mu_j)\frac{dy_j(\tau,\varepsilon)}{dt} = \sum_{j=1}^{p}\left[A(\tau,\varepsilon)U_{jm,1}(\tau,\mu_j) - \varepsilon U_{jm,1}(\tau,\mu_j)'\right]y_j +$$

$$+\ B(\tau,\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon) + C(\tau,\varphi'(\tau-\Delta,\varepsilon)) + A(\tau,\varepsilon)p_{m,1}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon p'_{m,1}(\tau,\varepsilon) +$$

$$+\ \left[A(\tau,\varepsilon)h_{m,1}(\tau,\varepsilon) + f(\tau,\varepsilon) - i\nu(\tau)h_{m,1}(\tau,\varepsilon) - \varepsilon h'_{m,1}(\tau,\varepsilon)\right]e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)}. \tag{8}$$

Із обмежень, яким підпорядковуються вектори B, C і φ, випливає, що $B(\tau,\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon))$ і $C(\tau,\varphi'(\tau-\Delta,\varepsilon))$ виражаються збіжними рядами за параметром ε.

Далі потрібно побудувати шукані матриці і вектори, що входять до сум (6) і (7), так, щоб для вектора $y_j,\ j = 1,\ldots,p$, одержати систему, яка з точністю до величин порядку $O(\varepsilon^m)$ інтегрується в замкненій формі. Для цього матриці $U_{jm,1}(\tau,\mu_j),\ j = 1,\ldots,p$, визначимо із співвідношень

$$A(\tau,\varepsilon)U_{jm,1}(\tau,\mu_j) - \varepsilon U'_{jm,1}(\tau,\mu_j) =$$

$$= U_{jm,1}(\tau,\mu_j)\left[W_j(\tau)+\lambda_{jm,1}(\tau,\mu_j)+\mu_j^{l_j m}D_{jjm,1}(\tau,\varepsilon)\right]+$$

$$+\ \varepsilon^m \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} U_{im,1}(\tau,\mu_j)D_{ijm,1}(\tau,\varepsilon), \tag{9}$$

а вектори $p_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ і $h_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ — відповідно із співвідношень

$$A(\tau,\varepsilon)p_{m,1}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon p'_{m,1}(\tau,\varepsilon)+\varphi_1(\tau,\varepsilon) = \varepsilon^m q_{m,1}(\tau,\varepsilon) \tag{10}$$

і

$$(A(\tau,\varepsilon)-i\nu(\tau,\varepsilon)E)h_{m,1}(\tau,\varepsilon)-\varepsilon h'_{m,1}(\tau,\varepsilon)+f(\tau,\varepsilon) = \varepsilon^m \Pi_{m,1}(\tau,\varepsilon), \tag{11}$$

$\Lambda_{jm,1}(\tau,\mu_j)$ — діагональна матриця вигляду

$$\Lambda_{jm,1}(\tau,\mu_j) = \sum_{s=1}^{l_j(m-1)} \mu^s \Lambda_{j1}^{(s)}(\tau),$$

$\varphi_1(\tau,\varepsilon) = B(\tau,\varphi(\tau-\Delta,\varepsilon))+C(\tau,\varphi'(\tau-\Delta,\varepsilon))$, а матриця $D_{ijm,1}(\tau,\varepsilon),\ i,j=\overline{1,p}$, розмірів $l_i \times l_j$ і n-вимірні вектори $q_{m,1}(\tau,\varepsilon),\ \Pi_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ рівномірно обмежені в околі точки $\varepsilon = 0$.

Прирівнюючи в (9) коефіцієнти при $\mu_j^s,\ s=\overline{0,nl_j}$, одержуємо рівняння

$$A^{(0)}(\tau)U_{j1}^{(0)}(\tau)-U_{j1}^{(0)}(\tau)W_j(\tau) = 0, \tag{12}$$

$$A^{(0)}(\tau)U_{j1}^{(s)}(\tau) - U_{j1}^{(s)}(\tau)W_j(\tau) = F_{j1}^{(s)}(\tau)+$$

$$+\sum_{k=0}^{s-1} U_{j1}^{(k)}(\tau)\Lambda_{j1}^{(s-k)}(\tau),\ \ 1\le s\le l_j(m-1), \tag{13}$$

$$A^{(0)}(\tau)U_{j1}^{(s)}(\tau) - U_{j1}^{(s)}(\tau)W_j(\tau) = F_{j1}^{(s)}(\tau)+$$

$$+\sum_{k=0}^{l_j(m-1)} U_{j1}^{(s-k)}(\tau)\Lambda_{j1}^{(k)}(\tau),\ \ (m-1)l_j \le ml_j-1, \tag{14}$$

$$U_{jm,1}(\tau,\mu_j)D_{jjm,1}(\tau,\varepsilon) \;+\; \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} U_{im,1}(\tau,\mu_j)D_{ijm,1}(\tau,\varepsilon) \;=$$

$$= \;-\sum_{i=1}^{l_j-1}\mu_j^i\frac{dU_{j1}^{(m-1)l_j+i}(\tau)}{d\tau} - \sum_{i=1}^{(m-1)l_j-1}\;\sum_{r=1}^{(m-1)l_j-1}\mu_j^i U_{j1}^{(ml_j+r)}\Lambda_{j1}^{(i+r)}(\tau)+$$

$$+\;\sum_{i\geq[m-\frac{s}{l_j}]}^{\infty}\;\sum_{s=0}^{ml_j-1}\mu_j^{il_j+s}A^{(i)}(\tau)U_{j1}^{(s)}(\tau), \tag{15}$$

де

$$F_{j1}^{(s)} \;=\; \frac{dU_{j1}^{(s-l_j)}(\tau)}{d\tau} - \sum_{i=1}^{[\frac{s}{l_j}]}A^{(i)}(\tau)U_{j1}^{(s-il_j)}(\tau)$$

($[x]$ означає цілу частину від x).

Для того щоб системи (12) – (14) можна було розв'язати, вимагатимемо від матриці

$$\Omega \;=\; V^{-1}(\tau)[V'(\tau) - A^{(1)}(\tau)V(\tau)],$$

щоб її елементи

$$\{\omega(\tau)\}_{r_j,r_{j-1}+1}\quad\left(r_j \;=\; \sum_{i=1}^{j}l_i,\; j\;=\;\overline{1,p}\right)$$

для всіх $r\in[0;L]$ задовольняли умову

$$\{\omega(\tau)\}_{r_j,r_{j-1}+1}\;\neq\;0. \tag{16}$$

Системи (12) – (14) при обмеженнях (16) розв'язні (див. [5]). Визначивши з них матриці $U_{jm,1}(\tau,\mu_j)$ і $\Lambda_{jm,1}(\tau,\mu_j),\; j\;=\;\overline{1,p}$, можна визначити і матриці $D_{ijm,1}(\tau,\varepsilon),\; i,j\;=\;\overline{1,p}$.

Для цього спочатку запишемо рівність (15) у вигляді

$$U_{jm,1}(\tau,\mu_j)D_{ijm,1}(\tau,\varepsilon)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p}U_{im,1}(\tau,\mu_j)D_{ijm,1}(\tau,\varepsilon)\;=\;\Phi_{j1}(\tau,\varepsilon),\;\; j\;=\;\overline{1,p}, \tag{17}$$

де $\Phi_{j_1}(\tau,\varepsilon)$ — відома матриця.

Введемо до розгляду квадратну матрицю n-го порядку, утворену із матриць $U_{jm,1}(\tau,\mu_j)$, $j\;=\;\overline{1,p}$:

$$U_m(\tau,\varepsilon)\;=\;||U_{1m,1}(\tau,\mu_1),U_{2m,1}(\tau,\mu_2),\ldots,U_{pm,1}(\tau,\mu_p)||.$$

Тоді кожну з матриць $U_{jm,1}(\tau,\mu_j)$ можна записати у вигляді

$$U_{jm,1}(\tau,\mu_j) = U_m(\tau,\varepsilon)E_j, \qquad j=\overline{1,p}, \tag{18}$$

де E_j — матриця вигляду

$$\left\| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & r_{j-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & l_j \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n-r_j \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \end{array} \right\|, \quad j=\overline{1,p}.$$

На підставі (18) систему (17) запишемо так:

$$U_m(\tau,\varepsilon)\left[E_jD_{jjm,1}(\tau,\varepsilon)+\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}E_jD_{ijm,1}(\tau,\varepsilon)\right] = \Phi_{j1}(\tau,\varepsilon), \;\; j=\overline{1,p}. \tag{19}$$

Оскільки матриці $U_{jm,1}(\tau,\mu_j)$ такі, що для малих $\varepsilon\in[0;\varepsilon_0]$ і будь-яких $\tau\in[0;L]$

$$\det U_m(\tau,\varepsilon)\neq 0,$$

з (19) знаходимо

$$D_{ijm,1}(\tau,\varepsilon) = \bar\Phi_{ijm,1}(\tau,\varepsilon), \;\; i,j=\overline{1,p},$$

де $\bar\Phi_{ijm,1}(\tau,\varepsilon)$ — матриця розмірів $l_i\times l_j$, що утворена із відповідних елементів матриці

$$\bar\Phi_{j1}(\tau,\varepsilon) = U_m^{-1}(\tau,\varepsilon)\Phi_{j1}(\tau,\varepsilon), \;\; j=\overline{1,p}.$$

Перейдемо до знаходження векторів $p_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ і $p_{m,1}(\tau,\varepsilon)$. Прирівнюючи в (10) коефіцієнти при ε^s, $s=\overline{0,m}$, одержуємо системи рівнянь

$$A^{(0)}(\tau)p_1^{(0)}(\tau)+\varphi_1^{(0)}(\tau) = 0, \tag{20}$$

$$A^{(0)}(\tau)p_1^{(s)}(\tau)+\varphi_1^{(0)}(\tau)-\frac{dp_1^{(s-1)}(\tau,\varepsilon)}{d\tau}+\sum_{k=0}^{s-1}A^{(n-k)}(\tau)p_1^{(k)}(\tau) = 0, \; s=\overline{1,m-1}, \tag{21}$$

$$q_{mi}(\tau,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^i\varphi_1^{(m+i)}(\tau) - (p_1^{(m-1)}(\tau))' + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon^i A^{(m-k+i)}(\tau)p_1^{(k)}(\tau). \tag{22}$$

Із того, що корені характеристичного рівняння для матриці $A^{(0)}$ відмінні від нуля, випливає

$$\det A^{(0)}(\tau) \neq 0 \quad \forall\tau \in [0; L]. \tag{23}$$

Отже, системи (20) – (23) розв’язні:

$$p_1^{(0)}(\tau) = -[A^{(0)}(\tau)]^{-1}\varphi_1^{(0)}(\tau),$$

$$p_1^{(s)}(\tau) = [A^{(0)}]^{-1}\left\{p_1^{\prime(s-1)}(\tau) - \varphi_1^{(s)}(\tau) - \sum_{k=0}^{s-1}A^{(s-k)}(\tau)p_1^{(k)}(\tau)\right\} \quad s = \overline{1, m-1}.$$

Після визначення векторів $p_1^{(s)}(\tau),\ s = \overline{0, m-1}$, вектор $q_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ теж буде визначено.

Знайдемо тепер вектор $h_{m,1}(\tau,\varepsilon)$. Покладаючи

$$h_{m,1}(\tau,\varepsilon = V(\tau)\xi_m(\tau,\varepsilon), \tag{24}$$

де $\xi_m(\tau,\varepsilon)$ — новий n-вимірний вектор, із рівності (11) маємо

$$[W(\tau) - i\nu(\tau)E]\xi_m(\tau,\varepsilon) + f_1(\tau,\varepsilon) + \varepsilon A_1(\tau,\varepsilon) - \varepsilon\xi_m'(\tau,\varepsilon) = \varepsilon^m\bar{\Pi}_{m,1}(\tau,\varepsilon), \tag{25}$$

де

$$A_1(\tau,\varepsilon) = V^{-1}(\tau)\left[V(\tau) - \left(\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^{s-1}A^{(s)}(\tau)\right)V(\tau)\right],$$

$$f_1(\tau,\varepsilon) = V^{-1}(\tau)f(\tau,\varepsilon),\ \ \bar{\Pi}_{m,1}(\tau,\varepsilon) = V^{-1}(\tau)\Pi_{m,1}(\tau,\varepsilon).$$

Прирівнюючи в (25) коефіцієнти при $\varepsilon^s,\ s = -1, 0, 1, \ldots, m$, одержуємо

$$(W(\tau) - i\nu(\tau)E)\xi^{(-1)}(\tau) = 0, \tag{26}$$

$$(W(\tau) - i\nu(\tau)E)\xi^{(s)}(\tau) = \eta^{(s)}(\tau),\ \ s = \overline{0, m-1}, \tag{27}$$

$$\bar{\Pi}(\tau,\varepsilon) = \sum_{j=m}^{\infty}\varepsilon^{j-m}f_1^{(j)}(\tau) - \frac{d\xi^{(m-1)}(\tau)}{d\tau} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\sum_{j=-1}^{m-1}A_1^{(m+i-j)}(\tau)\xi^{(j)}(\tau), \tag{28}$$

де

$$\eta^{(s)}(\tau) = \frac{d\xi^{(s-1)}(\tau)}{d\tau} - f_1^{(s)}(\tau) - \sum_{j=-1}^{s-1} A_1^{(s-1-j)}(\tau)\xi^{(j)}(\tau).$$

Оскільки матриця $W(\tau)$ квазідіагональна, кожне з рівнянь (26) і (27) розпадеться на p рівнянь вигляду

$$(W_j(\tau) - i\nu(\tau)E)\xi_j^{(-1)}(\tau) = 0, \tag{29}$$

$$(W_j(\tau) - i\nu(\tau)E)\xi_j^{(s)}(\tau) = \eta_j^{(s)}(\tau), \;\; s = \overline{0, m-1}, \; j = \overline{1, p}, \tag{30}$$

де $\xi_j^{(s)}$ і $\eta_j^{(s)}$ — вектори розмірності l_j. Для $j \neq 1$ матриця $[W_j(\tau) - i\nu(\tau)E]$ невироджена, а отже, із (29), (30) знаходимо

$$\xi_j^{(-1)}(\tau) = 0, \; \xi_j^{(s)}(\tau) = [W_j(\tau) - i\nu(\tau)E]^{-1}\eta_j^{(s)}(\tau), \; j = \overline{2, p}, \; s = \overline{0, m-1}.$$

Для $j = 1$ із (29) і (30) одержуємо

$$H\xi_1^{(-1)}(\tau) = 0, \tag{31}$$

$$H\xi_1^{(s)}(\tau) = \eta_1^{(s)}(\tau), \;\; s = \overline{0, m-1}, \tag{32}$$

де H — нільпотентна матриця вигляду

$$H = \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

що має порядок l_1.

Із властивостей нільпотентної матриці випливає, що $\{\xi_1^{(-1)}(\tau)\}_j = 0, \; j = \overline{2, l_1}$, тобто всі компоненти вектора $\xi_1^{(-1)}(\tau)$, крім першої, повинні бути нульовими. Перша компонента вектора $\xi_1^{(-1)}(\tau)$ визначається з рівняння (32), якщо покласти $s = 0$:

$$H\xi_1^{(0)} = \eta_1^{(0)}(\tau). \tag{33}$$

Дійсно, останнє скалярне рівняння в (33) має вигляд

$$\{f_1^{(0)}(\tau)\}_{l_1} + \{\Omega(\tau)\}_{l_1 1}\{\xi_1^{(-1)}(\tau)\}_1 = 0,$$

звідки на підставі умови (16) маємо

$$\{\xi_1^{(-1)}(\tau)\}_1 = -\{\Omega(\tau)\}_{l_1 1}^{-1}\{f_1^{(0)}(\tau)\}_{l_1}.$$

Тепер із (33) визначаються всі компоненти вектора $\xi_1^{(0)}(\tau)$, крім першої. Щоб визначити першу компоненту $\{\xi_1^{(0)}(\tau)\}_1$, потрібно в (32) покласти $s = 1$:

$$H\xi_1^{(1)} = \eta_1^{(1)}(\tau). \tag{34}$$

Випишемо із (34) останнє скалярне рівняння

$$\{f_1^{(1)}(\tau)\}_{l_1} + \{A_1^{(1)}(\tau)\}_{l_1 1}\{\xi_1^{(-1)}(\tau)\}_1 + \{\Omega(\tau)\}_{l_1 1}\{\xi_1^{(0)}(\tau)\}_1 +$$

$$+ \sum_{j=2}^{l_1}\{\Omega(\tau)\}_{l_1 j}\{\xi_1^{(0)}(\tau)\}_j - \frac{d}{d\tau}\{\xi_1^{(0)}(\tau)\}_{l_1} = 0,$$

звідки

$$\{\xi_1^{(0)}(\tau)\}_1 = -\{\Omega(\tau)\}_{l_1 1}^{-1}\Big[\{f_1^{(1)}(\tau)\}_{l_1} + \{A_1^{(1)}(\tau)\}_{l_1 1}\{\xi_1^{(-1)}(\tau)\}_1 +$$

$$+ \sum_{j=2}^{l_1}\{\Omega(\tau)\}_{l_1 j}\{\xi_1^{(0)}(\tau)\}_j - \frac{d}{d\tau}\{\xi_1^{(0)}(\tau)\}_{l_1}\Big].$$

Із решти $l_1 - 1$ скалярних рівнянь системи (34) визначаються всі компоненти вектора $\xi_1^{(1)}$, крім першої. Для визначення цієї компоненти потрібно в (32) покласти $s = 2$.

Продовживши цей процес для $s = 2, 3, \ldots, m-1$, визначимо компоненти всіх векторів $\xi_1^{(i)}$, причому для $s = m - 1$ першу компоненту, внаслідок довільності, можна вибрати нульовою, тобто

$$\{\xi_1^{(m-1)}\}_1 = 0.$$

Тоді рівністю (28) вектор $\bar{\Pi}_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ також буде визначено, а отже, на підставі (24) і (25) вектори $h_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ і $\Pi_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ визначено.

Повернемось тепер до системи (8). Врахувавши (9) – (11), запишемо її у вигляді

$$\frac{dy_j(\tau,\varepsilon)}{dt} = [W_j(\tau) + \Lambda_{jm,1}(\tau,\mu_j)]\, y_j(\tau,\varepsilon) +$$

$$+ \mu_j^{ml_j}\sum_{i=1}^{p} D_{ijm,1}(\tau,\varepsilon) y_j(\tau,\varepsilon) + \mu_1^{ml_1} g_{j1}(\tau,\varepsilon), \;\; j = \overline{1,p},$$

де

$$q_{j,1}(\tau,\varepsilon) = q_{mj,1}(\tau,\varepsilon) + \Pi_{mj,1}(\tau,\varepsilon)e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)},$$

$$q_{mj,1}(\tau,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \{q_{m,1}(\tau,\varepsilon)\}_{r_{j-1}+1} \\ \{q_{m,1}(\tau,\varepsilon)\}_{r_{j-1}+2} \\ \vdots \\ \{q_{m,1}(\tau,\varepsilon)\}_{r_j} \end{bmatrix},$$

$$\Pi_{mj,1}(\tau,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \{\Pi_{m,1}(\tau,\varepsilon)\}_{r_{j-1}+1} \\ \{\Pi_{m,1}(\tau,\varepsilon)\}_{r_{j-1}+2} \\ \vdots \\ \{\Pi_{m,1}(\tau,\varepsilon)\}_{r_j} \end{bmatrix},$$

причому матриці $D_{jim,1}(\tau,\varepsilon)$ розмірів $l_j \times l_i$ і l_j-вимірний вектор $g_{j,1}(\tau,\varepsilon)$ мають неперервні елементи для $\tau \in [0; L]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Далі запишемо

$$W_j(\tau) = \Lambda_{j0}(\tau) + H_j,$$

де $\Lambda_{j0}(\tau) = \operatorname{diag}(\lambda_j^{(0)}(\tau), \ldots, \lambda_j^{(0)}(\tau))$ — діагональна матриця, H_j — нільпотентна матриця розмірів $l_j \times l_j$. Поклавши

$$y_j(\tau,\varepsilon) = E_{j1} z_j(\tau,\varepsilon), \tag{35}$$

де E_{j1} — числова діагональна матриця:

$$E_{j1}(\tau) = \operatorname{diag}(1, \mu_1^m, \ldots, \mu_1^{m(l_j-1)}),$$

одержимо систему

$$\frac{dz_j(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = \bar{\Lambda}_{jm,1}(\tau,\varepsilon) z_j(\tau,\varepsilon) +$$

$$+ \mu_1^m \left[H_j z_j(\tau,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{p} \bar{E}_{j1} D_{jim,1}(\tau,\varepsilon) E_{1i} z_j(\tau,\varepsilon) \right] + \bar{E}_{j1} g_{i1}(\tau,\varepsilon), \tag{36}$$

де

$$\bar{\Lambda}_{jm,1}(\tau,\varepsilon) = \Lambda_{j0}(\tau) + \Lambda_{jm,1}(\tau,\mu_j),$$

$$\bar{E}_{j1} = \operatorname{diag}\left(\mu_1^{m(l_1-1)}, \mu_1^{m(l_1-2)}, \ldots, \mu_1^{m(l_1-l_j)}\right), \quad j = \overline{1,p}.$$

Щоб звести систему (36) до більш зручного вигляду, введемо до розгляду вектори

$$z(\tau,\varepsilon) = \begin{bmatrix} z_1(\tau,\varepsilon) \\ \vdots \\ z_p(\tau,\varepsilon) \end{bmatrix}, \quad g(\tau,\varepsilon) \begin{bmatrix} g_{11}(\tau,\varepsilon) \\ \vdots \\ g_{p1}(\tau,\varepsilon) \end{bmatrix} \tag{37}$$

і квадратні матриці n-го порядку

$$H = \{H_1, H_2, \ldots, H_p\}, \quad \Lambda_{m,1}(\tau,\varepsilon) = \left\{\bar{\Lambda}_{1m,1}(\tau,\varepsilon), \ldots, \bar{\Lambda}_{pm,1}(\tau,\varepsilon)\right\},$$

$$D_{m,1}(\tau,\varepsilon) = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11}D_{11m,1}(\tau,\varepsilon)E_{11} & \ldots & \bar{E}_{11}D_{1pm,1}(\tau,\varepsilon)E_{p1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar{E}_{p1}D_{p1m,1}(\tau,\varepsilon)E_{11} & \ldots & \bar{E}_{p1}D_{ppm,1}(\tau,\varepsilon)E_{p1} \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Тоді з (36), враховуючи (37) і (38), одержуємо

$$\frac{dz(\tau,\varepsilon)}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\Lambda_{m,1}(\tau,\varepsilon) + \mu_1^{m-l_1}\left[H + D_{m,1}(\tau,\varepsilon)\right] z(\tau,\varepsilon) + \mu_1^{m-l_1}\bar{\beta}_{m,1}(\tau,\varepsilon), \tag{39}$$

де $\bar{\beta}_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ — вектор, рівномірно обмежений в околі точки $\varepsilon = 0$ для $\tau \in [0; L]$.

Система (39) при виконанні умови

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{s=0}^{l_j-1} \mu_j^s \Lambda_{j,1}^{(s)}(\tau)\right) \leq 0 \tag{40}$$

з відомою точністю інтегрується [1] у замкненій формі. В результаті одержимо розв'язок (39) у вигляді

$$z(\tau,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \bar{\Lambda}_{m,1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right)c_1 + \mu_1^{m-l_1}\beta_{m,1}(\tau,\varepsilon), \tag{41}$$

де c_1 — сталий вектор, а $\beta_{m,1}(\tau,\varepsilon)$ — вектор, що має неперервні компоненти для $\tau \in \in [0; L]$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$.

Після знаходження вектора $z(\tau,\varepsilon)$ із (5), (35) і (41) визначається вектор $x(\tau,\varepsilon)$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1 (для $m > l_1$), 2, 3, (16) і (40), то система (1) у „резонансному" випадку на першому кроці ($0 \leq \tau \leq \Delta$) має розв'язок, який можна подати у вигляді*

$$x(\tau,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{p} U_{jm,1}(\tau,\mu_j)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \bar{\Lambda}_{jm,1}(\tau,\mu_j)d\tau\right)c_{j1} +$$

$$+ p_{m,1}(\tau,\varepsilon) + h(\tau,\varepsilon)e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)} + \varepsilon^{\frac{m-l_1}{l_1}}\alpha(\tau,\varepsilon),$$

де c_{j1} *— сталі вектори розмірності* l_j, $j = \overline{1,p}$, *а* $\alpha(\tau,\varepsilon)$ *— вектор, рівномірно обмежений в околі точки* $\varepsilon = 0$.

Далі, маючи розв'язок системи (1) на першому кроці, можна побудувати розв'язок на другому кроці, потім на третьому і т. д. Для довільного r-го ($r \geq 1$) кроку справедлива теорема, яку наведемо без доведення.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1 (для* $m > \sum\limits_{i=1}^{r} l_1^i$ *), 2, 3, (16) і (40), то система (1) у „резонансному" випадку на* r*-му кроці (*$(r-1)\Delta \leq \tau \leq r\Delta$*) має розв'язок вигляду*

$$x(\tau,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{p}\left[U_{jm,r}(\tau,\mu_j)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{(r-1)\Delta}^{\tau}\bar{\Lambda}_{jm,r}(s,\mu_j)ds\right)c_{jr} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{r-1} R_{jm,l}(\tau,\mu_j)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{(r-1-l)\Delta}^{r-\Delta l}\bar{\Lambda}_{jm,l}(s,\mu_j)ds\right)c_{jl}\right] +$$

$$+ \sum_{l=1}^{r-1} g_{mr,l}e^{\frac{1}{\varepsilon}\theta(\tau-\Delta l)} + p_{m,r}(\tau,\varepsilon) + h_{m,r}(\tau,\varepsilon)e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)} + \varepsilon^{\frac{1}{l_1^r}(m-\sum\limits_{l=1}^{r} l_1^l)}\alpha_{m,r}(\tau,\varepsilon),$$

де

$$U_{jm,r}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\bar{R}-1}\mu_j^s U_{jr}^{(s)}(\tau), \quad R_{jm,l}(\tau,\mu_j) = \sum_{s=-ll_j}^{\bar{R}-1}\mu_j^s R_{jl}^{(s)}(\tau),$$

$$\bar{\Lambda}_{jm,r}(\tau,\mu_j) = \Lambda_{j0}(\tau) + \Lambda_{jm,r}(\tau,\mu_j), \quad \Lambda_{jm,r}(\tau,\mu_j) = \sum_{s=0}^{\bar{R}-l_j}\mu_j^s\Lambda_{jr}^{(s)}(\tau),$$

$$g_{mr,i}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=-l-1}^{\bar{Q}}\varepsilon^s g_{rl}^{(s)}(\tau), \quad p_{m,r}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\bar{Q}}\varepsilon^s p_r^{(s)}(\tau),$$

$$h_{m,r}(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=-1}^{\bar{Q}}\varepsilon^s h_r^{(s)}(\tau), \quad \bar{Q} = \frac{1}{l_1^r}\left(m - \sum_{l=1}^{r} l_1^l - 1\right),$$

$$\bar{R} = \frac{1}{l_1^{r-1}}\left(m - \sum_{l=1}^{r} l_1^l\right),$$

c_{jr}, c_{jl} *— сталі вектори,* $\alpha_{mr}(\tau,\varepsilon)$ *— вектор, рівномірно обмежений в околі точки* $\varepsilon = 0$.

Зауважимо, що вектори c_{jr}, c_{jl} можна вибрати такими, щоб розв'язок у точці $\tau = (r-1)\Delta$ мав достатньо малий розрив.

1. *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Пидченко Ю.П., Сотниченко Н.А.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — Киев: Наук. думка, 1981. — 294 с.

2. *Пидченко Ю.П., Мейлиев Т.К.* Асимптотическое решение некоторых систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной // Лаврентьевские чтения по математике, механике, физике: Тез. докл. II Всесоюз. конф. — Киев: Наук. думка, 1986.— С. 25 – 36.

3. *Пидченко Ю.П.* Решение нелинейных систем дифференциально-разностных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: Киев. пед. ин-т, 1989. — С. 88 – 95.

4. *Пидченко Ю.П.* Асимптотическое решение некоторых нелинейных дифференциально-разностных уравнений // Дифференциально-функциональные уравнения: Сб. науч. тр. — Киев, 1991. — С. 63 – 69.

5. *Шкиль Н.И.* Асимптотическое решение системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вопросы теории и истории дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1968. — С. 166 – 182.

Одержано 10.10.2002