УДК 517.928

СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНА СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З РЕГУЛЯРНОЮ ОСОБЛИВІСТЮ

Г. В. Завізіон

Кіровоград. пед. ун-т
Україна, 25006, Кіровоград, вул. Шевченка, 1

We construct asymptotic solutions of a perturbed system of differential equations with a regular singularity.

Побудовано асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з регулярною особливістю.

У роботах [1, 2] вивчалася структура фундаментальної системи розв'язків рівняння другого порядку

$$\varepsilon z y'' + p(z) y' + q(z) y = 0,$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $p(z), q(z)$ — нескінченно диференційовні функції. Дослідження задач з великим параметром і з особливістю в точках повороту започатковано Р. Лангером [3]. Значний вклад у вивчення таких задач внесли F. Olver [4], В. Вазов [5]. У роботі [6] будуються асимптотичні розв'язки рівняння

$$p(x)(\varepsilon u'' + f(x) u') = h(x) u,$$

де $p(x), f(x), h(x)$ — скалярні функції. Поліном $p(x)$ має n різних коренів на відрізку інтегрування.

У даній роботі пропонується метод асимптотичного інтегрування сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь з регулярною особливістю.

1. Випадок простих коренів. Розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h t \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon) x, \qquad 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0, \tag{1}$$

де ε — малий параметр, $h \in Z, t \in [0; L]$; $A(t, \varepsilon)$ — матриця розмірів $n \times n$, яка має розвинення за степенями ε:

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r A_r(t).$$

Вигляд формального розв'язку системи (1) залежить від коренів алгебраїчного рівняння

$$\det \| A_0(t) - \omega(t) E \| = 0, \tag{2}$$

де E — одинична матриця. Нехай виконуються умови: 1) матриці $A_r(t),\ r = 0, 1, \ldots$, нескінченно диференційовні на відрізку $[0; L]$; 2) корені рівняння (2) прості; 3) корені рівняння(2) в точці $t = 0$ набувають дійсних додатних значень.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови 1 – 3, то система диференціальних рівнянь (1) має формальний розв'язок вигляду*

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)t^{\frac{a^2(\varepsilon)}{\varepsilon^h}} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda(t,\varepsilon)dt\right), \tag{3}$$

де $u(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, $\lambda(t,\varepsilon), a(\varepsilon)$ — скалярні функції, які мають розвинення за степенями параметра ε:

$$u(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r u_r(t), \qquad \lambda(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \lambda_r(t), \qquad a(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r a_r(t). \tag{4}$$

Доведення. Доведемо, що коефіцієнти розвинень (4) можна визначити так, щоб вектор $x(t,\varepsilon)$ формально [7] задовольняв систему (1). Для цього підставимо (3) в (1) і одержимо тотожність

$$\varepsilon^h t u'(t,\varepsilon) + t u(t,\varepsilon)\lambda(t,\varepsilon) + u(t,\varepsilon)a^2(\varepsilon) = A(t,\varepsilon)u(t,\varepsilon), \tag{5}$$

де штрих означає похідну по t. Зрівнюючи в тотожності (5) коефіцієнти при однакових степенях ε, одержуємо систему рівнянь

$$(A_0(t) - (a_0^2 + t\lambda_0(t)E))u_0(t) = 0, \tag{6}$$

$$(A_0(t) - (a_0^2 + t\lambda_0(t)E))u_s(t) = b_s(t), \tag{7}$$

де

$$b_s(t) = (t\lambda_s(t) + 2a_0 a_s)u_0(t) + f_s(t),$$

$$f_s(t) = t u'_{s-h}(t) - \sum_{r=1}^{s} A_r(t)u_{s-r}(t) + t\sum_{r=1}^{s-1} u_r t)\lambda_{s-r}(t) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{s}\sum_{j=1}^{s_r}\left(2\Delta_r a_0 a_r + a_{\frac{r}{2}}^2 + 2a_j a_{r-j}\right)u_{s-r}(t);$$

$s_r = (r-1)/2$, якщо r — непарне, $s_r = [r/2] - 1$, якщо r — парне число; $\Delta_r = 1$, якщо $r \neq s, \Delta_r = 0$, якщо $r = s$, причому якщо $r/2$ — дробове число, то $a_{\frac{r}{2}} = 0$.

Рівняння (6) буде мати ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$a_0^2 + t\lambda_0(t) = \omega(t). \tag{8}$$

Покладемо у (8) $t = 0$. Звідси

$$a_0 = \sqrt{\omega(0)}$$

і згідно з умовою 3 $a_0 \in R$. Із (8) знаходимо функцію

$$\lambda_0(t) = \frac{\omega(t) - \omega(0)}{t},$$

яка визначена при $0 < t \leq L$. Довизначимо функцію $\lambda_0(t)$ в точці $t = 0$. Для цього покладемо

$$\lambda(0) = \omega'(0).$$

Тоді

$$u_0(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [0; L],$$

де $\varphi(t)$ — власний вектор матриці $A_0(t)$. Згідно з (8) рівняння (7) перепишемо у вигляді

$$(A_0(t) - \omega(t)E))u_s(t) = b_s, s = 1, 2 \dots . \tag{9}$$

Виберемо вектор $\varphi(t)$ так, щоб скалярний добуток

$$(\varphi(t), \psi(t)) \equiv 1 \quad \forall t \in [0; L], \tag{10}$$

де $\psi(t)$ — власний вектор матриці $A_0^*(t)$, спряженої до матриці $A_0(t)$. Рівняння (9) має розв'язок, якщо

$$(b_s(t), \psi(t)) \equiv 0 \quad \forall t \in [0; L]. \tag{11}$$

З урахуванням (10) та умов існування розв'язку (11) рівняння (9) набирає вигляду

$$2a_0a_s + t\lambda_s(t) = F_s(t), \tag{12}$$

де $F_s(t) = -(f_s(t), \psi(t)$. Поклавши у рівності (12) $t = 0$, знайдемо

$$a_s = \frac{F_s(0)}{2\sqrt{\omega(0)}}.$$

Функція

$$\lambda_s(t) = \frac{F_s(t) - F_s(0)}{t}$$

визначена при $0 < t \leq L$. Довизначимо $\lambda_s(t)$ в точці $t = 0$. Для цього покладемо

$$\lambda_s(0) = F_s'(0).$$

Використовуючи [8], можна довести, що функція $\lambda_s(t), s = 0, 1, \ldots$, нескінченно диференційовна на відрізку $[0; L]$. Тоді розв'язок рівняння (9) буде мати вигляд

$$u_s(t) = H(t) b_s(t),$$

де $H(t)$ — узагальнена обернена матриця [9] до матриці $A_0(t) - \omega(t)E$. Теорему доведено.

Теорема 1 дає можливість на відрізку $[0; L]$ побудувати n формальних розв'язків $x^{(j)}(t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$. Позначимо через $x_m^{(j)}(t, \varepsilon), j = \overline{1, n}$, m-те наближення [7] розв'язку системи (1)

$$x_m^{(j)}(t, \varepsilon) = u_m^{(j)}(t, \varepsilon) t^{\frac{a_{jm}^2(\varepsilon)}{\varepsilon^h}} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \lambda_m^{(j)}(t, \varepsilon) dt\right),$$

де

$$u_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r u_r^{(j)}(t), \qquad \lambda_m^{(j)}(t, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \lambda_r^{(j)}(t), \qquad a_{jm}(\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r a_{jr}.$$

Можна показати, що m-те наближення загального розв'язку системи (1) має вигляд

$$x_m(t, \varepsilon) = U_m(t, \varepsilon) t^{\frac{B_m(\varepsilon)}{\varepsilon^h}} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \Lambda_m(t, \varepsilon) dt\right) a,$$

де a — сталий вектор; $U_m(t, \varepsilon)$ — матриця, яка складається з векторів-стовпців $u_m^{(j)}(t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$, а матриці $B_m(\varepsilon), \Lambda_m(t, \varepsilon)$ визначаються рівностями

$$B_m(\varepsilon) = \operatorname{diag}\{a_{1m}^2(\varepsilon), \ldots, a_{nm}^2(\varepsilon)\}, \Lambda_m(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\{\lambda_m^{(1)}(t, \varepsilon), \ldots, \lambda_m^{(n)}(t, \varepsilon)\}.$$

Методом з [7] можна довести таку лему.

Лема. *Якщо при всіх $t \in [0; \varepsilon^h]$ виконується нерівність*

$$u(t) \leq a \int\limits_t^{\varepsilon^h} u(t_1) dt_1 + f(t),$$

де $a > 0$ — стала, а $f(t) \in C^1_{[0; \varepsilon^h]}$, то

$$u(t) \leq f(\varepsilon^h) \exp a(\varepsilon^h - t) + \int\limits_t^{\varepsilon^h} f'(t) \exp a(t_1 - t) dt_1.$$

Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1 і умови: 4) мають місце нерівності*

$$\left(\sum_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r a_{jr}\right)^2 + t\mathrm{Re}\left(\sum_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r\lambda_r^{(j)}(t)\right) \le 0 \quad \forall t \in [\varepsilon^h; L], \tag{13}$$

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r\lambda_r^{(j)}(t)\right) < 0 \quad \forall t \in (0; L]; \tag{14}$$

5) виконується співвідношення

$$x_m(\varepsilon^h, \varepsilon) = x(\varepsilon^h, \varepsilon),$$

де $x(t,\varepsilon)$ — *точний розв'язок системи (1), то має місце нерівність*

$$\|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \le C\varepsilon^{m+1-2h} \quad \forall t \in (0; L], \tag{15}$$

де C — *стала, яка не залежить від* ε.

Доведення. Підставимо m-те наближення загального розв'язку $x_m(t,\varepsilon)$ в диференціальний вираз

$$Mx(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^h t\frac{dx}{dt} - A(t,\varepsilon)x.$$

Згідно з (6), (7)

$$Mx_m(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1})t^{\frac{B_m(\varepsilon)}{\varepsilon^h}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)a. \tag{16}$$

З того, що числа $\omega_j(0)$, $j = \overline{1,n}$, дійсні додатні, і з умови (14) маємо

$$\left\|t^{\frac{B_m(\varepsilon)}{\varepsilon^h}}\right\| \le 1, \qquad \left\|\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)\right\| < 1 \quad \forall t \in [0; 1]. \tag{17}$$

Для оцінки норми

$$\left\|t^{\frac{B_m(\varepsilon)}{\varepsilon^h}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right)\right\|$$

при $t \in [1; L]$ виконаємо перетворення

$$\left\| t^{\frac{B_m(\varepsilon)}{\varepsilon^h}} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt \right) \right\| = \max_{1\le j\le n} \exp\left(\varepsilon^{-h} \left(\Big(\sum_{r=0}^{h-1} \varepsilon^r a_{jr} \Big)^2 \ln t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_0^t \sum_{r=0}^{h-1} \varepsilon^r \lambda_r^{(j)}(t)dt \right)\right) t^{\overline{B_m}(\varepsilon)} \exp\left(\int\limits_0^t \sum_{r=h}^{m} \varepsilon^r \Lambda_r(t)dt \right), \tag{18}$$

де $\overline{B_m}(\varepsilon)$ — матриця розмірів $n \times n$, елементи якої виражаються через $a_{jr},\ j = \overline{1,n}, r = \overline{0,m}$, причому $\overline{B_m}(\varepsilon) = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Використовуючи [8], можна довести, що при виконанні нерівності (13) при $t \in (1; L]$ має місце нерівність

$$\left(\sum_{r=0}^{h-1} \varepsilon^r a_{jr} \right)^2 \ln t + \int\limits_0^t \sum_{r=0}^{h-1} \varepsilon^r \lambda_r^{(j)}(t)dt \le 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{19}$$

З (18), (19) при $t \in (1; L]$ маємо

$$\left\| t^{\frac{B_m(\varepsilon)}{\varepsilon^h}} \exp\left(\varepsilon^{-h} \int\limits_0^t \Lambda_m(t,\varepsilon)dt \right) \right\| \le M. \tag{20}$$

З (16), (17), (20) випливає

$$Mx_m(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{m+1}) \quad \forall t \in [0; L].$$

Згідно з останньою рівністю вектор $y(t,\varepsilon) = x_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$\varepsilon^h t \frac{dy}{dt} = A(t,\varepsilon)y + O(\varepsilon^{m+1}). \tag{21}$$

Розв'язок цього рівняння будемо шукати у вигляді

$$y(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)z(t,\varepsilon). \tag{22}$$

Підставляючи (22) в (21), одержуємо

$$\varepsilon^h t U_m(t,\varepsilon)\frac{dz}{dt} = \left(A(t,\varepsilon)U_m(t,\varepsilon) - \varepsilon^h t \frac{dU_m(t,\varepsilon)}{dt} \right) z + O(\varepsilon^{m+1}). \tag{23}$$

Використовуючи (6), (7) і домножаючи (23) зліва на матрицю $U_m^{-1}(t,\varepsilon)$, маємо

$$\varepsilon^h t \frac{dz}{dt} = (t\Lambda_m(t,\varepsilon) + B_m(\varepsilon))z + O(\varepsilon^{m+1}). \tag{24}$$

З (1), (22) випливає

$$z(0,\varepsilon)=0. \tag{25}$$

Врахувавши початкову умову 5, перейдемо від диференціального рівняння (24) до інтегрального рівняння

$$z(t,\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon^h}^{t}\frac{O(\varepsilon^{m+1-h})}{t_1}K_m(t,t_1,\varepsilon)z(t_1,\varepsilon)dt_1+\int\limits_{\varepsilon^h}^{t}\frac{O(\varepsilon^{m+1-h})}{t_1}K_m(t,t_1,\varepsilon)dt_1 \quad \forall t\in(0;L], \tag{26}$$

де $K_m(t,t_1,\varepsilon)=\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{B_m(\varepsilon)}{\varepsilon^h}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^{t}\Lambda_m(t,\varepsilon)dt\right).$

Для оцінки норми $\|z(t,\varepsilon)\|$ подамо матрицю $K_m(t,t_1,\varepsilon)$ при $t\in(0;L]$ у вигляді

$$K_m(t,t_1,\varepsilon)=\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{B_{h-1}(\varepsilon)}{\varepsilon^h}}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{\overline{B}_h(\varepsilon)}{\varepsilon^h}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^{t}\sum_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r\Lambda_r(t)dt\right)\times$$

$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^{t}\sum_{r=h}^{m}\varepsilon^r\Lambda_r(t)dt\right).$$

Оцінювати норму $\|z(t,\varepsilon)\|$ будемо на окремих проміжках. Нехай $0<t<t_1<\varepsilon^h$. Тоді рівняння (26) запишемо у вигляді

$$z(t,\varepsilon)=-\int\limits_{t}^{\varepsilon^h}\frac{O(\varepsilon^{m+1-h})}{t_1}K_m(t,t_1,\varepsilon)z(t_1,\varepsilon)dt_1-\int\limits_{t}^{\varepsilon^h}\frac{O(\varepsilon^{m+1-h})}{t_1}K_m(t,t_1,\varepsilon)dt_1 \quad \forall t\in(0;\varepsilon^h]. \tag{27}$$

На цьому проміжку маємо оцінку

$$\left\|\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^{t}\sum_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r\Lambda_r(t)dt\right)\right\|=\max_{1\le j\le n}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^{t}\lambda_{jm}(s,\varepsilon)ds\right)\le\max_{1\le j\le n}\exp\overline{\lambda_j}=\overline{\lambda}, \tag{28}$$

де $\overline{\lambda_j}=\max\limits_{t\in(0;\varepsilon^h],\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]}\lambda_{jm}(t,\varepsilon).$

В силу нескінченної диференційовності матриць $\Lambda_r(t), r=\overline{0,m}$, існує стала $M_1>0$, яка не залежить від ε, така, що при $t\in[0;L],\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\left\|\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^{t}\sum_{r=h}^{m}\varepsilon^r\Lambda_r(t)dt\right)\right\|\le M_1, \tag{29}$$

а також, в силу обмеженості $\overline{B_m}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, маємо

$$\left\| \left(\frac{t}{t_1} \right)^{\overline{B}_m(\varepsilon)} \right\| \leq 1 \quad \forall t, t_1 \in (0; L].$$

Врахувавши (28), (29), оцінимо норму другого інтеграла з рівняння (27):

$$\left\| \int\limits_t^{\varepsilon^h} \frac{O(\varepsilon^{m+1-h})}{t_1} K_m(t, t_1, \varepsilon) dt_1 \right\| = O(\varepsilon^{m+1-h}) \max_{1 \leq j \leq n} \int\limits_t^{\varepsilon^h} \frac{1}{t_1} \left(\frac{t}{t_1} \right)^{\frac{a_{j,h-1}^2(\varepsilon)}{\varepsilon^h}} dt_1 =$$

$$= O(\varepsilon^{m+1}) \max_{1 \leq j \leq n} \frac{1}{a_{j;h-1}^2(\varepsilon)} \left(1 - \varepsilon^{h\left(1 - \frac{a_{j,h-1}^2(\varepsilon)}{\varepsilon^h}\right)} \right) =$$

$$= M_1 \varepsilon^{m+1} \quad \forall t \in (0; \varepsilon^h].$$

Тоді, переходячи в (27) до норми, одержуємо

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq \frac{O(\varepsilon^{m+1-h})}{t} \int\limits_t^{\varepsilon^h} \|z(t_1, \varepsilon)\| dt_1 + M_1 \varepsilon^{m+1},$$

або

$$t\|z(t, \varepsilon)\| \leq O\left(\varepsilon^{m+1-h}\right) \int\limits_t^{\varepsilon^h} \|z(t_1, \varepsilon)\| dt_1 + t M_1 \varepsilon^{m+1}. \qquad (30)$$

З'ясуємо, при яких $\|z(t, \varepsilon)\|$ виконується нерівність

$$\varepsilon^h \|z(t, \varepsilon)\| \leq O(\varepsilon^{m+1-h}) \int\limits_t^{\varepsilon^h} \|z(t_1, \varepsilon)\| dt_1 + M_1 \varepsilon^{m+1+h}. \qquad (31)$$

Застосовуючи до (31) лему, одержуємо

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq C_1 \varepsilon^{m+1-h} \quad \forall t \in (0; \varepsilon^h]. \qquad (32)$$

Оскільки

$$t\|z(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^h \|z(t, \varepsilon)\|,$$

то з нерівності (30) випливає оцінка (32). При $\varepsilon^h < t_1 < t \leq L$ умова (13) забезпечує монотонність функції

$$f_j(t,\varepsilon) = t^{\frac{\left(\sum\limits_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r a_{jr}\right)^2}{\varepsilon^h}} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \sum_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r\lambda_{jr}(t)dt\right)$$

по змінній t. Тоді

$$\frac{1}{t_1}\left(\frac{t}{t_1}\right)^{\frac{\left(\sum\limits_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r a_{jr}\right)^2}{\varepsilon^h}} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{t_1}^t \sum_{r=0}^{h-1}\varepsilon^r\lambda_{jr}(t)dt\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^h}.$$

Оцінимо $\|z(t,\varepsilon)\|$:

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leq O(\varepsilon^{m+1-2h})\int\limits_{\varepsilon^h}^t \|z(t_1,\varepsilon)\|dt_1 + O(\varepsilon^{m+1-2h}),$$

або, згідно з [7],

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leq C_2\varepsilon^{m+1-2h} \quad \forall t \in (\varepsilon^h; L]. \tag{33}$$

З (25), (32), (33) знаходимо

$$\|z(t,\varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{m+1-2h} \quad \forall t \in [0; L], \tag{34}$$

де $C = \max(C_1, C_2)$. З (22), (34) випливає нерівність (15). Теорему доведено.

2. Випадок одного кратного кореня. Нехай виконуються умови: 1) рівняння (2) має один корінь $\omega_0(t)$ кратності n, якому відповідає один n-кратний елементарний дільник; 2) функція $\omega_0(t)$ в точці $t = 0$ набуває додатних значень; 3) виконується нерівність

$$(A_1(t)\varphi(t) - \delta_{h1}t\varphi'(t), \psi(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0; L],$$

де δ_{h1} — символ Кронекера, $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ — відповідно нулі матриць $A_0(t) - \omega_0(t)E$ і $(A_0(t) - -\omega_0(t)E)^*$; 4) якщо n — парне число, то $(A_1\varphi(0), \psi(0)) > 0$.

Справедлива така теорема.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови 1–4, то система диференціальних рівнянь (1) має формальний розв'язок вигляду*

$$x(t,\varepsilon) = u(t,\mu)t^{\frac{a^2(\mu)}{\varepsilon^h}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda(t,\mu)dt\right), \tag{35}$$

де $u(t,\mu)$ — n-вимірний вектор, $\lambda(t,\mu), a(\mu)$ — скалярні функції, які мають розвинення за степенями параметра μ:

$$u(t,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r u_r(t), \qquad \lambda(t,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r \lambda_r(t), \qquad a(t,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu^r a_r(t). \tag{36}$$

Доведення. Підставимо (35), (36) в (1) і, зрівнюючи в одержаній тотожності коефіцієнти при однакових степенях μ, приходимо до рівнянь (6), (7), де

$$b_s(t) = \sum_{r=1}^{s} (2a_0 a_r + t\lambda_r(t)) u_{s-r}(t) + \sum_{r=2}^{s} \sum_{j=1}^{s_r} (2a_j a_{r-j} + a_{\frac{r}{2}}^2) u_{s-r}(t) + g_s(t),$$

$$g_s(t) = -\sum_{r=1}^{[\frac{s}{n}]} A_r(t) u_{s-nr}(t) + tu'_{s-hn}(t), s = n, n+1, \ldots .$$

Розглянемо рівняння (6), (7). Рівняння (6) буде мати ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли

$$a_0^2 + t\lambda_0(t) = \omega_0(t). \tag{37}$$

Покладемо в (37) $t = 0$. Тоді

$$a_0 = \sqrt{\omega_0(0)}$$

і згідно з умовою 2 $a_0 \in R$. Із (37) знаходимо функцію

$$\lambda_0(t) = \frac{\omega_0(t) - \omega_0(0)}{t},$$

яка визначена при $0 < t \le L$. Довизначимо $\lambda_0(t)$ в точці $t = 0$, для чого покладемо

$$\lambda_0(0) = \omega_0'(0).$$

Тоді

$$u_0(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [0; L].$$

З урахуванням (37) систему рівнянь (7) перепишемо у вигляді

$$(A_0(t) - \omega_0(t)E) u_s(t) = b_s, s = 1, 2 \ldots . \tag{38}$$

Вектори $\varphi(t), \psi(t)$ виберемо так, щоб виконувались співвідношення

$$((H(t))^{i-1}\varphi(t), \psi(t)) = 0, i = \overline{1, n-1}, ((H(t))^{n-1}\varphi(t), \psi(t)) = 1 \quad \forall t \in [0; L], \tag{39}$$

де $H(t)$ — узагальнена обернена матриця до матриці $A_0(t) - \omega_0(t)E$. Рівняння (38) має розв'язок, якщо

$$(b_s(t), \psi(t)) = 0, s = 1, 2 \ldots . \tag{40}$$

При виконанні цієї умови вектори $u_s(t)$ визначаються за формулою

$$u_s(t) = H(t)b_s(t), s = 1, 2 \ldots, \quad \forall t \in [0; L]. \tag{41}$$

Введемо позначення:

$$\alpha(i, s) = \sum_{j_1 + \ldots + j_i = s} (2a_0 a_{j_1} + t\lambda_{j_1}) \ldots (2a_0 a_{j_i} + t\lambda_{j_i}),$$

де підсумовування проводиться за можливими наборами натуральних індексів j_i,

$$\beta(i, s) = \sum_{2(l_1 + \ldots + l_{s_1}) + l_{s_1+1} + \ldots + l_i = s} (a_{l_1}^2 + t\lambda_{l_1}(t)) \ldots (a_{l_i}^2 + t\lambda_{l_i}(t)) \times$$

$$\times \ (2a_{l_{s_1+1}} a_{l_{s_1+2}}) \ldots (2a_{l_{s_2}} a_{l_{s_2+1}})(2a_0 a_{l_{s_2+2}} + t\lambda_{s_2+2}(t)) \ldots (2a_0 a_{l_i} + t\lambda_i(t)),$$

де підсумовування проводиться за можливими наборами натуральних індексів l_i.

Використавши формули (38), (41), перетворимо вираз для векторів $b_s(t)$ до вигляду

$$b_s(t) = \sum_{i=1}^{s} \alpha(i, s)(H(t))^{i-1}\varphi(t) + \sum_{i=2}^{s} \beta(i-1, s)(H(t))^{i-2}\varphi(t) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{s-n-1} \sum_{i=1}^{s-n-j} \alpha(i, s-n-j)(H(t))^i g_{n+j}(t) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-n-2} \sum_{i=2}^{s-n-j} \beta(i-1, s-n-j)(H(t))^{i-1} g_{n+j}(t) + g_s(t). \tag{42}$$

Перейдемо до визначення коефіцієнтів $\lambda_s(t), a_s, u_s(t),\ s = 1, 2 \ldots$, розкладів (36). Згідно з (39) умова (40) виконана при $s < n$. Враховуючи (39), (42), умову (39) при $s = n$ запишемо у вигляді

$$\alpha(n, n) + (g_n(t), \varphi(t)) = 0.$$

Звідси знайдемо

$$2a_0 a_1 + t\lambda_1(t) = f_1(t), \tag{43}$$

де

$$f_1(t) = \sqrt[n]{(A_1(t)\varphi(t) - t\varphi'(t), \psi(t))}.$$

Покладемо в (43) $t = 0$, тоді згідно з умовою 4 отримуємо число

$$a_1 = \sqrt[n]{(A_1(0)\varphi(0), \psi(0))}.$$

Із (43) одержимо функцію

$$\lambda_1(t) = \frac{f_1(t) - f_1(0)}{t},$$

яка визначена при $0 < t \leq L$. Застосовуючи умови існування розв'язку рівняння (40) при $s = n + 1$, знаходимо

$$\lambda_2(t) = \frac{f_2(t) - f_2(0)}{t}.$$

Згідно з умовою 3 функція

$$f_2(t) = -\frac{b_1(t)}{n f_1^{n-1}(t)}$$

визначена на відрізку $[0; L]$. Припустимо, що $\lambda_i(t), u_i(t)$ вже визначено при $i \leq s$. Тоді для визначення $\lambda_{s+1}(t)$ використаємо умову (40) на $(n+s)$-му кроці. З урахуванням (39), (42) умова запишеться у вигляді

$$\alpha(n, n+s) + c_s(t) = 0, \tag{44}$$

де

$$c_s(t) = \sum_{i=n+1}^{n+s} \alpha(i, n+s)((H(t))^{i-1}\varphi(t), \psi(t)) + \sum_{j=0}^{s-1}\sum_{i=1}^{s-j} \alpha(i, s-j)((H(t))^i g_{n+j}(t), \psi(t)) +$$

$$+ (g_{n+s}(t), \psi(t)) + \sum_{i=n+1}^{s+n} \beta(i-1, s)(H(t))^{i-2}\varphi(t), \psi(t)) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{s-2}\sum_{i=2}^{s-j} \beta(i-1, s-j)\left((H(t))^{i-1} g_{n+j}(t), \psi(t)\right).$$

Із рівняння (44) маємо

$$2a_0 a_{s+1} + t\lambda_{s+1}(t) = f_{s+1}(t), \tag{45}$$

де

$$f_{s+1}(t) = -\frac{c_s(t) + \overline{\alpha}(n, n+s)}{n f_1^{n-1}(t)},$$

$\overline{\alpha}(n, n+s)$ — частина виразу $\alpha(n, n+s)$, яка містить $\lambda_i(t)$, індекси яких менші s. Покладемо в (45) $t = 0$ і знайдемо число a_{s+1}. Із (45) одержуємо функцію $\lambda_{s+1}(t)$ при $0 < t \leq L$. Також буде визначено функцію $u_{s+1}(t)$. Довизначимо функції $\lambda_{s+1}(t), u_{s+1}(t),\ s = 1, 2\ldots,$ в точці $t = 0$, для чого покладемо

$$\lambda_{s+1}(0) = f'_{s+1}(0), \qquad u_{s+1}(0) = H(0) b_{s+1}(0).$$

Використавши [8], можна довести, що функції $\lambda_{s+1}(t), u_{s+1}(t)$ нескінченно диференційовні на відрізку $[0; L]$. Теорему доведено.

1. *Рабинович Ю. Л., Хапаев М. М.* Линейные уравнения с малым параметром в окрестности регулярной особой точки // Докл. СССР. — 1959. — **129**, № 2. — С. 268 – 271.
2. *Юдина А. С.* О методе регуляризации с регулярной особой точкой // Тр. Моск. энергет. ин-та. — 1978. — **357**. — С. 119 – 121.
3. *Langer R. E.* On the asymptotic solution of ordinary differential equations with reference to the stokes phenomenon about a singular point // Trans. Amer. Math. Soc. — 1962. — **37**. — P. 397 – 416.
4. *Olver F. W.* The asymptotic solution of linear differential equation of the second order for large values of a parameter and the asymptotic expansion of Bessel functions of large order // Phil. Trans. Roy. Soc. London. — 1972. — **247**. — С. 307 – 327.
5. *Вазов В. А.* Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.
6. *Wazwaz A. M.* On the asymptotic solutions of a differential equation with multiple singular points // J. Comput. and Appl. Math. — 1991. — **34**, № 1. — С. 65 – 74.
7. *Шкиль Н. И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев, 1996. — 207 с.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. — М., 1956. — 308 с.
9. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Выща шк., 1991. — 207 с.

Одержано 19.09.2002