УДК 517.9

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ „ИЗОЛИРОВАННОГО” РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Д. С. Джумабаев, С. М. Темешева

Ин-т математики М-ва образования и науки Республики Казахстан
Казахстан, 050010, Алматы, ул. Пушкина, 125
e-mail: dzhumabaev@list.ru
anar@math.kz

By subdividing the interval and introducing additional parameters, we study a nonlinear two-point boundary-value problem for a system of ordinary differential equations. We construct a system of equations with respect to the parameters, which permits to find the initial approximation of the boundary-value problem. We find necessary and sufficient conditions for existence of an isolated solution of the considered problem.

Досліджується нелінійна двоточкова крайова задача для систем звичайних диференціальних рівнянь при розбитті інтервалу та введенні додаткових параметрів. Побудовано систему рівнянь відносно параметрів, що дають можливість знайти початкове наближення розв'язку крайової задачі. Встановлено необхідні та достатні умови існування ізольованого розв'язку розглядуваної задачі.

Рассматривается нелинейная двухточечная краевая задача для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$g(x(0), x(T)) = 0, \tag{2}$$

где $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывны, $\|x\| = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Через $C([0,T], \mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

Вопросы разрешимости и построения приближенных методов нахождения решения задачи (1), (2) рассмотрены во многих работах [1 – 11]. Библиография и подробный анализ работ по основным группам методов исследования и решения краевых задач содержится в монографии [11].

Существенно нелинейным краевым задачам свойственно существование нескольких решений. В связи с этим важное значение для приложений имеет изолированность решения. Это свойство решения в нелинейных задачах играет такую же роль, как единственность в линейных задачах. При моделировании реальных процессов и построении приближенных методов нахождения решения, как правило, требуется непрерывная зависимость решения от изменений правых частей дифференциальных уравнений и граничных условий. Однако изолированное решение, рассматриваемое как изолированный элемент множества решений, вообще говоря, не обладает этим свойством.

Рассмотрим пример [10, с. 4]

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1). \tag{3}$$

Хотя задача (3) имеет изолированное решение $x = 0$, „возмущенная" краевая задача

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + \varepsilon, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1),$$

не имеет решения ни при каком $\varepsilon > 0$. В этом примере малое изменение правой части дифференциального уравнения не только не обеспечивает малое изменение изолированного решения, но и не сохраняет свойство разрешимости задачи. Поэтому часто рассматривается изолированное в более узком смысле решение задачи (1), (2).

Следующее определение является модификацией определения изолированности решения из [6, с. 792].

Определение. *Решение $x^*(t)$ задачи (1), (2) называется изолированным, если существует число $\rho_0 > 0$, при котором функции $f(t,x)$ и $g(v,w)$ соответственно в $G_1^*(\rho_0) = \{(t,x) : t \in [0,T], \|x - x^*(t)\| < \rho_0\}$, $G_2^*(\rho_0,\rho_0) = \{(v,w) \in \mathbb{R}^{2n} : \|v - x^*(0)\| < \rho_0, \|w - x^*(T)\| < \rho_0\}$ имеют равномерно непрерывные частные производные $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$ и линейная однородная двухточечная краевая задача*

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t,x^*(t))y, \quad t \in [0,T], \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$g'_v(x^*(0),x^*(T))y(0) + g'_w(x^*(0),x^*(T))y(T) = 0 \tag{5}$$

имеет только тривиальное решение.

В [12] установлены условия непрерывной зависимости изолированного в смысле определения решения от изменения данных задачи (1), (2).

Для выяснения необходимых и достаточных условий существования изолированного решения используем метод параметризации [12, 13].

Возьмем шаг $h > 0 : Nh = T$, $N = 1,2,\ldots$, и по нему выполним разбиение $[0,T) = \bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh)$. Сужение функции $x(t)$ на r-й интервал $[(r-1)h,rh)$ обозначим через $x_r(t)$ и задачу (1), (2) сведем к многоточечной краевой задаче

$$\frac{dx_r}{dt} = f(t,x_r), \quad t \in [(r-1)h,rh), \quad r = \overline{1,N}, \tag{6}$$

$$g(x_1(0), \lim_{t\to T-0} x_N(t)) = 0, \tag{7}$$

где

$$\lim_{t\to sh-0} x_s(t) = x_{s+1}(sh), \quad s = \overline{1,N-1}, \tag{8}$$

— условия склеивания решения во внутренних точках разбиения интервала $[0,T]$.

Через $C([0,T],h,\mathbb{R}^{nN})$ обозначим пространство систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t))$, где $x_r : [(r-1)h, rh) \to \mathbb{R}^n$ непрерывны и имеют конечные левосторонние пределы $\lim_{t\to rh-0} x_r(t)$ при всех $r=\overline{1,N}$, с нормой

$$\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=1:N} \sup_{t\in[(r-1)h,rh)} \|x_r(t)\|.$$

Очевидно, что $C([0,T],h,\mathbb{R}^{nN})$ является полным пространством.

Решением задачи (6)–(8) является система функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t)) \in C([0,T],h,\mathbb{R}^{nN})$ с непрерывно дифференцируемыми на $[(r-1)h, rh)$ функциями $x_r(t)$, $r=\overline{1,N}$, удовлетворяющими уравнениям (6) и равенствам (7), (8). При этом в начальных точках интервала $[(r-1)h, rh)$ дифференциальному уравнению (6) удовлетворяет правосторонняя производная функции $x_r(t)$, $r=\overline{1,N}$. Если $x^*(t)$ — решение задачи (1), (2), то система его сужений $x^*[t] = (x_1^*(t), x_2^*(t), \ldots, x_N^*(t))$ принадлежит пространству $C([0,T],h,\mathbb{R}^{nN})$ и является решением задачи (6)–(8). Наоборот, если система функций $\widetilde{x}[t] = (\widetilde{x}_1(t), \widetilde{x}_2(t), \ldots, \widetilde{x}_N(t))$ — решение задачи (6)–(8), то функция $\widetilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\widetilde{x}(t) = \widetilde{x}_r(t)$, $t\in[(r-1)h, rh)$, $r=\overline{1,N}$, $\widetilde{x}(T) = \lim_{t\to T-0}\widetilde{x}_N(t)$, является решением задачи (1), (2).

Отметим, что условия склеивания решения (8) и дифференциальные уравнения (6) обеспечивают и непрерывность производных решения в точках разбиения $t = sh$, $s = \overline{1,N-1}$.

Вводя параметры $\lambda_r \widehat{=} x_r((r-1)h)$ и на каждом r-м интервале производя замену функций $u_r(t) = x_r(t) - \lambda_r$, получаем краевую задачу с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r + u_r), \quad t\in[(r-1)h, rh), \quad r=\overline{1,N}, \tag{9}$$

$$u_r((r-1)h) = 0, \quad r=\overline{1,N}, \tag{10}$$

$$g(\lambda_1, \lambda_N + \lim_{t\to T-0} u_N(t)) = 0, \tag{11}$$

$$\lambda_s + \lim_{t\to sh-0} u_s(t) - \lambda_{s+1} = 0, \quad s=\overline{1,N-1}. \tag{12}$$

Решением задачи (9)–(12) является пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in \mathbb{R}^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_N^*(t)) \in C([0,T],h,\mathbb{R}^{nN})$. Если $(\lambda^*, u^*[t])$ — решение задачи (9)–(12), то функция $x^*(t)$, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t\in[(r-1)h, rh)$, $r=\overline{1,N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t\to T-0} u_N^*(t)$, будет решением задачи (1), (2). Пусть $\widetilde{x}(t)$ — решение задачи (1), (2). Тогда пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$ с элементами $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N) \in \mathbb{R}^{nN}$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t), \ldots, \widetilde{u}_N(t))$, где $\widetilde{\lambda}_r = \widetilde{x}((r-1)h)$, $\widetilde{u}_r(t) = \widetilde{x}(t) - \widetilde{x}((r-1)h)$, $t\in[(r-1)h, rh)$, $r=\overline{1,N}$, будет решением задачи (9)–(12).

При фиксированном значении параметра λ_r задача Коши (9), (10) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_r(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r + u_r(\tau))\, d\tau, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1, N}. \tag{13}$$

Из (13), определив $\lim_{t\to rh-0} u_r(t)$, $r = \overline{1, N}$, и подставив их в (11), (12), получим систему нелинейных уравнений относительно λ_r :

$$h\, g\left(\lambda_1, \lambda_N + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f(\tau, \lambda_N + u_N(\tau))\, d\tau\right) = 0, \tag{14}$$

$$\lambda_s + \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f(\tau, \lambda_s + u_s(\tau))\, d\tau - \lambda_{s+1} = 0, \quad s = \overline{1, N-1}. \tag{15}$$

Систему уравнений (14), (15) запишем в виде

$$Q_{1,h}(\lambda, u) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{16}$$

Условие А. *Существует* $h > 0 : Nh = T$ *такое, что система нелинейных уравнений* $Q_{1,h}(\lambda, 0) = 0$ *имеет решение* $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}) \in \mathbb{R}^{nN}$, *задача Коши*

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r^{(0)} + u_r), \quad u_r((r-1)h) = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh),$$

имеет решение $u_r^{(0)}(t)$ *при всех* $r = \overline{1, N}$ *и система функций*

$$u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t)) \in C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN}).$$

Возьмем числа $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$ и составим множества

$$S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) = \big\{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{nN} : \|\lambda - \lambda^{(0)}\| = \max_{r=\overline{1,N}} \|\lambda_r - \lambda_r^{(0)}\| < \rho_\lambda\big\},$$

$$S(u^{(0)}[t], \rho_u) = \{u[t] \in C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN}) : \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 < \rho_u\},$$

$$G_1^0(\rho_x) = \{(t, x) : t \in [0,T], \|x - \lambda_r^{(0)} - u_r^{(0)}(t)\| < \rho_x, t \in [(r-1)h, rh),$$
$$r = \overline{1, N}, \|x - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t\to T-0} u_N^{(0)}(t)\| < \rho_x, t = T\},$$

$$G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x) = \{(v, w) \in \mathbb{R}^{2n} : \|v - \lambda_1^{(0)}\| < \rho_\lambda, \|w - \lambda_N^{(0)} - \lim_{t\to T-0} u_N^{(0)}(t)\| < \rho_x\}.$$

Условие B. *Функции f, g соответственно в $G_1^0(\rho_x)$, $G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x)$ имеют равномерно непрерывные частные производные f'_x, g'_v, g'_w и выполняются неравенства*

$$\|f'_x(t,x)\| \leq L(t), \quad \|g'_v(v,w)\| \leq L_1, \quad \|g'_w(v,w)\| \leq L_2,$$

где $L(t)$ — непрерывная на $[0,T]$ функция, L_1, L_2 — постоянные.

Для дальнейшого изложения необходима следующая теорема о разрешимости нелинейного операторного уравнения

$$F(x) = 0, \quad x \in X. \tag{17}$$

Здесь $F: X \to Y$, X, Y — банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ соответственно, $S(x^0, \rho) = \{x \in X : \|x - x^0\|_X < \rho\}$, $L(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов $\Lambda : X \to Y$ с индуцированной нормой.

Теорема A [12, с. 41]. *Пусть выполнены следующие условия*:

1) производная Фреше $F'(x)$ равномерно непрерывна в $S(x^0, \rho)$;

2) $F'(x)$ ограниченно обратима и $\|(F'(x))^{-1}\|_{L(Y,X)} \leq \gamma$, $\gamma - \mathrm{const}$, для всех $x \in$ $\in S(x^0, \rho)$;

3) $\gamma \|F(x^0)\|_Y < \rho$.

Тогда существует число $\alpha_0 \geq 1$ такое, что для любого $\alpha \geq \alpha_0$ последовательность $\{x^{(m+1)}\}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, определяемая итерационным процессом

$$x^{(0)} = x^0, \quad x^{(m+1)} = x^{(m)} - \frac{1}{\alpha}\,(F'(x^{(m)}))^{-1}\,F(x^{(m)}),$$

содержится в $S(x^0, \rho)$, сходится к решению x^* уравнения (17), принадлежащему $S(x^0, \rho)$, и справедлива оценка

$$\|x^* - x^0\|_X \leq \gamma\,\|F(x^0)\|_Y.$$

Приэтом любое решение (17) в $S(x^0, \rho)$ изолировано.

По заданной паре $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$, где

$$\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_N^{(0)}) \in \mathbb{R}^{nN}, \quad u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t)) \in C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN}),$$

равенствами $x^{(0)}(t) = \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(t)$, $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, $x^{(0)}(T) = \lambda_N^{(0)} + \lim_{t \to T-0} u_N^{(0)}(t)$ определим на $[0,T]$ кусочно-непрерывную функцию $x^{(0)}(t)$ и введем функциональный шар

$$S(x^{(0)}(t), \rho_x) = \left\{ x(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n) : \max_{t \in [0,T]} \|x(t) - x^{(0)}(t)\| < \rho_x \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть существуют $h > 0 : Nh = T$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, при которых выполняются условия A, B, $(nN \times nN)$-матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ обратима для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ и имеют место неравенства*

$$\left\| \left(\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda} \right)^{-1} \right\| \leq \gamma_1(h), \tag{18}$$

$$q_1(h) = \gamma_1(h)\max(1, hL_2)\max_{r=\overline{1,N}}\left(\exp\left(\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(\tau)\,d\tau\right) - 1 - \int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(\tau)\,d\tau\right) < 1, \tag{19}$$

$$\frac{\gamma_1(h)}{1-q_1(h)}\,\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| < \rho_\lambda, \tag{20}$$

$$\frac{\gamma_1(h)}{1-q_1(h)}\,\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|\max_{r=\overline{1,N}}\left(\exp\left(\int\limits_{(r-1)h}^{rh} L(\tau)\,d\tau\right) - 1\right) < \rho_u, \tag{21}$$

$$\rho_\lambda + \rho_u \le \rho_x. \tag{22}$$

Тогда задача (1), (2) в $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ имеет изолированное решение.

Доказательство. Выполнив разбиение интервала $[0, T]$ с заданным шагом $h > 0 : Nh = T$, от задачи (1), (2) перейдем к эквивалентной краевой задаче с параметрами (9) – (12). Решение последней найдем методом последовательных приближений. За начальное приближение возьмем пару $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$ из условия A и первое приближение по параметру определим из системы нелинейных уравнений

$$Q_{1,h}(\lambda, u^{(0)}) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{23}$$

Из условия B и неравенства (22) следует, что матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial\lambda}$ является производной Фреше по λ оператора $Q_{1,h}(\lambda, u)$ и равномерно непрерывна в $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. Поскольку условия теоремы обеспечивают выполнение всех предположений теоремы A, существует решение $\lambda^{(1)}$ системы уравнений (23) и справедлива оценка

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \le \gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|.$$

Функцию $u_r^{(1)}(t)$ найдем, решив задачу Коши

$$\frac{du_r}{dt} = f(t, \lambda_r^{(1)} + u_r), \quad u_r((r-1)h) = 0, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}.$$

Из условия B, неравенств (21), (22) следует существование $u_r^{(1)}(t)$ и оценка

$$\|u_r^{(1)}(t) - u_r^{(0)}(t)\| \le \left(\exp\left(\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)\,d\tau\right) - 1\right)\|\lambda_r^{(1)} - \lambda_r^{(0)}\| \tag{24}$$

для всех $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1,N}$. Подставляя найденные функции $u_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1,N}$, в (16), получаем систему уравнений для нахождения второго приближения по параметру. Вновь используя теорему A, находим $\lambda^{(2)}$ и оценку

$$\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\| \le \gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)})\|.$$

Отсюда, используя неравенства (24), получаем

$$\|\lambda^{(2)} - \lambda^{(1)}\| \le \gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(1)}) - Q_{1,h}(\lambda^{(1)}, u^{(0)})\| \le \gamma_1(h)\max(1, hL_2)\times$$
$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \left\|f\big(\tau, \lambda_r^{(1)} + u_r^{(1)}(\tau)\big) - f\big(\tau, \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0)}(\tau)\big)\right\| d\tau \le$$
$$\le q_1(h)\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|.$$

Продолжая этот процесс, находим

$$\lambda^{(k)} = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_N^{(k)}) \in \mathbb{R}^{nN},\ \ u^{(k)}[t] = (u_1^{(k)}(t), u_2^{(k)}(t), \ldots, u_N^{(k)}(t)) \in C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN})$$

и устанавливаем оценки

$$\|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\| \le q_1(h)\|\lambda^{(k-1)} - \lambda^{(k-2)}\|, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{25}$$

$$\|u_r^{(k)}(t) - u_r^{(k-1)}(t)\| \le \left(\exp\left(\int\limits_{(r-1)h}^{t} L(\tau)\, d\tau\right) - 1\right)\|\lambda_r^{(k)} - \lambda_r^{(k-1)}\|,$$
$$k = 1, 2, \ldots, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}. \tag{26}$$

Поскольку $q_1(h) < 1$, из (25), (26), в силу неравенств (20), (21), следует, что

$$(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t]) \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

и при $k \to \infty$ сходится к решению задачи с параметрами — паре $(\lambda^*, u^*[t])$, принадлежащей $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$. Тогда, в силу неравенства (22), функция

$$x^*(t) = \begin{cases} \lambda_r^* + u_r^*(t) & \text{при} \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_N^* + \lim\limits_{t \to T-0} u_N^*(t) & \text{при} \quad t = T, \end{cases}$$

принадлежит $S(x^{(0)}(t), \rho_x)$ и является решением задачи (1), (2).

Обратимость матрицы $Q_1^*(h) = \dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}$ и неравенства (18), (19), согласно теореме 1 из [13, с. 54], обеспечивают однозначную разрешимость линеаризованной краевой задачи

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x^*(t))y + \varphi(t), \quad t \in [0, T], \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{27}$$

$$g'_v(x^*(0), x^*(T))y(0) + g'_w(x^*(0), x^*(T))y(T) = d, \tag{28}$$

где $\varphi(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $d \in \mathbb{R}^n$. Отсюда следует изолированность в смысле определения решения $x^*(t)$.

Теорема 1 доказана.

Следующее утверждение показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для существования изолированного в смысле определения решения.

Теорема 2. *Краевая задача (1), (2) имеет изолированное решение тогда и только тогда, когда существуют* $h > 0 : Nh = T$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_u > 0$, $\rho_x > 0$, *при которых выполняются условия* A, B, *матрица Якоби* $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda, u)}{\partial \lambda}$ *обратима для всех* $(\lambda, u[t]) \in \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \times S(u^{(0)}[t], \rho_u)$ *и имеют место неравенства (18) – (22).*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x^*(t)$ — „изолированное” решение задачи (1), (2). Тогда по определению существует число $\rho_0 > 0$ и функции f, g соответственно в $G_1^*(\rho_0)$, $G_2^*(\rho_0, \rho_0)$ имеют равномерно непрерывные частные производные f'_x, g'_v, g'_w. Поэтому найдутся числа L_0, L_1, L_2 такие, что

$$\|f'_x(t, x)\| \le L_0, \quad \|g'_v(v, w)\| \le L_1, \quad \|g'_w(v, w)\| \le L_2$$

для всех $(t, x) \in G_1^*(\rho_0)$, $(v, w) \in G_2^*(\rho_0, \rho_0)$.

Промежуток $[0, T]$ разобьем на равные части с шагом $h = T/N$ и рассмотрим эквивалентную многоточечную краевую задачу с параметрами. Пара $(\lambda^*, u^*[t])$ с элементами $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in \mathbb{R}^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_N^*(t)) \in C([0, T], h, \mathbb{R}^{nN})$, где $\lambda_r^* = x^*((r-1)h)$, $u_r^*(t) = x^*(t) - x^*((r-1)h)$ при $t \in [(r-1)h, rh)$, $r = \overline{1, N}$, будет решением задачи (9) – (12). Найдется число $M > 0$ такое, что $\|\dot{x}^*\|_1 \le M$, и для каждого $r = \overline{1, N}$ справедлива оценка

$$\|u_r^*(t)\| = \|x^*(t) - x^*((r-1)h)\| \le \sup_{t \in [(r-1)h, rh)} \|\dot{x}^*(t)\|\, h \le M\, h, \quad t \in [(r-1)h, rh). \tag{29}$$

Из существования только тривиального решения однородной задачи (4), (5) следует однозначная разрешимость линеаризованной задачи (27), (28). Тогда согласно теореме 4 [13, с. 61] существует $h_0 > 0$, при котором для всех $h \in (0, h_0] : Nh = T$ матрица $Q_1^*(h) = \dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*, u^*)}{\partial \lambda}$ обратима и $\|(Q_1^*(h))^{-1}\| \le \gamma_1/h$, где γ_1 — постоянная, не зависящая от h. Выберем число $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\varepsilon\gamma_1 \le 1/4$, и использовав равномерную непрерывность $f'_x(t,x)$, $g'_v(v,w)$, $g'_w(v,w)$, найдем $\rho^*_\lambda > 0$, $\rho^*_u > 0$ такие, что $\rho^*_\lambda + \rho^*_u = \rho^* \in (0, \rho_0]$ и

$$\frac{1}{h}\left\|\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial\lambda} - \frac{\partial Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)}{\partial\lambda}\right\| \leq \varepsilon$$

для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho^*_\lambda) \times S(u^*[t], \rho^*_u)$. Применяя теорему о малых возмущениях ограниченно обратимых операторов [14, с. 142], убеждаемся, что матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}$ ограниченно обратима и

$$\left\|\left(\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda,u)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{4}{3}\,\gamma_1/h$$

для всех $(\lambda, u[t]) \in S(\lambda^*, \rho^*_\lambda) \times S(u^*[t], \rho^*_u)$.

Выберем $h_1 \in (0, h_0]$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$Mh_1 \leq \rho^*_u/2, \tag{30}$$

$$\frac{4\gamma_1 L_0}{3}\,Mh_1\,\max(1, h_1L_2) < \rho^*_\lambda/2, \tag{31}$$

$$\frac{4\gamma_1 L_0}{3}\,Mh_1\,\max(1, h_1L_2)(e^{h_1L_0} - 1) < \rho^*_u/2. \tag{32}$$

Если $u[t] \in S(0, \rho^*_u/2)$, то в силу (29), (30)

$$\|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 \leq \|u[\cdot]\|_2 + \|u^*[\cdot]\|_2 \leq \rho^*_u/2 + \rho^*_u/2 = \rho^*_u,$$

и, следовательно, $S(0, \rho^*_u/2) \subset S(u^*[t], \rho^*_u)$.

При $h \in (0, h_1] : Nh = T$ рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$Q_{1,h}(\lambda, 0) = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{nN}. \tag{33}$$

Поскольку матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(\lambda,0)}{\partial\lambda}$ равномерно непрерывна в $S(\lambda^*, \rho^*_\lambda)$, оценка

$$\left\|\left(\frac{\partial Q_{1,h}(\lambda,0)}{\partial\lambda}\right)^{-1}\right\| \leq \frac{4}{3}\,\gamma_1/h$$

справедлива для всех $\lambda \in S(\lambda^*, \rho^*_\lambda)$ и в силу (29), (31)

$$\frac{4\gamma_1}{3h}\,\|Q_{1,h}(\lambda^*,0)\| = \frac{4\gamma_1}{3h}\,\|Q_{1,h}(\lambda^*,0) - Q_{1,h}(\lambda^*,u^*)\| \leq \frac{4\gamma_1}{3h}\,\max(1, hL_2)\times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \int\limits_{(r-1)h}^{rh} \|f(\tau, \lambda^*_r) - f(\tau, \lambda^*_r + u^*_r(\tau))\|\, d\tau \leq$$

$$\leq \frac{4\gamma_1 L_0}{3}\,Mh\max(1, hL_2) < \rho^*_\lambda,$$

согласно теореме A система уравнений (33) имеет решение $\lambda^{(0)} \in S(\lambda^*, \rho^*_\lambda)$ и

$$\|\lambda^{(0)} - \lambda^*\| \leq \frac{4\gamma_1 L_0}{3} Mh \max(1, hL_2). \tag{34}$$

Функцию $u_r^{(0)}(t)$ — решение задачи Коши (9), (10) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $r = \overline{1,N}$, найдем методом последовательных приближений:

$$u_r^{(0,0)}(t) = u_r^*(t),$$

$$u_r^{(0,m+1)}(t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r^{(0)} + u_r^{(0,m)}(\tau))\, d\tau, \quad m = 0,1,2,\ldots, \quad t \in [(r-1)h, rh), \quad r = \overline{1,N}.$$

Из неравенств

$$\|u_r^{(0,1)}(t) - u_r^{(0,0)}(t)\| = \|u_r^{(0,1)}(t) - u_r^*(t)\| = \Bigg\| \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r^{(0)} + u_r^*(\tau))\, d\tau -$$

$$- \int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau, \lambda_r^* + u_r^*(\tau))\, d\tau \Bigg\| \leq \int\limits_{(r-1)h}^{t} L_0\, d\tau \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|,$$

. . . .

$$\|u_r^{(0,m+1)}(t) - u_r^{(0,m)}(t)\| \leq \int\limits_{(r-1)h}^{t} L_0 \|u_r^{(0,m)}(\tau) - u_r^{(0,m-1)}(\tau)\|\, d\tau,$$

$$\|u_r^{(0,m+1)}(t) - u_r^*(t)\| \leq \sum_{j=1}^{m+1} \frac{(L_0(t-(r-1)h))^j}{j!} \|\lambda_r^{(0)} - \lambda_r^*\|, \ \ t \in [(r-1)h, rh), \ \ r = \overline{1,N},$$

следует, что функциональная последовательность $\{u_r^{(0,m+1)}(t)\}$ при $m \to \infty$ равномерно на $[(r-1)h, rh)$ сходится решению $u_r^{(0)}(t)$ задачи (9), (10) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ для всех $r = \overline{1,N}$. При этом $u^{(0)}[t] = (u_1^{(0)}(t), u_2^{(0)}(t), \ldots, u_N^{(0)}(t)) \in C([0,T], h, \mathbb{R}^{nN})$ и

$$\|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 \leq \frac{4\gamma_1 L_0}{3} Mh \max(1, hL_2)(e^{hL_0} - 1). \tag{35}$$

Таким образом, имеет место условие A и оценки (34), (35).

Теперь возьмем $\rho_\lambda = \rho^*_\lambda/2$, $\rho_u = \rho^*_u/2$, $\rho_x = \rho_\lambda + \rho_u$ и выберем $h_2 \in (0, h_1]$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{4\gamma_1}{3h_2} \max(1, h_2 L_2)(e^{h_2 L_0} - 1 - h_2 L_0) \leq \frac{1}{3}, \tag{36}$$

$$2\gamma_1 L_0 M h_2 \max(1, h_2 L_0)\left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3}\max(1, h_2 L_2)(e^{h_2 L_0} - 1) + 1\right) < \rho_\lambda, \tag{37}$$

$$2\gamma_1 L_0 M h_2 \max(1, h_2 L_0)\left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3}\max(1, h_2 L_2)(e^{h_2 L_0} - 1) + 1\right)(e^{h_2 L_0} - 1) < \rho_u. \tag{38}$$

Если $\lambda \in S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda)$, $u[t] \in S(u^{(0)}[t], \rho_u)$, то на основании (31), (32), (34), (35) получаем

$$\|\lambda - \lambda^*\| \leq \|\lambda - \lambda^{(0)}\| + \|\lambda^{(0)} - \lambda^*\| < \rho_\lambda + \frac{4\gamma_1 L_0}{3} M h \max(1, hL_2) < \rho_\lambda^*,$$

$$\|u[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 \leq \|u[\cdot] - u^{(0)}[\cdot]\|_2 + \|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\|_2 <$$
$$< \rho_u + \frac{4\gamma_1 L_0}{3} M h \max(1, hL_2)(e^{hL_0} - 1) < \rho_u^*,$$

т. е. $S(\lambda^{(0)}, \rho_\lambda) \subset S(\lambda^*, \rho_\lambda^*)$, $S(u^{(0)}[t], \rho_u) \subset S(u^*[t], \rho_u^*)$ при всех $h \in (0, h_2]$. Поэтому в $G_1^0(\rho_x)$, $G_2^0(\rho_\lambda, \rho_x)$ выполняется условие B.

Неравенство (18) выполняется с постоянной $\gamma_1(h) = \dfrac{4}{3}\gamma_1/h$. Тогда $q_1(h) = \dfrac{4\gamma_1}{3h}\max(1, hL_2)(e^{hL_0} - 1 - hL_0)$, и в силу (36) $q_1(h) \leq \dfrac{1}{3}$ при $h \in (0, h_2]$.

Принимая во внимание оценки

$$\|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq \|u^{(0)}[\cdot] - u^*[\cdot]\| + \|u^*[\cdot]\| \leq Mh\left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3}\max(1, hL_2)(e^{hL_0} - 1) + 1\right),$$

$$\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\| = \|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)}) - Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, 0)\| \leq \max(1, hL_2) h L_0 \|u^{(0)}[\cdot]\|_2$$

и неравенства (37), (38), получаем следующее:

$$\frac{\gamma_1(h)\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|}{1 - q_1(h)} \leq 2\gamma_1 L_0 M h \max(1, hL_0)\left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3}\max(1, hL_2)(e^{hL_0} - 1) + 1\right) < \rho_\lambda,$$

$$\frac{\gamma_1(h)}{1 - q_1(h)}\|Q_{1,h}(\lambda^{(0)}, u^{(0)})\|(e^{hL_0} - 1) \leq$$
$$\leq 2\gamma_1 L_0 M h \max(1, hL_0)\left(\frac{4\gamma_1 L_0}{3}\max(1, hL_2)(e^{hL_0} - 1) + 1\right)(e^{hL_0} - 1) < \rho_u.$$

Таким образом, при выборе $\rho_\lambda = \rho_\lambda^*/2$, $\rho_u = \rho_u^*/2$, $\rho_x = \rho_\lambda + \rho_u$ все условия теоремы 1 выполняются для любого $h \in (0, h_2] : Nh = T$.

Теорема 2 доказана.

Теоремы, доказанные в настоящей работе, отличаются от аналогичных утверждений [12] условием A. При выполнении этого условия метод последовательных приближений, примененный при доказательстве теоремы 1, позволяет найти изолированное решение задачи (1), (2). Если задача (1), (2) имеет изолированное в смысле определения решение $x^*(t)$, то всегда найдутся шаги $h > 0 : Nh = T$ и число $\rho_\lambda > 0$, при которых система уравнений (33) имеет решение $\lambda^{(0)} \in S(\lambda^*, \rho_\lambda)$, где $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*) \in \mathbb{R}^{nN}$, $\lambda_r^* = x^*((r-1)h)$, $r = \overline{1, N}$.

1. *Шаманский В. Е.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. — Киев: Наук. думка, 1963. — Ч. 1.
2. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. — М.: Мир, 1968.
3. *Keller H. B.* Numerical methods for two-point boundary-value problems. — Blaisdell: Walthan, 1968.
4. *Roberts S. M., Shipman J. S.* Two-point boundary-value problems: shooting methods. — New York: Elsevier, 1972.
5. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. — М.: Физматгиз, 1973.
6. *Keller H. B., White A. B.* Difference methods for boundary value problems in ordinary differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1975. — **12**, № 5. — P. 791 – 802.
7. *Современные* численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж. Уатта. — М.: Мир, 1979.
8. *Монастырный П. И.* О связи изолированности решений со сходимостью методов пристрелки // Дифференц. уравнения. — 1980. — **16**, № 4. — С. 732 – 740.
9. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986.
10. *Кигурадзе И. Т.* Краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Соврем. проб. математики. Новейшие достижения / Итоги науки и техники. — ВИНИТИ. — 1987. — **30**.
11. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. — Киев: Наук. думка, 1986.
12. *Джумабаев Д. С., Темешева С. М.* Метод параметризации решения нелинейных двухточечных краевых задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 2007. — **47**, № 1. — С. 39 – 63.
13. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Журн. вычислит. математики и мат. физики. — 1989. — **29**, № 1. — С. 50 – 66.
14. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.

Получено 31.03.10