УДК 517.925

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА

А. М. Клопот

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
Украина, 23454, Одесса, ул. Дворянская, 2

We find asymptotics formulas for a class of monotone solutions of order n nonautonomous differential equations that contain a sum of terms with regularly changing nonlinearities in the right-hand side.

Встановлено асимптотичні формули для одного класу монотонних розв'язків неавтономних диференціальних рівнянь n-го порядку, що містять у правій частині суму доданків з правильно змінними нелінійностями.

1. Введение. Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(y), \tag{1.1}$$

где $\alpha_k \in \{-1; 1\}$, $k = 1, \ldots, m$, $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty$, $k = 1, \ldots, m$, — непрерывно дифференцируемые функции, $r_k : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, m$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_k(t) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.2}$$

$\varphi_k : \triangle Y_0 \longrightarrow]0, +\infty[$, $k = 1, \ldots, m$, — правильно меняющиеся при y $\longrightarrow Y_0$ функции порядков σ_k, $k = 1, \ldots, m$, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$[1], $\triangle Y_0$ — односторонняя окрестность Y_0, Y_0 равно либо 0, либо $\pm\infty$.

Свойства правильно меняющихся функций детально изложены в монографии [1]. В частности, из определения правильно меняющейся функции следует, что

$$\varphi_k(y) = |y|^{\sigma_k} L_k(y), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{1.3}$$

где $L_k(y)$ — медленно меняющиеся функции при $y \longrightarrow Y_0$, т. е.

$$\lim_{\substack{y\to Y_0 \\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{L_k(\lambda y)}{L_k(y)} = 1 \quad k = 1, \ldots, m, \quad \text{для любого} \quad \lambda > 0. \tag{1.4}$$

Известно [1], что предельные соотношения (1.4) выполняются равномерно по λ на любом промежутке $[c, d] \subset]0, +\infty[$ (свойство M_1) и существуют непрерывно дифференцируемые медленно меняющиеся при $y \longrightarrow Y_0$ функции $L_{1k} : \triangle Y_0 \longrightarrow]0, +\infty[$ (свойство M_2)

[1] Считаем, что $a > 1$ при $\omega = +\infty$ и $\omega - 1 < a < \omega$ при $\omega < +\infty$.

такие, что

$$\lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{L_k(y)}{L_{1k}(y)} = 1, \quad \lim_{\substack{y\to Y_0\\ y\in\Delta_{Y_0}}} \frac{yL'_{1k}(y)}{L_{1k}(y)} = 0, \quad k = 1,\ldots,m. \tag{1.5}$$

Примерами медленно меняющихся при $y \longrightarrow Y_0$ функций являются $|\ln|y||^{\gamma_1}$, $\ln^{\gamma_2}|\ln|y||$, $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\exp(|\ln|y||^{\gamma_3})$, $0 < \gamma_3 < 1$, $\exp\left(\dfrac{\ln|y|}{\ln|\ln|y||}\right)$, функции, имеющие отличный от нуля конечный предел при $y \longrightarrow Y_0$, и др.

При $m = 1$ и $L_1 \equiv 1$ уравнение (1.1) является обобщенным уравнением типа Эмдена – Фаулера. Асимптотические свойства его решений детально исследованы в монографии [2], а также в работах [3 – 6] и др.

При $m > 1$ и $L_k \equiv 1$, $k = \overline{1,m}$, асимптотическое поведение некоторых классов монотонных решений уравнения (1.1) изучалось в работах [3, 7].

В случае $n = 2$ и произвольных дважды непрерывно дифференцируемых медленно меняющихся при $y \to Y_0$ функций L_k, $k = \overline{1,m}$, $m > 1$, уравнение (1.1) исследовалось в работах [8, 9]. Здесь были установлены асимптотические при $t \uparrow \omega$ представления для всех возможных типов так называемых $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$-решений.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если} \quad \omega < +\infty, \end{cases}$$

и введем следующее определение.

Решение $y : [t_0,\omega[\longrightarrow \triangle_{Y_0}$ уравнения (0.1) будем называть $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$-решением, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$y : [t_0,\omega[\longrightarrow \triangle_{Y_0}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0, \tag{1.6}$$

$$y^{(n-1)}(t) \ne 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{либо} & 0, \\ \text{либо} & \pm\infty, \end{cases} \qquad k = 1,\ldots,n-1, \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} = \mu_0, \quad \text{причем} \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)}{[y^{(n-1)}(t)]^2} = 1, \quad \text{если} \quad \mu_0 = \pm\infty. \tag{1.8}$$

Целью настоящей работы является распространение некоторых из результатов работ [8, 9] на общий случай $n \ge 2$ и без дополнительных предположений о том, что L_k, $k = \overline{1,m}$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции.

2. Некоторые вспомогательные обозначения и априорные свойства $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$-решений. Выберем число $b \in \Delta_{Y_0}$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|b| < 1 \quad \text{при} \quad Y_0 = 0, \quad b > 1\ (b < -1) \quad \text{при} \quad Y_0 = +\infty\ (Y_0 = -\infty), \tag{2.1}$$

и положим

$$\Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \quad \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — левая окрестность } \ Y_0,$$

$$\Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b], \quad \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — правая окрестность } \ Y_0.$$

Из определения $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решения ясно, что каждое такое решение уравнения (1.1) и все его производные до порядка $n-1$ включительно отличны от нуля на некотором промежутке $[t_1, \omega[\subset [t_0, \omega[$, причем на этом промежутке первая производная данного решения положительна, если Δ_{Y_0} — левая окрестность Y_0, и отрицательна — в противном случае. Учитывая этот факт и выбор b, вводим два числа

$$\nu_0 = \operatorname{sign} b, \quad \nu_1 = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — левая окрестность } \ Y_0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0} \text{ — правая окрестность } \ Y_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

определяющие соответственно знаки $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решения и его первой производной на промежутке $[t_1, \omega[$. При этом заметим, что для $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решения уравнения (1.1) выполняются условия

$$\nu_0\nu_1 < 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = 0, \quad \text{и} \quad \nu_0\nu_1 > 0, \quad \text{если} \quad Y_0 = \pm\infty.$$

Лемма 2.1. *Если $|\mu_0| < +\infty$, то для каждого $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решения уравнения (1.1) имеют место предельные соотношения*

$$\lim \frac{\pi_\omega(t) y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \mu_0 + n - k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Если же $\mu_0 = \pm\infty$, то для каждого $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решения уравнения (1.1)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} \to \pm\infty, \ \ k = 1, \ldots, n, \ \ \frac{y'(t)}{y(t)} \sim \frac{y''(t)}{y'(t)} \sim \ldots \sim \frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \ \ \textit{при} \ \ t \uparrow \omega. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $|\mu_0| < +\infty$ и y — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решение уравнения (1.1). Покажем, используя метод математической индукции, что в этом случае имеют место асимптотические представления (2.3). При $k = n$ утверждение верно в силу первого из условий (1.8). Предположим, что оно верно при $k = i \in \{2, \ldots, n-1\}$, и докажем его справедливость при $k = i - 1$. В силу определения $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решения $\lim\limits_{t \uparrow \omega} y^{(i-2)}(t)$ равен либо 0 либо $\pm\infty$. Если $\lim\limits_{t \uparrow \omega} y^{(i-2)}(t) = \pm\infty$, то в силу правила Лопиталя в форме Штольца

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left(1 + \frac{\pi_\omega(t) y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} \right) = \mu_0 + n - (i-1). \tag{2.5}$$

Если же $\lim\limits_{t \uparrow \omega} y^{(i-2)}(t) = 0$, то для применения правила Лопиталя следует предварительно установить, что $\lim\limits_{t \uparrow \omega} \pi_\omega(t) y^{(i-1)}(t) = 0$.

Положим
$$z(t) = \frac{\pi_\omega(t) y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)}.$$

Тогда
$$z'(t) = \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} + \frac{\pi_\omega(t) y^{(i)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} + \frac{\pi_\omega(t) y^{(i-1)}(t)}{(y^{(i-2)}(t))^2}\, y^{(i-1)}(t) =$$
$$= \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} \left[1 + \frac{\pi_\omega(t) y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} - \frac{\pi_\omega(t) y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)}\right].$$

Отсюда следует, что
$$z'(t) = \frac{z(t)}{\pi_\omega(t)} \left[1 + \frac{\pi_\omega(t) y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} - z(t)\right]. \tag{2.6}$$

Рассмотрим соответствующую этому соотношению функцию
$$f(t,c) = \frac{c}{\pi_\omega(t)} \left[1 + \frac{\pi_\omega(t) y^{(i)}(t)}{y^{(i-1)}(t)} - c\right].$$

Поскольку в силу предположения индукции при $k = i$ имеет место предельное соотношение (2.3), функция $f(t,c)$ при всех $c \in \mathbb{R}$, кроме значений $c = 0$ и $c = \mu_0 + n - i + 1$, сохраняет знак в некоторой левой окрестности ω. Поэтому согласно лемме 2.1 из работы [10] для функции z существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $t \uparrow \omega$. Покажем, что этот предел не может быть бесконечным. В самом деле, если бы он был равен $\pm\infty$, то из (2.6) получили бы соотношение
$$z'(t) = \frac{-z^2(t)}{\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$
т. е.
$$\frac{z'(t)}{z^2(t)} = -\frac{1}{\pi_\omega(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_0 до t, получаем
$$-\frac{1}{z(t)} + \frac{1}{z(t_0)} = -\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\pi_\omega(t)}[1 + o(1)]\, dt = -\ln|\pi_\omega(t)|[1 + o(1)].$$

Однако это невозможно, так как здесь левая часть имеет конечный предел при $t \uparrow \omega$, а правая — бесконечный. Следовательно, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t) = \mathrm{const}$. В силу условия $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(i-2)}(t) = 0$ это возможно лишь в случае, когда $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \pi_\omega(t) y^{(i-1)}(t) = 0$. Значит, для вычисления $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z(t)$ можно использовать правило Лопиталя. Поэтому получим (2.5).

Тем самым установлена справедливость предельного соотношения (2.3) при $k = i-1$. Тогда в силу метода математической индукции (2.3) справедливо при $k = 1, \ldots, n$.

Пусть теперь $\mu_0 = \pm\infty$ и y — произвольное $\Pi_\omega(Y_0, \pm\infty)$-решение уравнения (1.1). С помощью метода математической индукции покажем, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{y^{(k)}(t) y^{(k-2)}(t)}{[y^{(k-1)}(t)]^2} = 1, \quad k = 2, \ldots, n. \tag{2.7}$$

При $k = n$ это предельное соотношение верно в силу условия (1.8). Теперь предположим, что оно верно при $k = i \in \{3, \ldots, n-1\}$, и докажем его справедливость при $k = i-1$.

Положим

$$z(t) = \frac{y^{(i-1)}(t) y^{(i-3)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^2}.$$

Тогда

$$z'(t) = \frac{y^{(i)}(t) y^{(i-3)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^2} + \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} - 2\frac{[y^{(i-1)}(t)]^2 y^{(i-3)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^3} =$$

$$= \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} \left[\frac{y^{(i)}(t) y^{(i-3)}(t)}{y^{(i-1)} y^{(i-2)}(t)} + 1 - 2\frac{y^{(i-1)}(t) y^{(i-3)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^2} \right] =$$

$$= \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} \left[\frac{y^{(i)}(t) y^{(i-2)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^2} \, \frac{y^{(i-3)}(t) y^{(i)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^2} + 1 - 2\frac{y^{(i-1)}(t) y^{(i-3)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^2} \right].$$

Отсюда следует, что

$$z'(t) = \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} \left[z(t) \frac{y^{(i)}(t) y^{(i-2)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^2} + 1 - 2z(t) \right]. \tag{2.8}$$

Рассмотрим соответствующую этому соотношению функцию

$$f(t, c) = \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} \left[c \frac{y^{(i)}(t) y^{(i-2)}(t)}{[y^{(i-2)}(t)]^2} + 1 - 2c \right].$$

Поскольку выполняется первое из условий (1.7) и в силу предположения индукции при $k = i$ имеет место предельное соотношение (2.7), здесь при всех $c \neq 1$ правая часть сохраняет знак в некоторой левой окрестности ω. Поэтому согласно лемме 2.1 из работы [10] существует конечный либо равный $\pm\infty$ предел функции z при $t \uparrow \omega$.

Сначала покажем, что этот предел не может быть равен постоянной, отличной от единицы. В самом деле, если бы это было не так, то из (2.8) получили бы асимптотическое соотношение

$$z'(t) = \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)} [c_1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где c_1 — отличная от нуля постоянная. Интегрируя это соотношение на промежутке от t_0 до t и учитывая, что в силу (1.8) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(i-2)}(t)$ равен либо нулю , либо $\pm\infty$, получаем

$$z(t) - z(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{y^{(i-1)}(t)}{y^{(i-2)}(t)}[c_1 + o(1)]\,dt = [c_1 + o(1)]\ln|y^{(i-2)}(t)| \longrightarrow \pm\infty \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Однако это невозможно, так как здесь левая часть стремится к постоянной при $t \uparrow \omega$.

Покажем теперь, что этот предел не может быть равен $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$. Если бы он был равен $\pm\infty$, то из (2.8) получили бы соотношение

$$z'(t) = \frac{y^{(i-2)}(t)}{y^{(i-3)}(t)}\,z^2(t)[1 - 2 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

т. е.

$$\frac{z'(t)}{z^2(t)} = -\frac{y^{(i-2)}(t)}{y^{(i-3)}(t)}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_0 до t, получаем

$$-\frac{1}{z(t)} + \frac{1}{z(t_1)} = -\int\limits_{t_1}^{t} \frac{y^{(i-2)}(t)}{y^{(i-3)}(t)}[1 + o(1)]\,dt = -[1 + o(1)]\ln|y^{(i-3)}(t)| \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Здесь выражение, стоящее в левой части, имеет конечный предел при $t \uparrow \omega$, а выражение справа — бесконечный в силу условий (1.6), (1.7). Тем самым получили противоречие.

Значит, $\lim_{t\uparrow\omega} z(t) = 1$. Поэтому согласно методу математической индукции имеют место предельные соотношения (2.7). Из соотношений (2.7) следует, что

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} \sim \frac{y^{(k-1)}(t)}{y^{(k-2)}(t)}, \quad k = 2, \ldots, n, \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

и поэтому имеют место вторые из асимптотических соотношений (2.4). Из них в силу первого из условий (1.8) (при $\mu_0 = \pm\infty$) следуют первые из условий (2.4).

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть $|\mu_0| < +\infty$ и для некоторых $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ таких, что $i \neq j$, выполняется условие*

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < \nu_0\,\nu_1|\mu_0 + n - 1|(\sigma_i - \sigma_j). \tag{2.9}$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решения уравнения (1.1) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)\varphi_i(y(t))} = 0. \tag{2.10}$$

Доказательство. Для данных $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ введем функцию

$$z_{ij}(t) = \frac{p_j(t)\varphi_{1j}(y(t))}{p_i(t)\varphi_{1i}(y(t))}, \quad \text{где} \quad \varphi_{1k}(y) = |y|^{\sigma_k} L_{1k}(y), \quad k = i, j.$$

Для этой функции

$$z'_{ij}(t) = \frac{z_{ij}(t)}{|\pi_\omega(t)|} \left[\frac{|\pi_\omega(t)| p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)| p'_i(t)}{p_i(t)} + \right.$$
$$\left. + \frac{|\pi_\omega(t)| y'(t)}{y(t)} \left(\frac{y(t)\varphi'_{1j}(y(t))}{\varphi_{1j}(y(t))} - \frac{y(t)\varphi'_{1i}(y(t))}{\varphi_{1i}(y(t))} \right) \right]. \tag{2.11}$$

Здесь согласно лемме 2.1 и в силу свойств функций φ_{1k}, $k = i, j$,

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{|\pi_\omega(t)| y'(t)}{y(t)} \left(\frac{y(t)\varphi'_{1j}(y(t))}{\varphi_{1j}(y(t))} - \frac{y(t)\varphi'_{1i}(y(t))}{\varphi_{1i}(y(t))} \right) = \nu_0 \nu_1 |\mu_0 + n - 1| (\sigma_j - \sigma_i).$$

Поэтому в силу условия (2.9) существуют числа $\rho < 0$ и $t_1 \in [t_0, \omega[$ такие, что выполняется неравенство

$$\frac{|\pi_\omega(t)| p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)| p'_i(t)}{p_i(t)} + \frac{|\pi_\omega(t)| y'(t)}{y(t)} \left(\frac{y(t)\varphi'_{1j}(y(t))}{\varphi_{1j}(y(t))} - \frac{y(t)\varphi'_{1i}(y(t))}{\varphi_{1i}(y(t))} \right) < \rho \ \text{ при } \ t_1 \in [t_0, \omega[.$$

В силу этого неравенства из (2.11) получим

$$z'_{ij}(t) \le \frac{\rho z_{ij}(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[.$$

Отсюда следует, что

$$\ln \left| \frac{z_{ij}(t)}{z_{ij}(t_1)} \right| \le \rho \, \mathrm{sign} \, [\pi_\omega(t)] \, ln \left| \frac{\pi_\omega(t)}{\pi_\omega(t_1)} \right| \quad \text{при} \quad t \in [t_1, \omega[.$$

Здесь выражение, стоящее в правой части, стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$ и поэтому $\lim\limits_{t \uparrow \omega} z_{ij}(t) = 0$. Согласно этому условию и асимптотическим соотношениям $\varphi_{1k}(y) \sim \varphi_k(y)$, $k = i, j$, при $y \to Y_0$ справедливо предельное соотношение (2.10).

Лемма доказана.

Замечание 2.1. Из доказательства леммы 2.2 ясно, что если вместо (2.9) выполняется неравенство

$$\liminf_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p'_j(t)}{p_j(t)} - \frac{p'_i(t)}{p_i(t)} \right] > \nu_0 \nu_1 |n - 1 + \mu_0| (\sigma_i - \sigma_j),$$

то для каждого $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решения уравнения (1.1)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)\varphi_i(y(t))} = +\infty.$$

3. Основные результаты. Для того чтобы сформулировать основной результат, нам понадобятся вспомогательные функции

$$I_i(t) = \int\limits_{A_i}^{t} p_i(\tau)\pi_\omega^{n-1}(t)\, d\tau, \quad \Phi_i(y) = \int\limits_{B_i}^{y} \frac{ds}{\varphi_i(s)}, \tag{3.1}$$

где

$$A_i = \begin{cases} a, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(t)|^{n-1} p_i(\tau)\, d\tau = +\infty, \\ \\ \omega, & \text{если} \quad \int\limits_a^\omega |\pi_\omega(t)|^{n-1} p_i(\tau)\, d\tau < +\infty, \end{cases} \qquad B_i = \begin{cases} b, & \text{если} \quad \left| \int\limits_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} \right| = +\infty, \\ \\ Y_0, & \text{если} \quad \left| \int\limits_b^{Y_0} \frac{dy}{\varphi_i(y)} \right| < +\infty. \end{cases}$$

Отметим необходимые для дальнейшего свойства функции Φ_i. Поскольку $\Phi_i'(y) > 0$ при $y \in \Delta_{Y_0}(b)$, то $\Phi_i : \Delta_{Y_0}(b) \longrightarrow \Delta_{Z_0}(c)$, где

$$\Delta_{Z_0}(c) = \begin{cases} [c, Z_0[, & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) = [b, Y_0[, \\ ]Z_0, c], & \text{если} \quad \Delta_{Y_0}(b) =]Y_0, b], \end{cases} \qquad c = \int\limits_{B_i}^{b} \frac{ds}{\varphi_i(s)},$$

$$Z_0 = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad B_i = Y_0, \\ +\infty, & \text{если} \quad B_i = b < Y_0, \\ -\infty, & \text{если} \quad B_i = b > Y_0, \end{cases}$$

причем при $\sigma_i \neq 1$

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} \Phi_i(y) = \frac{\mu_0}{(1-\sigma_i)} \lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}(b)}} |y|^{1-\sigma_i} = Z_0, \tag{3.2}$$

и существует обратная непрерывно дифференцируемая возрастающая функция Φ_i^{-1} : $\Delta_{Z_0}(c) \longrightarrow \Delta_{Y_0}(b)$ такая, что

$$\lim_{\substack{z \to Z_0 \\ z \in \Delta_{Z_0}(c)}} \Phi_i^{-1}(z) = Y_0. \tag{3.3}$$

В силу представления (1.2), свойств M_1, M_2 медленно меняющихся функций и правила Лопиталя

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y}{\Phi_i(y)\varphi_i(y)} = 1 - \sigma_i. \tag{3.4}$$

Теорема 3.1. *Пусть $\mu_0 \in \mathbb{R} \backslash \{0, -1, \ldots, -n+1\}$, для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется неравенство $\sigma_i \neq 1$ и при всех $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$ выполняются условия (2.9).*

Тогда для существования $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$-решений уравнения (1.1) необходимо, а если алгебраическое относительно ρ уравнение

$$\prod_{k=1}^{n}(a_{0k}+\rho)=\sigma_i\prod_{k=1}^{n}a_{0k}, \tag{3.5}$$

где $a_{0k}=\mu_0+n-k$, $k=1,\dots,n$, не имеет корней с нулевой действительной частью, то и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_i'(t)}{I_i(t)}=(1-\sigma_i)(\mu_0+n-1),\quad \nu_0\lim_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|^{(n-1)+\mu_0}=Y_0 \tag{3.6}$$

и выполнялись неравенства

$$\nu_0\alpha_i\pi_\omega^n(t)\prod_{k=1}^{n}a_{0k}>0,\quad \nu_0\nu_1(\mu_0+n-1)\pi_\omega(t)>0\quad \textit{при}\quad t\in]a,\omega[. \tag{3.7}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))}=\frac{\alpha_i\pi_\omega^n(t)p_i(t)}{\prod_{k=1}^{n}a_{0k}}[1+o(1)], \tag{3.8}$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)}=\frac{a_{0k}}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)],\quad k=1,\dots,n-1, \tag{3.9}$$

причем если среди корней алгебраического уравнения (3.5) имеется l корней (с учетом кратных), действительные части которых отрицательны, то при $\omega=+\infty$ решений с такими представлениями существует l-параметрическое семейство, а при $\omega<+\infty$ — $(n-l)$-параметрическое семейство.

Замечание 3.1. Нетрудно проверить, что алгебраическое уравнение (3.5) заведомо не имеет корней с нулевой действительной частью, если $|\sigma_i|<1$.

Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть $\mu_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1,\dots,-n-1\}$ и $y:[t_0,\omega[\longrightarrow\Delta_{Y_0}$ — произвольное $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$-решение уравнения (1.1). Тогда существует $t_1\in\in[t_0,\omega[$ такое, что $y(t)\in\Delta_{Y_0}(b)$, $\operatorname{sign}y(t)=\nu_0$ и $\operatorname{sign}y'(t)=\nu_1$ при $t\in[t_1,\omega[$. Кроме того, согласно лемме 2.2 имеют место асимптотические соотношения (2.10) и поэтому из (1.1) следует, что

$$y^{(n)}(t)=\alpha_ip_i(t)\varphi_i(y(t))[1+o(1)]\quad \text{при}\quad t\uparrow\omega. \tag{3.10}$$

Поскольку $\mu_0\in\mathbb{R}\backslash\{0,-1,\dots,-n-1\}$, с использованием леммы 2.1 и обозначения $a_{0k}=\mu_0+n-k$, $k=\overline{1,n}$, находим

$$y^{(n)}(t)=\frac{y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)}\,\frac{y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)}\cdots\frac{y''(t)}{y'(t)}y'(t)=$$

$$= \frac{1}{\pi_\omega^{n-1}(t)} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n)}(t)}{y^{(n-1)}(t)} \frac{\pi_\omega(t)y^{(n-1)}(t)}{y^{(n-2)}(t)} \cdots \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} y'(t) \sim$$

$$\sim \frac{1}{\pi_\omega^{n-1}(t)} \mu_0(\mu_0+1)\ldots(\mu_0+n-2)y'(t) = \frac{\prod_{k=2}^n a_{0k}}{\pi_\omega^{n-1}(t)} y'(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этого асимптотического соотношения из (3.10) получаем

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = \frac{\alpha_i \pi_\omega^{n-1}(t) p_i(t)}{\prod_{k=2}^n a_{0k}}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.11}$$

Интегрируя это соотношение на промежутке от t_1 до t, находим

$$\int\limits_{y(t_1)}^{y(t)} \frac{ds}{\varphi_i(s)}\, d\tau = \frac{\alpha_i}{\prod_{k=2}^n a_{0k}} \int\limits_{t_1}^{t} p_i(\tau)\pi_\omega^{n-1}(\tau)[1+o(1)]\, d\tau,$$

откуда следует, что

$$\Phi_i(y(t)) = \frac{\alpha_i}{\prod_{k=2}^n a_{0k}} I_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Тогда в силу (3.4)

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))} = \frac{\alpha_i(1-\sigma_i)}{\prod_{k=2}^n a_{0k}} I_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) следует, что

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\pi_\omega^{n-1}(t)p_i(t)}{(1-\sigma_i)I_i(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

С другой стороны, согласно лемме 2.1 $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = a_{01}$. Поэтому

$$a_{01} = \frac{\pi_\omega^n(t)p_i(t)}{(1-\sigma)I_i(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega^n(t)p_i(t)}{I_i(t)} = a_{01}(1-\sigma_i).$$

Значит, выполняется первое из условий (3.6) и в силу (3.12) имеет место при $t \uparrow \omega$ асимптотическое представление (3.8). Справедливость при $t \uparrow \omega$ асимптотических соотношений (3.9) следует из леммы 2.1. Кроме того, из (3.8) и (3.9) с учетом того, что $\operatorname{sign} y(t) = \nu_0$ и $\operatorname{sign} y'(t) = \nu_1$ при $t \in [t_1, \omega[$, вытекают неравенства (3.7). Второе из условий (3.6) следует из (3.9) при $k = 1$.

Достаточность. Пусть выполняются условия (3.6), (3.7) и алгебраическое уравнение (3.5) не имеет корней с нулевой действительной частью. Покажем, что в этом случае дифференциальное уравнение (1.1) имеет $P_\omega(Y_0,\mu_0)$-решения, допускающие при $t\uparrow\omega$ асимптотические представления (3.8), (3.9), и выясним вопрос о количестве таких решений.

Уравнение (1.1) с помощью преобразования

$$\Phi_i(y(t)) = \frac{\alpha_i I_i(t)}{\prod_{k=2}^n a_{0k}}[1+v_1(\tau)], \quad \frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{a_{0k}[1+v_{k+1}(\tau)]}{\pi_\omega(t)},$$
$$k=\overline{1,n-1}, \quad \tau = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \tag{3.13}$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega=+\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega<+\infty, \end{cases}$$

сведем к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta\left[H(\tau,v_1)(1+v_2) - q(\tau)(1+v_1)\right], \\ v_k' &= \beta\left[-a_{0k}v_k + a_{0k+1}v_{k+1} + V_k(v_k,v_{k+1}\right], \quad k=\overline{2,n-1}, \\ v_n' &= \beta\left[\frac{a_{on}q(\tau)G(\tau,v_1)}{H(\tau,v_1)}\prod_{k=2}^{n-1}(1+v_k)^{-1} - a_{0n-1}(1+v_n)^2 + 1 + v_n\right], \end{aligned} \tag{3.14}$$

в которой

$$q(\tau(t)) = \frac{\pi_\omega(t)I_i'(t)}{I_i(t)}, \quad H(\tau(t),v_1) = \frac{\alpha_i Y(t,v_1)\prod_{k=1}^n a_{0k}}{I_i(t)\varphi_i(Y(t,v_1))},$$

$$Y(t,v_1) = \Phi_i^{-1}\left(\frac{\alpha_i I_i(t)}{\prod_{k=2}^n a_{0k}}(1+v_1)\right),$$

$$G(\tau(t),v_1) = \frac{1}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y(t,v_1))}\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k(Y(t,v_1)),$$

$$V_k(v_k,v_{k+1}) = a_{0k}v_kv_{k+1} - a_{0k-1}v_k^2.$$

Здесь

$$\tau'(t)>0 \quad \text{при} \quad t\in[a,\omega[, \quad \lim_{t\uparrow\omega}\tau(t) = +\infty. \tag{3.15}$$

Поэтому согласно первому из условий (3.6)

$$\lim_{\tau\to+\infty} q(\tau) = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I_i'(t)}{I_i(t)} = (1-\sigma_i)(\mu_0+n-1). \tag{3.16}$$

В силу условий (3.6), (3.7), (3.2) и (3.4)

$$\frac{\alpha_i}{\prod_{k=2}^{n} a_{0k}} \lim_{t\uparrow\omega} I_i(t) = Z_0$$

и существует число $t_0 \in [a,\omega[$ такое, что

$$\frac{\alpha_i I_i(t)}{\prod_{k=2}^{n} a_{0k}}(1+v_1) \in \Delta_{Z_0}(c) \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[\quad \text{и} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}.$$

Поэтому

$$\lim_{t\uparrow\omega} Y(t,v_1) = Y_0 \quad \text{равномерно по} \quad |v_1| \le \frac{1}{2} \tag{3.17}$$

и

$$Y(t,v_1) \in \Delta_{Y_0}(b) \quad \text{при} \quad t \in [t_0,\omega[\quad \text{и} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}.$$

Отсюда, в частности, ясно, что правые части системы дифференциальных уравнений (3.14) определены и непрерывны на множестве $\Omega = [\tau_0,+\infty[\times\mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}}$, где

$$\tau_0 = \beta\ln|\pi_\omega(t_0)|, \quad \mathbb{R}^n_{\frac{1}{2}} = \left\{(v_1,\ldots,v_n) \in \mathbb{R}^n : |v_i| \le \frac{1}{2}, \quad i = \overline{1,n}\right\}.$$

В силу (3.4) и (3.17)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y(t,v_1)}{\Phi_i(Y(t,v_1))\varphi_i(Y(t,v_1))} = \lim_{y\to Y_0} \frac{y}{\Phi_i(y)\varphi_i(y)} = 1-\sigma_i \quad \text{равномерно по} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\frac{Y(t,v_1)}{\varphi_i(Y(t,v_1))} = \Phi_i(Y(t,v_1))[1-\sigma_i+\varepsilon(t,v_1)] = \frac{\alpha_i I_i(t)}{\prod_{k=2}^{n} a_{0k}}(1+v_1)[1-\sigma_i+\varepsilon(t,v_1)], \tag{3.18}$$

где ε непрерывна на множестве $[t_0,\omega[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varepsilon(t,v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что для функции H имеют место представления

$$H(\tau,v_1) = a_{01}(1+v_1)[1-\sigma_i+r_1(\tau,v_1)], \quad \frac{1}{H(\tau,v_1)} = \frac{1}{a_{01}(1+v_1)}\left[\frac{1}{1-\sigma_i}+r_2(\tau,v_1)\right], \tag{3.19}$$

где функции r_i, $i = 1,2$, непрерывны на $[\tau_0,+\infty[\times\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}$ и удовлетворяют условиям

$$\lim_{\tau\to+\infty} r_i(\tau,v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1 \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{3.20}$$

В силу вида функции $Y(t,v_1)$ имеем

$$(Y(t,v_1))'_t = \frac{\alpha_i}{\prod_{k=2}^n a_{0k}}\,(1+v_1)p_i(t)\pi_\omega^{(n-1)}(t)\varphi_i(Y(t,v_1)).$$

Отсюда с учетом (3.18) следует, что

$$\frac{\pi_\omega(t)[Y(t,v_1)]'_t}{Y(t,v_1)} = \frac{p_i(t)\pi_\omega^n(t)}{I_i(t)}\frac{1}{1-\sigma_i+\varepsilon(t,v_1)}.$$

Поэтому в силу первого из условий (3.6)

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)[Y(t,v_1)]'_t}{Y(t,v_1)} = \mu_0+n-1 \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{3.21}$$

Учитывая теперь предельные соотношения (3.17) и (3.21), а также условия (2.9), которые выполняются при всех $j\neq i$, устанавливаем, повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.2, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{p_j(t)\varphi_j\left(Y(t,v_1)\right)}{p_i(t)\varphi_i\left(Y(t,v_1)\right)} = 0 \quad \text{при} \quad j\neq i, \quad j\in\{1,\ldots,m\}, \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда с учетом того, что

$$G(\tau(t),v_1) = 1+r_i(t)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^m\frac{\alpha_j p_j(1+r_j(t))\varphi_j(Y(t,v_1))}{\alpha_i p_i\varphi_i(Y(t,v_1))},$$

и выполняются условия (1.2) и (3.15), имеем представление

$$G(\tau,v_1) = 1+r_3(\tau,v_1), \quad \text{где} \quad \lim_{\tau\to+\infty}r_3(\tau,v_1)=0 \quad \text{равномерно по} \quad v_1\in\mathbb{R}_{\frac{1}{2}}. \tag{3.22}$$

Используя теперь представления (3.19), (3.22) и условие (3.16), записываем систему дифференциальных уравнений (3.14) в виде

$$\begin{aligned}
v_1' &= \beta\left[f_1(\tau,v_1,v_2)+(1-\sigma_i)a_{01}v_2+V_1(v_1,v_2)\right],\\
v_k' &= \beta\left[-a_{0k}v_k+a_{0k+1}v_{k+1}+V_k(v_k,v_{k+1})\right], \quad k=\overline{2,n-1},\\
v_n' &= \beta\left[f_2(\tau,v_1,\ldots,v_n)-a_{0n}\sum_{n=1}^{n-1}v_n+(1-2a_{0n-1})v_n+V_n(v_1,\ldots,v_n)\right],
\end{aligned} \tag{3.23}$$

где

$$f_1(\tau,v_1,v_2) = a_{01}(1+v_1)(1+v_2)r_1(\tau,v_1)-[q(\tau)-(1-\sigma_i)(\mu_0+n-1)](1+v_1),$$

$$f_n(\tau, v_1, \dots, v_n) = [q(\tau) - (1-\sigma_i)a_{01}](1 + r_3(\tau, v_1))\times$$
$$\times\left[\frac{1}{1-\sigma_i} + r_2(\tau, v_1)\right]\frac{a_{0n}}{a_{01}\prod_{k=1}^{n-1}(1+v_k)} +$$
$$+ r_3(\tau, v_1)[1 + (1-\sigma_i)r_2(\tau, v_1)]\frac{a_{0n}}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+v_k)} +$$
$$+ (1-\sigma_i)r_2(\tau, v_1)\frac{a_{0n}}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+v_k)},$$

$$V_1(v_1, v_2) = a_{01}(1-\sigma_i)v_1v_2,\ \ V_n(v_1, \dots, v_n) = \frac{a_{0n}}{\prod_{k=1}^{n-1}(1+v_k)} - a_{0n} + a_{0n}\sum_{k=1}^{n-1} v_k - a_{0n-1}v_n^2.$$

В силу условий (3.16), (3.20) и (3.22)

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_1(\tau, v_1) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{\tau\to+\infty} f_n(\tau, v_1, \dots, v_n) = 0 \quad \text{равномерно по} \quad (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{\frac{1}{2}}.$$

Кроме того,

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0} \frac{\partial V_k(v_k, v_{k+1})}{\partial v_i} = 0, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad i = k, k+1,$$

$$\lim_{|v_1|+\ldots+|v_n|\to 0} \frac{\partial V_n(v_1, \dots, v_n)}{\partial v_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Характеристическое уравнение $\det[A - \rho E] = 0$ матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01}(1-\sigma) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_{01} & a_{02} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{0n-2} & a_{0n-1} \\ -a_{0n} & -a_{0n} & -a_{0n} & \cdots & -a_{0n} & 1 - 2a_{0n-1}) \end{pmatrix},$$

составленной из коэффициентов, стоящих в квадратных скобках при линейной части системы дифференциальных уравнений (3.23), имеет вид (3.5) и поэтому согласно условиям теоремы не имеет корней с нулевой действительной частью.

Тем самым показано, что для системы (3.23) выполняются все условия теоремы 2.2 из работы [11]. На основании этой теоремы система дифференциальных уравнений (2.23) имеет хотя бы одно решение $(v_i)_{i=1}^n : [\tau_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\tau_1 \geq \tau_0$, стремящееся к нулю при $\tau \to +\infty$, причем в случае, когда среди корней характеристического уравнения (3.5) имеется l корней (с учетом кратных), действительные части которых отрицательны, то при $\beta = 1$ таких решений существует l-параметрическое семейство, а при $\beta = -1$ — $(n-l)$-параметрическое. Каждому такому решению в силу замен (3.13) и предельного соотношения (3.4) соответствует решение дифференциального уравнения (1.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.8), (3.9), причем решений с такими представлениями существует l-параметрическое семейство в случае, когда $\omega = +\infty$, и $(n-l)$-параметрическое семейство в случае, когда $\omega < +\infty$.

Теорема доказана.

Укажем теперь условия, при которых асимптотические представления (3.8), (3.9) могут быть записаны в явном виде.

Определение 3.1 [12]. *Будем говорить, что функция φ_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, удовлетворяет условию S, если для любой непрерывно дифференцируемой функции $l : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ такой, что*

$$\lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{z\, l'(z)}{l(z)} = 0,$$

имеет место асимптотическое соотношение

$$L_k(zl(z)) = L_k(z)[1 + o(1)] \quad \textit{при} \quad z \to Y_0 \quad (z \in \Delta_{Y_0}).$$

Условию S заведомо удовлетворяют функции φ_k, для которых функция L_k имеет конечный предел при $y \to Y_0$, а также функции вида

$$\varphi_k(y) = |y|^{\sigma_k} |\ln y|^{\gamma_1}, \quad \varphi_k(y) = |y|^{\sigma_k} |\ln y|^{\gamma_1} |\ln|\ln y||^{\gamma_2},$$

где $\gamma_1, \gamma_2 \neq 0$, и многие другие.

Замечание 3.2 [13]. Если функция φ_k удовлетворяет условию S, а функция $y : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y_0, \quad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{\xi'(t)}{\xi(t)}\, [r + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где r — отличная от нуля вещественная постоянная, ξ — непрерывно дифференцируемая в некоторой левой окрестности ω вещественная функция, для которой $\xi'(t) \neq 0$, то

$$L_k(y(t)) = L_k\left(\mu_0 |\xi(t)|^r\right)[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

так как в данном случае

$$y(t) = z(t) l(z(t)), \quad \text{где} \quad z(t) = \mu_0 |\xi(t)|^r,$$

и

$$\lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{z\, l'(z)}{l(z)} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{z(t)\, l'(z(t))}{l(z(t))} = \lim_{t \uparrow \omega} \frac{z(t) \left(\frac{y(t)}{z(t)}\right)'}{\left(\frac{y(t)}{z(t)}\right) z'(t)} = \lim_{t \uparrow \omega} \left[\frac{\xi(t) y'(t)}{r \xi'(t) y(t)} - 1\right] = 0.$$

Теорема 3.2. *Пусть $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \ldots, -n-1\}$ и для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$ выполняется неравенство $\sigma_i \neq 1$, а при всех $j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}$ — условие (2.9). Пусть, кроме того, функция φ_i удовлетворяют условию S. Тогда каждое $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решение (в случае* *их существования) дифференциального уравнения (1.1) допускает при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления*

$$y^{(k-1)}(t) = \frac{\nu_0 \prod_{j=1}^{k-1} a_{oj}}{\pi_\omega^{k-1}(t)} \left| \frac{\pi_\omega^n(t) p_i(t) L_i\left(\nu_0 |\pi_\omega(t)|^{a_{01}}\right)}{\prod_{j=1}^n a_{0j}} \right|^{\frac{1}{1-\sigma_i}} [1+o(1)], \quad k = \overline{1,n}, \tag{3.24}$$

$$\text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Доказательство. При установлении теоремы 3.1 было показано, что для существования $\Pi_\omega(Y_0, \mu_0)$-решений уравнения (1.1) необходимо, чтобы выполнялись условия (3.6), (3.7) и каждое такое решение допускало при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (3.8), (3.9).

Поскольку функция φ_i удовлетворяет условию S и согласно (3.9)

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1}{\pi_\omega(t)} [a_{01} + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

в силу (1.3) и замечания 3.2

$$\varphi_i(y(t)) = |y(t)|^{\sigma_i} L_i(y(t)) = |y(t)|^{\sigma_i} L_i\left(\nu_0 |\pi_\omega(t)|^{a_{01}}\right) [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поэтому асимптотическое представление (3.8) можно записать в виде

$$\frac{y(t)}{|y(t)|^{\sigma_i}} = \frac{\alpha_i \pi_\omega^n(t) p_i(t)}{\prod_{j=1}^n a_{0j}} L_i(\nu_0 |\pi_\omega(t)|^{a_{01}})[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

откуда следует, что

$$y(t) = \nu_0 \left| \frac{\pi_\omega^n(t) p_i(t) L_i\left(\nu_0 |\pi_\omega(t)|^{a_{01}}\right)}{\prod_{k=j}^n a_{0j}} \right|^{\frac{1}{1-\sigma_i}} [1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

В силу этого представления и (3.9) получим асимптотические представления (3.24).

Теорема доказана.

4. Пример уравнения с правильно меняющимися при $t \uparrow \omega$ коэффициентами. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^m \alpha_k q_k(t) \varphi_k(y), \tag{4.1}$$

в котором $\alpha_k \in \{-1, 1\}$, $k = \overline{1,m}$, $q_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1,m}$, — непрерывные правильно меняющиеся при $t \uparrow \omega$ функции порядков γ_k, $k = \overline{1,m}$, и $\varphi_k : \Delta_{Y_0} \longrightarrow]0, +\infty[$ $k = \overline{1,m}$, — непрерывные правильно меняющиеся при $y \to Y_0$ функции порядков σ_k, $k = \overline{1,m}$, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, Y_0 равно либо нулю, либо $\pm\infty$, Δ_{Y_0} — односторонняя окрестность Y_0.

В силу свойств правильно меняющихся функций (см. [1, с. 15] гл. 1, § 2) существуют непрерывно дифференцируемые правильно меняющиеся при $t \uparrow \omega$ функции $p_k : [a, \omega[\longrightarrow$ $\longrightarrow]0, +\infty[$, $k = \overline{1, m}$, такие, что

$$q_k(t) \sim p_k(t) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega \quad \text{и} \quad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) p_k'(t)}{p_k(t)} = \gamma_k, \quad k = \overline{1, m}. \tag{4.2}$$

Значит, уравнение (4.1) является уравнением вида (1.1) и при этом

$$\limsup_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} \right] = \beta(\gamma_j - \gamma_i) \quad \text{для любых} \quad i, j \in \{1, \ldots, m\},$$

где

$$\beta = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если} \quad \omega < +\infty. \end{cases}$$

Поэтому для $|\mu_0| < +\infty$ и некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$ такого, что $\sigma_i \neq 1$, условия (2.9) примут вид

$$\beta(\gamma_j - \gamma_i) < \nu_0 \nu_1 |\mu_0 + n - 1| (\sigma_i - \sigma_j) \quad \text{при} \quad j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}. \tag{4.3}$$

В случае, когда $\mu_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \ldots, -n+1\}$ и выполняются данные неравенства, для существования $P_\omega(Y_0, \mu_0)$-решений уравнения (4.1) необходимо, согласно теореме 3.1, чтобы выполнялись условия (3.6), (3.7).

В силу (4.2)

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I_i'(t)}{I_i(t)} = n + \gamma_i.$$

Значит, первое из условий (3.6) примет вид

$$n + \gamma_i = (1 - \sigma_i)(\mu_0 + n - 1),$$

откуда следует, что

$$\mu_0 = \frac{1 + \gamma_i + \sigma_i(n-1)}{1 - \sigma_i}. \tag{4.4}$$

Кроме того, в силу второго из условий (3.7)

$$\nu_0 \nu_1 \beta(\mu_0 + n - 1) > 0.$$

Поэтому неравенства (4.3) можно представить в виде

$$\beta(\gamma_i - \gamma_j) < \beta(\gamma_i + n) \frac{\sigma_i - \sigma_j}{1 - \sigma_i} \quad \text{при} \quad j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{i\}. \tag{4.5}$$

Наконец, второе из условий (3.6) и первое из (3.7) в данном случае имеют вид

$$\nu_0 \lim_{t \uparrow \omega} |\pi_\omega(t)|^{\frac{n+\gamma_i}{1-\sigma_i}} = Y_0, \quad \alpha_i \nu_0 \left(\frac{\pi_\omega(t)}{1 - \sigma_i} \right)^n \prod_{k=1}^n [n + \gamma_i + (1 - \sigma_i)(k-1)] > 0. \tag{4.6}$$

Тогда согласно теореме 3.1 имеет место следующее утверждение.

Следствие 4.1. *Пусть для некоторого* $i \in \{1,\ldots,m\}$ *такого, что* $\sigma_i \neq 1$ *и* $\dfrac{n+\gamma_i}{1-\sigma_i} \in \mathbb{R} \setminus \{0,1,\ldots,n-1\}$, *выполняются неравенства (4.5) и условия (4.6). Тогда при значении* μ_0 *из формулы (4.4) существуют* $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$*-решения дифференциального уравнения (4.1), причем для каждого из них имеют место при* $t \uparrow \omega$ *асимптотические представления*

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))} = \frac{\alpha_i\,[(1-\sigma_i)\pi_\omega(t)]^n\,q_i(t)}{\prod_{k=1}^n[n+\gamma_i+(1-\sigma_i)(k-1)]}[1+o(1)], \tag{4.7}$$

$$\frac{y^{(k)}(t)}{y^{(k-1)}(t)} = \frac{n+\gamma_k+(1-\sigma_i)(k-1)}{(1-\sigma_i)\pi_\omega(t)}[1+o(1)], \quad k=1,\ldots,n-1. \tag{4.8}$$

Замечание 4.1. Если выполняются условия следствия 4.1 и функция φ_i удовлетворяет условию S, то асимптотические представления (4.7) и (4.8) в силу теоремы 3.2 могут быть записаны в явном виде

$$y^{(k-1)}(t) = \frac{\nu_0\prod_{j=1}^{k-1}[n+\gamma_i+(1-\sigma_i)(j-1)]}{[(1-\sigma_i)\pi_\omega(t)]^{k-1}}\times$$

$$\times\left|\frac{[(1-\sigma_i)\pi_\omega(t)]^n q_i(t) L_i\left(\nu_0|\pi_\omega(t)|^{\frac{n+\gamma_i}{1-\sigma_i}}\right)}{\prod_{j=1}^n[n+\gamma_i+(1-\sigma_i)(j-1)]}\right|^{\frac{1}{1-\sigma_i}}[1+o(1)], \quad k=\overline{1,n}.$$

5. Выводы. В данной работе для дифференциального уравнения n-го порядка вида (1.1) с правильно меняющимися при $y \to Y_0$ нелинейностями φ_i, $i=\overline{1,m}$, выделен достаточно широкий класс так называемых $\Pi_\omega(Y_0,\mu_0)$-решений и предложен при $\mu_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,\ldots,-n+1\}$ метод установления асимптотики при $t \uparrow \omega$ таких решений и их производных до порядка $n-1$ включительно. Найденные представления имеют неявную форму записи. Указаны дополнительные условия на нелинейности, при выполнении которых данные представления могут быть записаны в явном виде. Кроме того, выяснен вопрос о существовании решений дифференциального уравнения (1.1) с полученной асимптотикой.

Следует также обратить внимание на то, что в силу произвольности выбора $Y_0 \in \{\pm\infty; 0\}$ и $\omega \le +\infty$ установленные результаты позволяют описывать асимптотику не только правильных решений, стремящихся либо к нулю, либо к $\pm\infty$ при $t \uparrow \omega$, но и различного типа сингулярных решений уравнения (1.1).

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. — М.: Наука, 1985. — 144 с.
2. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1990. — 430 с.
3. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. — 1987. — **23**, № 3. — С. 524 – 526.

4. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Докл. расш. зас. сем. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа. — 1988. — **3**, № 3. — С. 62–65.
5. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена–Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. — 1992. — **234**, № 2. — С. 258–260.
6. *Евтухов В. М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена–Фаулера // Сообщ. АН Грузии. — 1992. — **145**, № 2. — С. 269–273.
7. *Evtukhov V. M., Shebanina E. V.* Asymptotic behaviour of solutions of n-th order differential equations // Mem. Different. Equat. Math. Phys. — 1998. — **13**. — P. 150–153.
8. *Евтухов В. М., Касьянова В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I // Укр. мат. журн. — 2005. — **57**, № 3. — С. 338–355.
9. *Евтухов В. М., Касьянова В. А.* Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. I // Укр. мат. журн. — 2006. — **58**, № 7. — С. 901–921.
10. *Евтухов В. М., Шинкаренко В. Н.* Асимптотические представления решений двучленных неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений n-го порядка с экспоненциальной нелинейностью // Дифференц. уравнения. — 2008. — **44**, № 3. — С. 308–322.
11. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. — 2010. — **62**, № 1. — С. 52–80.
12. *Евтухов В. М., Белозерова М. А.* Асимптотические представления решений существенно нелинейных неавтономних дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. — 2008. — **60**, № 3. — С. 310–331.
13. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений с правильно меняющимися нелинейностями // Дифференц. уравнения. — 2011. — **47**, № 5. — С. 628–650.

Получено 04.07.11,
после доработки — 19.09.12