УДК 517.9

РОЗРИВНІ КОЛИВАННЯ В ОДНІЙ ІМПУЛЬСНІЙ СИСТЕМІ

Ю. М. Перестюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 01033, Київ, вул. Володимирська, 64
e-mail: Perestyuk@gmail.com

We study existence of one- and two-impulsive cycles for a weakly nonlinear two-dimensional impulsive differential system. We also study a possibility for a mathematical pendulum to have oscillations in a neighborhood of the upper equilibrium if impulsive forces are applied.

Исследован вопрос существования одно- и двухимпульсных циклов слабонелинейной двумерной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием. Исследована возможность колебаний математического маятника в окрестности верхнего положения равновесия под действием импульсных сил.

Дослідимо питання існування одно- і двоімпульсних циклів слабконелінійної двовимірної системи диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\dot{x_1} = \lambda_1 x_1 + \epsilon f(x_1, x_2), \quad \dot{x_2} = \lambda_2 x_2 + \epsilon g(x_1, x_2), \quad x_2 \neq kx_1, \tag{1}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x_2 = kx_1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Рух фазової точки $(x_1(t), x_2(t))$ відбувається за законом системи двох диференціальних рівнянь, коли ця точка знаходиться поза прямою $x_2 = kx_1$, а в момент попадання її на цю пряму вона миттєво „перестрибує” з положення $\begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix}$ в положення

$$\begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & 1 + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t^*) \\ x_2(t^*) \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок, коли початок координат є сідловою точкою незбуреної диференціальної системи (при $\epsilon = 0$). Вважатимемо, що $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$.

Спочатку дослідимо можливість коливних рухів відповідної лінійної імпульсної системи

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \neq kx_1, \tag{2}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x_2 = kx_1} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Рух фазової точки $(x_1(t), x_2(t))$ диференціальної системи відбувається по лініях

$$x_2 = c|x_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad x_1 = 0.$$

Якщо ця точка починає рух з точки (x_1^0, x_2^0), то при всіх $t \in R$ вона залишається на лінії

$$x_2 = x_2^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Зрозуміло, що і фазова точка імпульсної системи (2) рухається по цих же лініях, „перестрибуючи" на прямій $x_2 = kx_1$ з однієї на іншу (або ж ту саму) із цих ліній. Нас цікавить випадок, коли фазова точка у процесі своєї еволюції зазнає імпульсного впливу багато разів, тобто попадає на пряму $x_2 = kx_1$ більше одного разу. Якщо фазова точка не попадає на вказану пряму або попадає лише один раз, то її рух з часом описується системою без імпульсної дії, а тому з часом ця точка наближається до положення рівноваги $(0; 0)$ або ж віддаляється по відповідній гілці гіперболи у нескінченність. Зауважимо, що лінійне однорідне відображення площини в себе

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

переводить пряму $x_2 = kx_1$ в пряму $x_2 = \mu x_1$, де кутові коефіцієнти k і μ пов'язані рівністю

$$\mu = \frac{k(1+b_{22}) + b_{21}}{1 + b_{11} + kb_{12}}. \tag{3}$$

Щоб фазова точка зазнавала імпульсного впливу багато разів (зчисленне число), необхідно, щоб вона, вийшовши з точки прямої $x_2 = \mu x_1$, при $t > 0$ попала на пряму $x_2 = kx_1$, а для цього необхідно, щоб виконувалась нерівність

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \ln \frac{\mu}{k} > 0. \tag{4}$$

Припускаючи, що параметри вихідної системи забезпечують виконання цієї нерівності, можемо стверджувати, що фазова точка, виходячи при $t = 0$ з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$, попадає в деякий момент $t = t^*$ в точку (x_1^*, kx_1^*) і в цей момент „перестрибує" в точку

$$((1 + b_{11} + kb_{12})x^*, \quad (b_{21} + (1 + b_{22})k)x_1^*)$$

прямої $x_2 = \mu x_1$.

Виразивши значення x_1^* через x_1^0, безпосередньо переконуємося, що поведінка розв'язків лінійної імпульсної системи (2) залежить від відображення Пуанкаре прямої в пряму

$$h : x_1 \to [1 + b_{11} + b_{12}k] \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} x_1.$$

Це лінійне однорідне відображення, яке ми запишемо так: $h : x_1 \to \gamma x_1$, позначивши через γ число

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}}. \tag{5}$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо параметри імпульсної системи (2) такі, що $|\gamma| < 1$, то всі її розв'язки, які починаються з точок прямої $x_2 = \mu x_1$, з часом прямують до нуля при $t \to \infty$; якщо ж $|\gamma| > 1$, то всі ці розв'язки прямують до нескінченності при $t \to \infty$.*

Детальніше проаналізуємо випадок, коли $|\gamma| = 1$. У цьому випадку кожна точка $x_1 \in R$ є нерухомою точкою відображення h, а тому така точка породжує одноімпульсний періодичний рух (одноімпульсний цикл). Ці цикли заповнюють частину координатної площини, що лежить між прямими $x_2 = kx_1$ та $x_2 = \mu x_1$.

Якщо рух фазової точки починається з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$, то породжуючий цією точкою цикл задається куском кривої

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}} \le \frac{x_1}{x_1^0} \le 1.$$

Безпосередньо переконуємося, що рух зображуючої точки по кожному з таких циклів є періодичним з одним і тим же періодом

$$T = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}.$$

У системі (2) можливі так звані двоімпульсні розривні цикли, відмінні від одноімпульсних: рухаючись по такому циклу фазова точка двічі за період зазнає дії імпульсної сили. Двоімпульсні цикли можливі в системі (2), коли її параметри задовольняють рівність

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k)\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}} = -1.$$

Такі цикли породжуються точками $(x_1^0, \mu x_1^0)$, де x_1^0 — нерухома точка відображення $h^2 = h(h(x))$.

Рух фазової точки по кожному з таких циклів є періодичним з одним і тим же періодом

$$T = \frac{2}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \frac{\mu}{k}.$$

Двоімпульсні цикли, як і одноімпульсні, заповнюють частину координатної площини, що лежить між прямими $x_2 = kx_1$ і $x_2 = \mu x_1$. На відміну від одноімпульсних циклів, кожен з яких лежить в одному з координатних кутів, кожен двоімпульсний цикл належить двом координатним кутам: першому і третьому або ж другому і четвертому. Двоімпульсний цикл, що породжується точкою $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, задається кусками гіпербол

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}} \le \frac{x_1}{x_1^0} \le 1,$$

і

$$x_2 = -\mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{-x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, \quad \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}} \le \frac{x_1}{-x_1^0} \le 1.$$

Як приклад розглянемо можливість коливань математичного маятника в околі верхнього (нестійкого положення) рівноваги під дією імпульсної сили. Згідно з законами механіки положення фазової точки не може миттєво змінюватися, але така зміна можлива для швидкості цієї точки. Тому вважатимемо, що в результаті дії імпульсної сили в момент проходження фазовою точкою фіксованої прямої $\dot{x} = ax$ збільшується (зменшується) фазова швидкість точки на величину, пропорційну (наприклад, з коефіцієнтом пропорційності 2α) швидкості її в момент попадання на цю пряму.

Рівняння руху такого маятника запишемо у формі

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad y \ne ax, \tag{6}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\Bigg|_{y=ax} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Заміна змінних $x_1 = y - x$, $x_2 = y + x$ приводить цю систему до вигляду (2):

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \ne kx_1, \tag{7}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x_2=kx_1} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

де пряма $x_2 = kx_1$ є образом прямої $y = ax$ при вказаній заміні змінних. Зауважимо, що пряма $x_2 = kx_1$ при відображенні

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

переходить у пряму

$$x_2 = \mu x_1 = \frac{k(1+\alpha)+\alpha}{1+\alpha+k\alpha}\, x_1.$$

Таким чином, умовою існування одноімпульсних циклів у системі (7) є виконання рівності

$$(1+\alpha+\alpha k)\left(\frac{k(1+\alpha)+\alpha}{1+\alpha+k\alpha}\,\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = 1. \tag{8}$$

Безпосередньо переконуємося, що ця рівність за умови $\mu \ne k$ виконується при $\alpha = -1$ і $k < 0, k \ne -1$.

Отже, при $k < 0, k \ne -1$ і $\alpha = -1$ в системі (7) є однопараметрична сім'я одноімпульсних циклів.

Умовою наявності двоімпульсних циклів в системі (6) є рівність

$$(1+\alpha+\alpha k)\left(\frac{k(1+\alpha)+\alpha}{1+\alpha+k\alpha}\,\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{2}} = -1, \tag{9}$$

яка виконується при $\alpha = -1$ і $k > 0, k \neq 1$.

В обох випадках кутові коефіцієнти k і μ пов'язані між собою рівністю $\mu k = 1, |k| \neq 1$.

Повертаючись до вихідних змінних

$$x = \frac{x_2 - x_1}{2}, \quad y = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

і враховуючи, що рівняння прямих $x_2 = kx_1$ і $x_2 = \mu x_1$ у цих змінних набирають вигляду

$$y = \frac{k+1}{k-1}x \quad \text{і} \quad y = \frac{\mu+1}{\mu-1}x$$

відповідно, переконуємося, що в системі (6) при $\alpha = -1$ є однопараметрична сім'я одноімпульсних циклів за умови, що імпульсної дії система зазнає на прямій $y = ax, 0 < a < 1$, і сім'я двоімпульсних циклів, якщо $a > 1$.

Дослідимо тепер можливі коливання в нелінійній системі (1).

За умови $\gamma = 1$ при $\epsilon = 0$ ця система має сім'ю одноімпульсних циклів, що задаються кусками гіпербол

$$\left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{x_2}{\mu x_1^0}\right)^{-\lambda_1} = 1, \quad \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}} \leq \frac{x_1}{x_1^0} \leq 1,$$

кожна з яких перетинає пряму $x_2 = kx_1$ у точці

$$x_1^* = x_0\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}}.$$

Саме ця точка відображенням Пуанкаре відображається у початкову точку x_0 (і рух є періодичним).

При $\epsilon \neq 0$ траєкторія системи (1), що вийшла з точки $(x_0, \mu x_0)$, не обов'язково перетне пряму $x_2 = kx_1$ у точці (x_1^*, kx_1^*). Вона може перетнути цю пряму в точці, абсциса якої за модулем менша за $|x_1^*|$ (фазова точка наближається до початку координат), або ж у точці, абсциса якої за модулем більша за $|x_1^*|$ (фазова точка віддаляється від початку координат). Щоб з'ясувати, який із цих випадків має місце, розглянемо приріст величини

$$E(x_1, x_2) = \ln\left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{x_2}{\mu x_0}\right)^{-\lambda_1}$$

за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$, досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії системи (1). Нас цікавить саме знак цього приросту. Якщо він додатний, то траєкторія наближається до початку координат, якщо ж від'ємний, то траєкторія віддаляється від нуля, а якщо він дорівнює нулю, то рух фазової точки є періодичним.

Виведемо наближену формулу для приросту величини $E(x_1, x_2)$. Повну похідну по t від $E(x_1, x_2)$, складену в силу системи (1), легко обчислити:

$$\frac{d}{dt}\,E(x_1,x_2) = \epsilon\,\left[\frac{\lambda_2}{x_1}\,f(x_1,x_2) - \frac{\lambda_1}{x_2}\,g(x_1,x_2)\right].$$

Для обчислення приросту $E(x_1, x_2)$ треба зінтегрувати цю функцію вздовж куска траєкторії, що знаходиться між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$. На жаль, траєкторія нам не є відомою. Разом з тим за теоремою про диференційовність розв'язків диференціальних рівнянь за параметром (див., наприклад, [6, с. 354]) при достатньо малих значеннях параметра ϵ розв'язок диференціальної частини системи (1) на скінченному часовому відрізку відрізняється величиною порядку ϵ від розв'язків

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}x_1^0, \quad x_2 = e^{\lambda_2 t}x_2^0.$$

Отже, траєкторія системи (1), що виходить з точки $(x_1^0, \mu x_1^0)$ прямої $x_2 = \mu x_1$, на величину порядку ϵ відрізнятиметься від куска гіперболи

$$x_2 = \mu x_1^0 \left(\frac{x_1}{x_1^0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},$$

а тому інтеграл від $\dot{E}(x_1, x_2)$ з точністю до $O(\epsilon^2)$ можна обрахувати по куску цієї гіперболи, що знаходиться між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$:

$$\Delta E = \epsilon \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\mu}{k}} \left[\lambda_2 \frac{e^{-\lambda_1 s}}{x_1^0} f\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right) - \frac{\lambda_1}{\mu x_1^0} e^{-\lambda_2 s} g\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right)\right] ds =$$

$$= \frac{\epsilon}{\mu x_1^0} \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\mu}{k}} \left[\mu\lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right)\right] ds.$$

Обчислюючи інтеграл, маємо

$$\Delta E = \epsilon F(x_1^0) + O(\epsilon^2),$$

де

$$F(x_1^0) = \frac{1}{\mu x_1^0} \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\mu}{k}} \left[\mu\lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 S}\mu x_2^0\right)\right] ds.$$

За властивостями функції $F(x_1^0)$ можемо сказати про поведінку розв'язків вихідної системи (при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$). Якщо функція додатна, то в системі (в секторі між прямими $x_2 = \mu x_1$ і $x_2 = kx_1$) відбуваються згасаючі коливання. Якщо ж ця функція від'ємна, то коливання наростають. Можливий випадок, коли ця функція змінює знак. Нехай x_1^* — простий нуль функції $F(x_1) : F(x_1^*) = 0, \acute{F}(x_1^*) \neq 0$. Тоді при достатньо малих значеннях $\epsilon > 0$ точка x_1^* породжує у вихідній системі одноімпульсний цикл, який близький до куска гіперболи

$$\left(\frac{x_1}{x_1^*}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = 1,$$

обмеженої прямими $x_2 = \mu x_1$ та $x_2 = kx_1$.

Підводячи підсумок, можна сформулювати таке твердження.

Теорема 2. *Нехай в системі (1) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$, функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ є неперервно диференційовними в деякому крузі $x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ і параметри системи такі, що виконуються нерівність (4) і рівність*

$$\gamma = (1 + b_{11} + b_{12}k) \left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}} = 1.$$

Якщо рівняння $F_1(x_1) = 0$ має ізольований корінь x_1^* такий, що $\acute{F}_1(x_1^*) \neq 0$, то при достатньо малих значеннях параметра $\epsilon > 0$ система (1) має розривний одноімпульсний цикл. Він є асимптотично стійким, якщо при переході через точку x_1^* функція $F_1(x_1)$ змінює знак з мінуса на плюс, і нестійким, якщо знак цієї функції змінюється з плюса на мінус. З точністю до величини порядку ϵ^2 цей цикл задається рівністю

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_1^*}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = \frac{\epsilon}{\mu x_1^*} \int_0^t \left[\mu \lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f(e^{\lambda_1 s} x_1^*, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^*)\right] ds -$$

$$- \frac{\epsilon}{\mu x_1^*} \int_0^t \left[\lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g\left(e^{\lambda_1 s} x_1^*, e^{\lambda_2 s} \mu x_1^*\right)\right] ds,$$

в якій x_1^* — корінь рівняння $F_1(x_1) = 0$, а t змінюється в межах від нуля до $\dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \ln \dfrac{\mu}{k}$.

Аналогічно можна отримати умови існування двоімпульсних циклів у системі (1). Як зазначалося вище, такі цикли в лінійній системі (2) можливі, коли параметри системи задовольняють умову $\gamma = -1$.

Як і у випадку дослідження одноімпульсних циклів розглянемо приріст величини $E(x_1, x_2)$ за час, коли фазова точка, вийшовши з положення $(x_1^0, \mu x_1^0)$, досягне прямої $x_2 = kx_1$, рухаючись по траєкторії системи (1), а потім після імпульсної дії, рухаючись по траєкторії системи (1), знову попаде на пряму $x_2 = kx_1$.

Використовуючи вираз повної похідної від $E(x_1, x_2)$, складеної в силу системи (1), обчислюємо приріст $E(x_1, x_2)$:

$$\Delta E = \frac{\epsilon}{\mu x_1^0} \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\mu}{k}} \left[\mu\lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right)\right] ds +$$

$$+ \frac{\epsilon}{\mu(-x_1^0)} \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\mu}{k}} \left[\mu\lambda_2 e^{-\lambda_1 s} f\left(-e^{\lambda_1 s}x_0, e^{-\lambda_2 s}\mu x_0\right) - \right.$$

$$\left. - \lambda_1 e^{-\lambda_2 s} g\left(-e^{\lambda_1 s}x_1^0, -e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right)\right] ds + \epsilon^2 \ldots,$$

або ж

$$\Delta E = \epsilon F_2(x_1^0) + \epsilon^2 \ldots,$$

де

$$F_2(x_1^0) = \frac{1}{\mu x_1^0} \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\mu}{k}} \mu\lambda_2 e^{-\lambda_1 s}\left[f\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right) - f\left(-e^{\lambda_1 s}x_1^0, -e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right)\right] -$$

$$- \frac{1}{\mu x_1^0} \int\limits_0^{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\ln\frac{\mu}{k}} \lambda_1 e^{\lambda_2 s}\left[g\left(e^{\lambda_1 s}x_1^0, e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right) - g\left(-e^{\lambda_1 s}x_1^0, -e^{\lambda_2 s}\mu x_1^0\right)\right] ds.$$

Таким чином, справджується таке твердження.

Теорема 3. *Нехай в системі (1)* λ_1, λ_2, *функції* $f(x_1, x_2)$, $g(x_1, x_2)$ *такі, як і в теоремі 2, і виконуються нерівність (4) та рівність*

$$(1 + b_{11} + b_{12}k)\left(\frac{\mu}{k}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}} = -1.$$

Якщо рівняння $F_2(x_1) = 0$ *має ізольований корінь* x_1^* *такий, що* $\acute{F_2}(x_1^*) \neq 0$, *то при достатньо малих значеннях параметра* $\epsilon > 0$ *система (1) має розривний двоімпульсний цикл. Цей цикл асимптотично стійкий, якщо* $\acute{F_2}(x_1^*) < 0$, *і нестійкий, якщо* $\acute{F_2}(x_1^*) > 0$. *З точністю до величини порядку* ϵ^2 *цей цикл задається рівністю*

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_1^*}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{x_2}{\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = \frac{\epsilon}{\mu x_1^*}\int\limits_0^t \left[\mu\lambda_2 e^{-\lambda_1 S} f(e^{\lambda_1 S x_1^*}, e^{\lambda_2 S}\mu x_1^*) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 S} g\left(e^{\lambda_1 S}x_1^*, e^{\lambda_2 S}x_1^*\right)\right] dS$$

і рівністю

$$\ln\left(\frac{x_1}{-x_1^*}\right)^{\lambda_2}\left(\frac{x_2}{-\mu x_1^*}\right)^{-\lambda_1} = \frac{\epsilon}{-\mu x_1^*}\int\limits_0^t \left[\mu\lambda_2 e^{-\lambda_2 S} f(-e^{\lambda_1 S x_1^*}, -e^{\lambda_2 S}\mu x_1^*) - \right.$$

$$\left. - \lambda_1 e^{-\lambda_1 S} g\left(-e^{\lambda_1 S}x_1^*, -e^{-\lambda_2 S}\mu x_1^*\right)\right] dS,$$

в яких x_1^* *— корінь рівняння* $F_2(x_1) = 0$, *а* t *змінюється в межах від нуля до* $(\lambda_1 - -\lambda_2)^{-1} \ln \frac{\mu}{k}$.

Як приклад розглянемо нелінійне імпульсне рівняння вигляду

$$\ddot{x} - x = \epsilon \dot{x}(1 - x^2), \quad \dot{x} \neq ax, \quad \Delta \dot{x}|_{\dot{x}=ax} = -2\dot{x}.$$

Заміною змінних $x_1 = \dot{x} - x$, $x_2 = \dot{x} + x$ це рівняння зводиться до системи рівнянь

$$\dot{x}_1 = -x_1 + \epsilon \frac{x_1 + x_2}{2} \left(1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}\right),$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + \epsilon \frac{x_1 + x_2}{2} \left(1 - \frac{(x_2 - x_1)^2}{4}\right) \quad x_2 \neq kx_1, \tag{10}$$

$$\Delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x_2 = kx_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

При $\epsilon = 0$ цю систему досліджено вище. Зокрема, при $k < 0$, $k \neq -1$ в системі є однопараметрична сім'я одноімпульсних циклів, а при $k > 0$, $k \neq 1$ — сім'я двоімпульсних циклів, відмінних від одноімпульсних. Зауважимо також, що в обох випадках кутові коефіцієнти k і μ пов'язані між собою рівністю $\mu k = 1$, $|k| \neq 1$.

Обчислимо функцію $F(x_1)$ у випадку $k < 0$:

$$F(x_1) = \frac{1}{\mu x_1} \int\limits_0^{-\ln|\mu|} \left(\mu e^t + e^{-t}\right) \frac{\left(e^{-t} x_1 + \mu x_1 e^t\right)}{2} \left(1 - \frac{(\mu e^t - e^{-t})^2}{4} x_1^2\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\mu} \int\limits_0^{-\ln|\mu|} \left[\left(\mu e^t + e^{-t}\right)^2 - \left(\mu^2 e^{2t} - e^{-2t}\right)^2 \frac{x_1^2}{4}\right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\mu^2}{2}\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right) - 2\mu \ln|\mu| - \frac{1}{2}\left(\mu^2 - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{x_1^2}{4} \frac{\mu^4}{4} \left(\frac{1}{\mu^4} - 1\right) + 2\mu^2 \ln|\mu| - \frac{1}{4}\left(\mu^4 - 1\right)\right].$$

Отже,

$$F(x_1) = \frac{1}{2\mu}\left[1 - \mu^2 - 2\mu \ln|\mu| - \frac{x_1^2}{8}\left(1 - \mu^4 + 4\mu^2 \ln|\mu|\right)\right].$$

Таким чином, функція $F(x_1)$ дорівнює нулю у двох точках

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{8\left(1 - \mu^2 - 2\mu \ln|\mu|\right)}{1 - \mu^4 + 4\mu^2 \ln|\mu|}},$$

кожна з яких і породжує у вихідній системі одноімпульсний розривний цикл.

Похідна

$$\acute{F}(x_1) = -\frac{x_1}{8\mu}(1 - \mu^4 + 4\mu^2 \ln|\mu|)$$

додатна при $x_1 > 0$ і від'ємна при $x_1 < 0$, тому можна стверджувати, що обидва розривні цикли асимптотично стійкі (при додатньо малих значеннях параметра ϵ).

З'ясуємо питання існування в даній системі двоімпульсних циклів, відмінних від одноімпульсних. Як було зазначено вище, такі цикли можуть бути, якщо $k > 0$, $k \neq 1$.

Оскільки повинна виконуватися нерівність (4) і умова $k\mu = 1$, то k повинно бути більшим за 1. Обчислюючи функцію $F_2(x_1)$ в цьому випадку, маємо

$$F_2(x_1) = \frac{1}{\mu}\left[1 - \mu^2 - 2\mu \ln \mu - \frac{x_1^2}{8}\left(1 - \mu^4 + 4\mu^2 \ln \mu\right)\right].$$

Ця функція дорівнює нулю у двох точках, які симетрично розташовані на осі абсцис щодо початку координат. Враховуючи те, що система (10) не змінюється при заміні x_1 на $-x_1$ і x_2 на $-x_2$, можна стверджувати, що при достатньо малих значеннях $\epsilon > 0$ два нулі функції $F_2(x_1)$ породжують один і той самий двоімпульсний цикл, розташований в першому та третьому координатних кутах.

Безпосередньо переконуємося, що цей цикл є нестійким.

Повертаючись від координат (x_1, x_2) до (x, y), $y = \dot{x}$ і враховуючи, що коефіцієнту k відповідає a, а коефіцієнту μ — $-a$, робимо висновок, що у вихідному рівнянні при $0 < a < 1$ є два асимптотично стійкі одноімпульсні цикли, а при $a > 1$ — один нестійкий двоімпульсний цикл.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 502 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.
3. *Perestyuk N. A., Plotnikov V. A., Samoilenko A. M., Skripnik N. V.* Differential equations with impulse effects, multivalued right-hand sides with discontinuities. — De Gruyter, 2011. — 307 p.
4. *Mamsa K., Perestyuk Y.* A certain class of discontinuous dynamical systems in the plane // Math. Anal. — Different. Equat. and their Appl. — Sofia, 2011. — P. 121–128.
5. *Мамса К. Ю., Перестюк Ю. М.* Періодичні розв'язки одного класу розривних динамічних систем на площині // Міжнар. наук. конф. „Диференціальні рівняння та їх застосування” (Київ, 8–10 червня 2011 р.). — 2011. — С. 115.
6. *Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О.* Диференціальні рівняння. Підручник. — 3-тє вид. — Київ: ВПЦ „Київ. ун-т”, 2010. — 527 с.

Одержано 12.03.12,
після доопрацювання — 14.09.12