УДК 517.948.34

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

С. М. Коваленко

Академія праці і соціальних відносин Федерації профспілок України
Україна, 03680, Київ, Велика окружна дорога, 3

We study asymptotic behavior of a system of differential equations of a special form at infinity. We also propose a method for reducing a more general system of nonlinear differential equations to such a form, which gives a possibility to study asymptotic properties of the system.

Досліджується асимптотична поведінка на нескінченності розв'язків системи нелінійних диференціальних рівнянь спеціального вигляду. Також запропоновано спосіб зведення до такого вигляду більш загальних систем нелінійних диференціальних рівнянь, що дає можливість досліджувати їх асимптотичні властивості.

У роботі [1] запропоновано метод дослідження асимптотичної поведінки на нескінченності розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь, який ґрунтується на перетворенні систем до так званого L-діагонального вигляду. Завдяки такому перетворенню подальше дослідження вихідних систем помітно спрощується.

У роботі [2] цей метод узагальнено і застосовано для дослідження інших класів диференціальних рівнянь. Зокрема, досить детально досліджено випадок системи лінійних диференціальних рівнянь з кратними коренями характеристичного рівняння. У роботі [3] вказаний метод узагальнено на клас лінійних інтегро-диференціальних рівнянь. У даній роботі робиться спроба поширити цей метод на системи нелінійних диференціальних рівнянь.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = [\Lambda(t) + G(t)]\, x + f(t) + g(t,x),\ \ t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

де $x(t),\ f(t),\ g(t,x)$ — n-вимірні вектори, $G(t)$ — комплекснозначна матриця розмірів $n \times \times n$, $\Lambda(t)$ — комплекснозначна діагональна матриця вигляду

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\left\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\right\}.$$

Встановимо умови, при виконанні яких система (1) асимптотично еквівалентна системі

$$\frac{dz}{dt} = \Lambda(t)z,\ \ t \in [t_0, \infty), \tag{2}$$

тобто для розв'язків $x(t)$ і $y(t)$ систем (1) та (2) відповідно справедлива асимптотична рівність

$$\|x(t) - y(t)\| = o(1),\ \ t \to \infty,$$

© С. М. Коваленко, 2002

де $o(1)$ — нескінченно мала на нескінченності функція.

Нехай виконуються умови:

1^0) $\Lambda(t) \in L\,[t_0, t_1]$ для будь-якого скінченного t_1;

2^0) $f(t), G(t)$ — інтегровні за Лебегом на проміжку $[t_0, \infty)$ функції $(f(t), G(t) \in \in L\,[t_0, \infty))$;

3^0) ні одна з різниць $\operatorname{Re}[\lambda_j(t) - \lambda_r(t)]$ для довільного j, $1 \le j \le n$, і деякого фіксованого r, $1 \le r \le n$, не змінює знаку при $t > T$, де T — досить велике число;

4^0) $\operatorname{Re}\lambda_r(t) > 0 \ \forall t \in [t_0, \infty)$;

5^0) $g(t,x)$ неперервна в області $D = \{t > T,\, x \in R^n\}$ і існує функція $\psi(t)$ така, що

$$\|g(t,x)\| < \psi(t), \ \ \psi(t) \in L\,[t_0, \infty)\,.$$

Зафіксуємо індекс r у системі (1) і шукатимемо її розв'язок у вигляді

$$x_r(t) = y_r(t) \exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_r(\eta) d\eta. \tag{3}$$

Тоді для визначення $y_r(t)$ отримаємо рівняння

$$y_r(t) = A y_r(t), \tag{4}$$

де A — оператор вигляду

$$A\varphi(t) = e_r + \int\limits_{\nu}^{t} K^r(t,\tau) \Bigg(G(\tau)\varphi(\tau) +$$

$$+ \exp\left(- \int\limits_{t_0}^{\tau} \lambda_r(\eta) d\eta \right) \left(f(\tau) + g\left(\tau, \varphi(\tau) \exp \int\limits_{t_0}^{\tau} \lambda_r(\eta) d\eta \right) \right) \Bigg) d\tau, \tag{5}$$

$$K^r(t,\tau) \equiv \exp \int\limits_{\tau}^{t} [\Lambda(\eta) - \lambda_r(\eta) E]\, d\eta,$$

e_r — вектор, r-та компонента якого дорівнює одиниці, а всі інші — нулі, ν — n-вимірний сталий вектор, E — одинична матриця.

Відповідно [1] координати вектора ν виберемо таким чином:

1) якщо $\int\limits_{t_0}^{\infty} \operatorname{Re}[\lambda_j(\eta) - \lambda_r(\eta)]\, d\eta = -\infty$ (коротко $j \in I_1$), то $\nu_j = t_0$;

2) якщо $\int\limits_{t_0}^{\infty} \operatorname{Re}[\lambda_j(\eta) - \lambda_r(\eta)]\, d\eta > -\infty$ (коротко $j \in I_2$), то $\nu_j = \infty$.

Розглядатимемо рівняння (4) у просторі V обмежених і неперервних на проміжку $[T, \infty)$ вектор-функцій. Якщо відстань між функціями $\varphi(t)$ і $s(t)$ у просторі V визначити формулою

$$\rho(\varphi, s) = \sup_{t_0 \le t < \infty} \|\varphi(t) - s(t)\|, \tag{6}$$

то V буде повним метричним простором.

Для того щоб рівняння (4) мало єдиний розв'язок у V, достатньо, щоб V був інваріантним простором для оператора A, а оператор A — стискаючим у V. Знайдемо умови, які для цього повинні виконуватись.

Перш за все вектор $A\varphi(t)$ повинен бути обмеженим для будь-якого $\varphi(t) \in V$. Оцінюючи за нормою $A\varphi(t)$, отримуємо

$$\|A\varphi(t)\| \le \|e_r\| + \int_{\nu}^{t} \|K^r(t,\tau)\| \Bigg\{ \|G(\tau)\| \, \|\varphi(\tau)\| +$$

$$+ \left| \exp\left(\int_{\tau}^{t_0} \lambda_r(\eta) d\eta \right) \right| \left(\|f(\tau)\| + \left\| g\left(\tau, \varphi(\tau) \exp \int_{t_0}^{\tau} \lambda_r(\eta) d\eta \right) \right\| \right) \Bigg\} d\tau. \tag{7}$$

Аналогічно [4] можна довести, що матриця $K^r(t,\tau)$ обмежена при $t \ge T$, тобто

$$\|K^r(t,\tau)\| \le \alpha < \infty.$$

Крім того, з умови 4^0, враховуючи, що $[\nu_j, t] \subset [T; \infty)$, маємо

$$\left| \exp \int_{\tau}^{t_0} \lambda_r(\eta) d\eta \right| = \exp\left(- \int_{t_0}^{\tau} \mathrm{Re}(\lambda_r(\eta)) d\eta \right) \le 1. \tag{8}$$

Тому, зважаючи на умови 3^0, 4^0 і оцінки (7), (8), із (6) отримуємо оцінки

$$\|A\varphi(t)\| \le 1 + \alpha \int_{T}^{\infty} \left(\|G(\tau)\| \cdot c + \|f(\tau)\| + \psi(\tau) \right) d\tau =$$

$$= 1 + \alpha c \int_{T}^{\infty} \|G(\tau)\| \, d\tau + \alpha \int_{T}^{\infty} \left(\|f(\tau)\| + \psi(\tau) \right) d\tau,$$

де $\|\varphi(t)\| \le c$, оскільки $\varphi(t) \in V$.

Оскільки $f(t)$, $G(t)$, $\psi(t)$ інтегровні за Лебегом на проміжку $[t_0, \infty)$ (умови 2^0 і 5^0), то $\|A\varphi(t)\| \le c_1 < \infty$.

Неважко показати, що при виконанні умов $1^0 - 5^0$ вектор $A\varphi(t)$ буде неперервним. Отже, V буде інваріантним простором для оператора A.

Нехай, крім того, в області $\{t > T, x \in R^n\}$ функція $g(t,x)$ задовольняє умову Ліпшиця, тобто

6^0) існує інтегровна за Лебегом на проміжку $[T, +\infty)$ функція $h(t)$ така, що

$$\|g(t,x_1) - g(t,x_2)\| < h(t)\,\|x_1 - x_2\|$$

для будь-яких $x_1, x_2 \in R^n$.

Нехай $\varphi(t), s(t) \in V$. Оцінимо за нормою різницю $A\varphi(t) - As(t)$. Із співвідношень (7), (8) маємо

$$\|A\varphi(t) - As(t)\| \le \alpha \sup \|\varphi(t) - s(t)\| \int_{\nu}^{t} (\|G(\tau)\| + h(\tau))\,d\tau. \tag{9}$$

Оскільки $[\nu_j, t] \subset [T, +\infty)$, із (9) отримуємо оцінку

$$\rho(A\varphi, As) < q\rho(\varphi, s), \tag{10}$$

де $q = \alpha \int_{\tau}^{\infty} (\|G(\tau)\| + h(\tau))\,d\tau$.

З огляду на те, що виконуються умови 2^0 і 6^0,

$$\int_{t}^{\infty} (\|G(\tau)\| + h(\tau))\,d\tau \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty.$$

Таким чином, можна вказати таке досить велике число T, що для будь-якого $t \ge T$ число q задовольняє нерівність

$$q < 1,$$

а це означає, що A є оператором стиску в просторі V.

Згідно з принципом стискуючих відображень у просторі V існує єдиний розв'язок рівняння (4), (5), який можна зобразити у вигляді абсолютно і рівномірно збіжного на проміжку $[T, +\infty)$ ряду

$$y_r(t) = e_r + \sum_{p=1}^{\infty} \left(y_r^{(p)}(t) - y_r^{(p-1)}(t) \right),$$

де

$$y_r^{(0)}(t) = e_r,$$

$$y_r^{(p)}(t) = \int_{\nu}^{t} K^r(t,\tau) \left\{ \begin{array}{l} G(\tau) y_r^{(p-1)}(\tau) + \exp\left(-\int_{t_0}^{\tau} \lambda_r(\eta) d\eta \right) \times \\ \times \left(f(\tau) + g\left(\tau, y_r^{(p-1)}(\tau) \exp \int_{t_0}^{\tau} \lambda_r(\eta) d\eta \right) \right) \end{array} \right\}.$$

Аналогічно [1] можна довести, що

$$\lim_{t\to\infty} y_r(t) = e_r.$$

Таким чином, система (1) має частинний розв'язок вигляду

$$x_r = [e_r + o(1)] \exp \int\limits_{t_0}^{t} \lambda_r(\eta) d\eta. \tag{11}$$

Якщо умови 3^0, 4^0 виконуються для усіх $r = \overline{1,n}$, то система (1) має n лінійно незалежних розв'язків вигляду (11), тобто має матрицю-розв'язок

$$X(t) = [E + o(1)] \exp \int\limits_{t_0}^{t} \Lambda(\eta) d\eta. \tag{12}$$

Отже, доведено наступну теорему.

Теорема. *Якщо для системи (1) виконуються умови 1^0 – 5^0, то вона має розв'язок (12), тобто асимптотично еквівалентна системі (2).*

Цю теорему можна використовувати для дослідження асимптотичної поведінки на нескінченності розв'язків більш загальних систем вигляду

$$\frac{dx}{dt} = r(t,x), \;\; t \geq t_0, \, x \in R^n, \tag{13}$$

де $r(t,x) = \text{colon}\,\{r_1(t,x), r_2(t,x), \ldots, r_n(t,x)\}\,,\; r(t,x) \in R^n$.

Будемо вважати, що функція $r(t,x)$ неперервна в області $D = \{t \geq t_0,\, x \in R^n\}$ і має неперервні частинні похідні по x_i, $i = \overline{1,n}$, до другого порядку включно.

За допомогою формули Тейлора вектор $r(t,x)$ можемо записати у вигляді

$$r(t,x) = r(t,0) + A(t)x + \frac{1}{2}\overline{r}(t,\theta x), \tag{14}$$

де число θ задовольняє нерівність $0 < \theta < 1$,

$$A(t) = \left.\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial r_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial r_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial r_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial r_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial r_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial r_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial r_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial r_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}\right|_{x=0}, \tag{15}$$

$$\overline{r}(t,\theta x) = \text{colon}\,\{\overline{r}_1, \overline{r}_2, \ldots, \overline{r}_n\}\,,$$

$$\overline{r}_i(t,\theta x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j^2}\bigg|_{x=\theta x} x_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j}^{n} \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_j \partial x_k}\bigg|_{x=\theta x} x_j x_k.$$

Таким чином, систему (13) можна записати у вигляді (1):

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + r(t,0) + \frac{1}{2}\overline{r}(t,\theta x). \tag{16}$$

Якщо матриця $A(t)$, визначена рівністю (15), задовольняє умови:

а) має скінченну границю на нескінченності

$$A(\infty) = \lim_{t\to\infty} A(t),$$

причому гранична матриця $A(\infty)$ має різні власні значення;

б) $\dfrac{dA(t)}{dt} \in L\left[t_0, +\infty\right)$,

то систему (13) в області $t \geq T \gg t_0$, за допомогою лінійного перетворення

$$x = B(t)y$$

можна звести до вигляду

$$\frac{dy}{dt} = \left[\Lambda(t) + G(t)\right] y + f(t) + g(t,y), \tag{17}$$

де

$$\Lambda(t) = B^{-1}(t)A(t)B(t),\ \ G(t) = B^{-1}(t)B'(t),\ \ f(t) = B^{-1}(t)r(t,0),$$

$$g(t,y) = \frac{1}{2}B^{-1}(t)\overline{r}(t,\theta B(t)y).$$

Для дослідження цієї системи можна використовувати доведену вище теорему. Зокрема, неважко показати, що при виконанні умов а), б) для системи (17) будуть виконуватись умови 1^0, 2^0, 5^0 теореми.

1. *Рапопорт И.М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1954. — 286 с.
2. *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. — Київ: Вища шк., 1971. — 226 с.
3. *Коваленко С.Н.* Асимптотические формулы для решений системы линейных интегро-дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1986. — № 6. — С. 5–9.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Одержано 30.09.2002