УДК 517.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ И СВЯЗНОСТИ ГЛОБАЛЬНОГО АТТРАКТОРА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ БЕНАРДА, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СИСТЕМЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

О. В. Капустян, А. В. Паньков

Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко
Украина, 03680, Киев, просп. Акад. Глушкова, 2, корп. 7
e-mail: alexkap@univ.kiev.ua
coldflame@ukr.net

Х. Валеро

Университет Мигуеля Эрнандеса
Аликанте, Испания
e-mail:jralero@umh.es

We prove existence and connectedness of a global attractor for a multivalued semiflow generated by the weak solutions of a three dimensional Bénard system that satisfy a system of energy inequalities.

Доведено існування та зв'язність глобального атрактора для багатозначного напівпотоку, породженого слабкими розв'язками тривимірної системи Бенарда, що задовольняють систему енергетичних нерівностей.

Введение. Трехмерная система Бенарда является известной моделью в гидродинамике, которая описывает скорость, давление и температуру вязкой несжимаемой жидкости [1–3]. Известные на сегодня результаты о ее глобальной разрешимости не гарантируют единственности решений задачи Коши, поэтому для описания динамики этой системы естественно использовать теорию многозначных полупотоков [4–6]. Существование глобального аттрактора в слабой топологии фазового пространства для полупотока, порожденного всеми слабыми решениями, было доказано в [6]. В [7] на слабых решениях, полученных как пределы решений аппроксимационных задач, был построен m-полупоток, для которого в круге диссипативности доказано существование глобального аттрактора в топологии пространства $H_w \times L^2(\Omega)$. В данной работе для более широкого класса слабых решений установлено энергетическое неравенство в пространстве $L^4(\Omega)$, с помощью которого для соответствующего m-полупотока доказано существование и связность глобального аттрактора в пространстве $H_w \times L^2(\Omega)$.

Постановка задачи. В ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей рассматриваем задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \,\triangle\, u + (u\nabla)u + \xi\omega = f - \nabla p, \\ &\operatorname{div} u = 0, \qquad\qquad (1) \\ &u|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial t} - \triangle\, \omega + (u\nabla)\omega = g, \\ &\omega|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

где $\nu > 0$, $\xi \in R^3$ — константы; $f : \Omega \to R^3$, $g : \Omega \to R$ — заданные функции; $u\nabla = \sum_{i=1}^{3} u_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Будем рассматривать стандартные функциональные пространства [1 – 3]

$$H = \mathrm{cl}_{(L^2(\Omega))^3}\left\{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \mid \mathrm{div}\, u = 0\right\}, \quad V = \mathrm{cl}_{(H_0^1(\Omega))^3}\left\{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \mid \mathrm{div}\, u = 0\right\}$$

с нормами $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$ и скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)$, $(\cdot,\cdot)_1$. Так же будем обозначать нормы и скалярные произведения в пространствах $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ соответственно.

Использовав трилинейные формы

$$b(u,v,z) = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} z_j\, dx, \quad c(u,\omega,\eta) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{3} u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \eta\, dx,$$

сформулируем слабую постановку задачи (1), (2) на $(0,T)$ [1 – 3, 6]: найти $\varphi = \{u,\omega\}$ из класса

$$W_T = (L^2(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H)) \times (L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega)))$$

такую, что для всех $v \in V$, $\eta \in H_0^1(\Omega)$ выполнены равенства

$$\frac{d}{dt}(u,v) + \nu(u,v)_1 + b(u,u,v) + (\xi\omega, v) = (f,v),$$

$$\frac{d}{dt}(\omega,\eta) + (\omega,\eta)_1 + c(u,\omega,\eta) = (g,\eta)$$

в смысле скалярных распределений на $(0,T)$.

Известно [3, 6], что для $f \in H$, $g \in L^2(\Omega)$ и для любых $\varphi_0 = \{u_0,\omega_0\} \in X := H \times L^2(\Omega)$, $T > 0$ существует хотя бы одно решение $\varphi = \{u,\omega\}$ задачи (1), (2) в приведенном выше смысле, которое удовлетворяет условию $\varphi(0) = \varphi_0$, причем $\varphi \in C([0,T];X_\omega)$ и имеют место энергетические неравенства в фазовом пространстве X.

Цель данной работы заключается в том, чтобы при дополнительном условии $g \in L^4(\Omega)$ выделить класс решений задачи (1), (2), удовлетворяющих энергетическому неравенству в пространстве $L^4(\Omega)$ по второй компоненте фазового вектора, и доказать, что такие решения порождают многозначный полупоток, для которого существует связный глобальный аттрактор в топологии пространства $H_\omega \times L^2(\Omega)$.

Основные результаты. Пусть (Y,ρ) — полное метрическое пространство, $P(Y)$, $\beta(Y)$ — совокупность всех непустых и непустых ограниченных подмножеств Y.

Определение 1 [4, 8]. *Отображение $G : R_+ \times Y \mapsto P(Y)$ — m-полупоток, если:*

1) $G(0,y) = y \quad \forall y \in Y$, *2)* $G(t+s,y) \subseteq G(t,G(s,y)) \quad \forall t,s \geq 0\, \forall y \in Y.$

Определение 2 [4, 8]. *Компакт* $\Theta \subset Y$ — *глобальный аттрактор* m*-полупотока* G*, если:*

1) $\Theta \subseteq G(t,\Theta) \quad \forall t \geq 0,$

2) $\forall B \in \beta(Y)$ $\mathrm{dist}\,(G(t,B),A) \to 0,\ t \to \infty,$ *где* $\mathrm{dist}\,(K,L) = \sup\limits_{x\in K}\inf\limits_{y\in L}\rho(x,y)$ — *полуметрика Хаусдорфа.*

Лемма 1. *Если m-полупоток G удовлетворяет свойствам:*

1) $\exists B_0 \in \beta(Y)\,\forall B \in \beta(Y)\,\exists T = T(B)\,\forall t \geq T : G(t,B) \subset B_0,$

2) $\forall t > 0\; G(t,\cdot)$ *имеет замкнутый график,*

3) $\forall t > 0\,\forall B \in \beta(Y)\; G(t,B)$ — *предкомпакт,*

то существует глобальный аттрактор Θ*. Если, кроме того,*

4) существует $B_1 \in \beta(Y)$ *связное и такое, что* $\Theta \subset B_1,$

5) $\forall t > 0\,\forall x \in B_1\; G(t,x)$ — *связное множество,*

то Θ — *связное множество.*

Доказательство. Существование глобального аттрактора Θ при выполнении условий 1–3 следует из теоремы 2.17 [8]. Покажем, что для любого $t > 0$ отображение $x \mapsto G(t,x)$ полунепрерывно сверху. Поскольку в силу условий 2, 3 множество $G(t,x)$ компактно, рассуждая от противного, имеем существование $x_0 \in Y$, $\epsilon > 0$, $\delta_n \searrow 0$, $x_n \in O_{\delta_n}(x_0)$, $y_n \in G(t,x_n)$ таких, что $y_n \notin O_\epsilon(G(t,x_0))$. В силу условия 3 последовательность $\{y_n\}$ предкомпактна, т. е. по подпоследовательности $y_n \to y_0 \notin O_\epsilon(G(t,x_0))$. С другой стороны, в силу условия 2 y_0 принадлежит $G(t,x_0)$. Получили противоречие.

Теперь пусть множество Θ не связно. Тогда существуют открытые множества A_1, A_2 такие, что $\Theta \cap A_1 \neq \varnothing$, $\Theta \cap A_2 \neq \varnothing$, $\Theta \subset A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$. В силу полунепрерывности сверху $G(t,\cdot)$ и связности $G(t,x)$ множество $G(t,B_1)$ связно. Тогда из вложений $\Theta \subset G(t,\Theta) \subset G(t,B_1)$ имеем $G(t,B_1) \cap A_1 \neq \varnothing$, $G(t,B_1) \cap A_2 \neq \varnothing$, $G(t,B_1) \not\subset A_1 \cup A_2$ $\forall t > 0$ Возьмем $t_n \nearrow +\infty$. Тогда существуют $\xi_n \in G(t_n,B_1)$ такие, что $\xi_n \notin A_1 \cup A_2$. Однако для достаточно больших $n \geq 1$ $\xi_n \in G(t_n,B_1) \subset G(1,B_0)$ и из условия 3 по подпоследовательности $\xi_n \to \xi \notin A_1 \cup A_2$. С другой стороны, из определения аттрактора ξ принадлежит Θ. Полученное противоречие доказывает лемму.

Для задачи (1), (2) обозначим через $A_1 : V \to V^*$, $A_2 : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ линейные операторы, порожденные формами $\langle A_1 u, v\rangle = (u,v)_1$, $\langle A_2\omega,\eta\rangle = (\omega,\eta)_1$, $\lambda_1 > 0$ — минимальные среди собственных значений операторов A_1, A_2, $\{\psi_j\}_{j=1}^\infty \subset D(A_1) = (H^2(\Omega))^3 \cap V$ — собственные функции оператора A_1, которые образуют ортонормированный базис в H, H_m — подпространство, порожденное $\{\psi_j\}_{j=1}^m$, $P_m : H \to H_m$ — соответствующий ортопроектор.

Теорема 1. *Пусть* $f \in H$, $g \in L^4(\Omega)$*. Тогда для любых* $\varphi_0 = \{u_0,\omega_0\} \in X$ *и* $T > 0$ *существует хотя бы одно решение задачи (1), (2) на* $(0,T)$ $\varphi(\cdot) = \{u(\cdot),\omega(\cdot)\}$, $\varphi(0) = \varphi_0$ *такое, что* $\omega \in C((0,T];L^2(\Omega)) \cap C((0,T];L^4_\omega(\Omega))$*, и выполнены энергетические неравенства*

$\forall t \geq s$*, для п. в.* $s > 0$ *и для* $s = 0:$

$$V_f(u,\omega)(t) := \frac{1}{2}\,\|u(t)\|^2 + \nu\int_0^t \|u(p)\|_1^2\,dp + \int_0^t (\xi\omega,u)\,dp - \int_0^t (f,u)dp \leq V_f(u,\omega)(s), \qquad (3)$$

$$\Psi(u,\omega)(t) := \left(\|u(t)\|^2 - \frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}\|f\|^2\right)e^{\nu\lambda_1 t} - \frac{2|\xi|^2}{\nu\lambda_1}\int_0^t \|\omega(p)\|^2 e^{\nu\lambda_1 p}\,dp \le \Psi(u,\omega)(s), \qquad (4)$$

$\forall t \ge s \ge 0$:

$$V_g(\omega)(t) := \frac{1}{2}\|\omega(t)\|^2 + \int_0^t \|\omega(p)\|_1^2\,dp - \int_0^t (g,\omega(p))\,dp \le V_g(\omega)(s), \qquad (5)$$

$$F(\omega)(t) := \left(\|\omega(t)\|^2 - \frac{\|g\|^2}{\lambda_1^2}\right)e^{\lambda_1 t} \le F(\omega)(s). \qquad (6)$$

Для этого решения при $t \ge s$ для п. в. $s > 0$ также имеет место энергетическое неравенство

$$\|\omega(t)\|_{L^4}^4 \le \|\omega(s)\|_{L^4}^4 e^{3(t-s)} + \frac{1}{3}\|g\|_{L^4}^4(e^{3(t-s)} - 1). \qquad (7)$$

Если же $\omega_0 \in L^4(\Omega)$, то $\omega \in C([0,T]; L^4_\omega(\Omega))$ и (7) имеет место и для $s = 0$.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $m \ge 1$ вспомогательную задачу относительно неизвестных функций $u^m(t,x) = \sum_{i=1}^m g_{im}\psi_i(x), \omega^m(t,x)$:

$$\frac{du^m}{dt} + \nu A_1 u^m + P_m B(u^m, u^m) + P_m(\xi\omega^m) = P_m f,$$
$$u^m(0) = u_0^m \in H_m,$$

$$\frac{d\omega^m}{dt} + A_2\omega^m + C(u^m,\omega^m) = g,$$
$$\omega^m(0) = \omega_0^m \in H_0^1(\Omega),$$

где $u_0^m \to u_0$ в H, $\omega_0^m \to \omega_0$ в $L^2(\Omega)$, элементы $B(u,v) \in V^*$, $C(u,\omega) \in H^{-1}(\Omega)$ определяются равенствами

$$\langle B(u,v), z\rangle = b(u,v,z) \quad \forall z \in V,$$

$$\langle C(u,\omega), \eta\rangle = c(u,\omega,\eta) \quad \forall \eta \in H_0^1(\Omega).$$

С помощью галеркинских аппроксимаций [6], [7] (лемма 1) можно показать, что для любых $m \ge 1$ и $T > 0$ существует единственное решение этой задачи Коши $\varphi^m = \{u^m, \omega^m\} \in W_T$, которое при $t \ge s \ge 0$ удовлетворяет (3) – (6). Кроме этого, согласно лемме 9 [6] $\dfrac{d\omega^m}{dt} \in L^2(0,T; H^{-1}(\Omega))$ и при $t \ge s \ge 0$ функция ω^m удовлетворяет (7).

Оценки (3) – (6) позволяют воспользоваться леммой о компактности [9, 10] для троек пространств

$$L^2(0,T;V) \subset L^2(0,T;H) \subset L^{\frac{4}{3}}(0,T;V^*),$$

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^2(0,T;L^2(\Omega)) \subset L^{\frac{4}{3}}(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

и получить, что по подпоследовательности

$$\begin{aligned} &\varphi^m \to \varphi \quad \text{слабо в} \quad L^2(0,T;V) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \\ &\varphi^m \to \varphi \text{ в } L^2(0,T;X), \\ &\varphi^m(t) \to \varphi(t) \quad \text{в} \quad X \quad \text{для п. в.} \quad t \in (0,T) \quad \text{и слабо для любого} \quad t \in [0,T], \end{aligned} \tag{8}$$

где $\varphi = \{u, \omega\} \in W_T$, $\varphi(0) = \varphi_0$ — решение задачи (1), (2) на $(0,T)$. Из (8) имеем, что φ удовлетворяет (3) – (6) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$ и для $s = 0$.

Теперь пусть $\varepsilon > 0$ любое. Поскольку $\omega_0^m \to \omega_0$ в $L^2(\Omega)$, из (5) следует, что для $s = 0$ существует константа $K > 0$, не зависящая от ε, m, такая, что

$$\int\limits_0^\varepsilon \|\omega^m(t)\|_1^2 \, dt \leq K. \tag{9}$$

Тогда существует $\theta_\varepsilon^m \in (0,\varepsilon)$ такое, что $\|\omega^m(\theta_\varepsilon^m)\|_1^2 \leq \dfrac{K}{\varepsilon}$, и из непрерывности вложения $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ и (7) имеем

$$\exists\, C(\varepsilon) > 0 \; \forall t \in [\varepsilon, T] : \|\omega^m(t)\|_{L^4}^4 \leq C(\varepsilon) e^{3T}.$$

Последовательность $\{\omega^m\}$ ограничена в $L^\infty(\varepsilon,T;L^4(\Omega))$. Используя компактное вложение $H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ и лемму о компактности для тройки пространств

$$L^2(\varepsilon,T;H_0^1(\Omega)) \subset L^2(\varepsilon,T;L^4(\Omega)) \subset L^{\frac{4}{3}}(\varepsilon,T;H^{-1}(\Omega)),$$

убеждаемся, что по подпоследовательности $\omega^m(t) \to \omega(t)$ в $L^4(\Omega)$ для п. в. $t \in (\varepsilon,T)$ и слабо для любого $t \in [\varepsilon,T]$. Переходя к границе при $m \to \infty$ в (7), в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем выполнение (7) для функции $\omega(\cdot)$ при любом $t \geq s$ для п. в. $s > 0$, а также вложение $\omega \in C((0,T];L_\omega^4(\Omega))$ [1] (лемма 3.3).

Из неравенства Гельдера получаем

$$|c(u,\omega,\eta)| \leq d\|u\|_1 \, \|\omega\|_{L^4} \|\,\eta\|_1.$$

Тогда $C(u,\omega) \in L^2(\varepsilon,T;H^{-1}(\Omega))$, следовательно, $\dfrac{d\omega}{dt} \in L^2(\varepsilon,T;H^{-1}(\Omega))$ и из леммы 3.2 [1] в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что ω принадлежит $C((0,T];L^2(\Omega))$. Отсюда имеем выполнение (5), (6) для $t \geq s > 0$.

Если же ω_0 принадлежит $L^4(\Omega)$, то последовательность $\{\omega_0^m\}$ можно выбрать так, что $\omega_0^m \to \omega_0$ в $L^4(\Omega)$. Тогда неравенство (7) будет выполняться и для $s = 0$, откуда в силу $\omega \in C([0,T];L_w^2(\Omega))$ непосредственно следует вложение $\omega \in C([0,T];L_\omega^4(\Omega))$.

Теорема доказана.

Доказанная теорема, в частности, позволяет говорить о разрешимости задачи (1), (2) на $[0, +\infty)$. Теперь для каждого $R \geq R_0 = \dfrac{\|g\|}{\lambda_1}$ возьмем

$$\alpha(R) = \sqrt{\frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}\left(|\xi|^2 R^2 + \|f\|^2\right)}, \quad B_R = \{\{u, \omega\} \in X \mid \|u\| \leq \alpha(R), \|\omega\| \leq R\}.$$

Поскольку B_R — ограниченное, замкнутое, выпуклое подмножество гильбертового пространства X, можно рассматривать B_R как полное метрическое пространство с метрикой ρ, сходимость по которой эквивалентна сходимости в $H_w \times L^2(\Omega)$.

Определим класс $\mathcal{K}$ решений задачи (1), (2), удовлетворяющих неравенству (3) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$, неравенству (5) при $t \geq s > 0$, неравенству (7) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$.

Аналогично теореме 1 можно показать, что для любых $T > 0$ и $\{u, \omega\} \in \mathcal{K}$ справедливо $\omega \in C((0, T]; L^2(\Omega)) \cap C((0, T]; L^4_\omega(\Omega))$. Далее в теореме 2 будет доказано, что любое $\varphi \in \mathcal{K}$ удовлетворяет неравенству (4) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$ и неравенству (6) при $t \geq s > 0$.

Обозначим

$$G_R : [0, +\infty) \times B_R \mapsto P(B_R),$$

$$G_R(t, \varphi_0) = \{\varphi(t) \mid \varphi(\cdot) \in \mathcal{K}, \varphi(0) = \varphi_0, \varphi(t) \in B_R \ \forall t \geq 0\}. \tag{10}$$

В силу теоремы 1 для любого $\varphi_0 \in B_R$ $G_R(t, \varphi_0) \neq \varnothing$, так как взяв то решение, которое гарантирует теорема 1, имеем для него выполнение (4), (6) при $t \geq s$, для п. в. s и для $s = 0$, из чего следует, что $\varphi(t) \in B_R \ \forall t \geq 0$.

Теорема 2. *Пусть $f \in H$, $g \in L^4(\Omega)$. Тогда формула (10) определяет m-полупоток, который имеет в фазовом пространстве B_R глобальный аттрактор Θ, не зависящий от параметра $R > R_0$ и являющийся ограниченным множеством в $H \times L^4(\Omega)$.*

Доказательство. То, что G_R — m-полупоток, доказывается аналогично лемме 19 [6]. Проверим выполнение условий леммы 1. Условие 1 выполняется в силу вложения

$$G_R(t, B_R) \subset B_R \ \forall t \geq 0.$$

Пусть $\xi_n \in G_R(t, \eta_n)$, где $\eta_n \in B_R$, $\eta_n \to \eta$ слабо в X. Тогда $\xi_n = \varphi^n(t) = \{u^n(t), \omega^n(t)\}$, последовательность $\{\varphi^n\}$ в силу (3), (5) и вложения $\varphi^n(t) \in B_R \ \forall t \geq 0$ ограничена в W_T для $T > t$. Тогда последовательность $\left\{\dfrac{d\varphi^n}{dt}\right\}$ ограничена в $L^{\frac{4}{3}}(0, T; V^*) \times L^{\frac{4}{3}}(0, T; H_0^1(\Omega))$ и из леммы о компактности имеем, что по подпоследовательности $\varphi^n \to \varphi$ в смысле (8), где $\varphi(\cdot) = \{u(\cdot), \omega(\cdot)\}$ — решение задачи (1), (2) на $(0, T)$, $\varphi(0) = \eta$, в частности $\varphi^n(t) \to \varphi(t)$ слабо в X для любого $t \geq 0$ и сильно для п. в. $t > 0$. Как и при доказательстве теоремы 1, имеем, что $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет (3), (5) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$. В частности, из (5) в силу неравенства $\|\omega^n(t)\| \leq R \ \forall t \geq 0$ получаем для ω^n оценку (9). Тогда функция ω удовлетворяет (7) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$ и $\omega \in C((0, T]; L^2(\Omega) \cap C((0, T]; L^4_\omega(\Omega)))$. Таким образом, $\varphi \in \mathcal{K}$ и $\xi_n \to \varphi(t) \in G_R(t, \eta)$ в X. В частности, выполнен пункт 2.

Для выполнения пункта 3 леммы 1 осталось показать, что по крайней мере по подпоследовательности для $t > 0$ $\omega^n(t) \to \omega(t)$ в $L^2(\Omega)$. В силу (5) при $t \geq s \geq \varepsilon > 0$

$$J_n(t) := \frac{1}{2}\,\|\omega^n(t)\|^2 - \int\limits_0^t (g, \omega^n(p))\,dp \leq J_n(s),$$
$$J(t) := \frac{1}{2}\,\|\omega(t)\|^2 - \int\limits_0^t (g, \omega(p))\,dp \leq J(s). \tag{11}$$

Таким образом, на $[\varepsilon, T]$ функции $J_n(\cdot)$, $J(\cdot)$ непрерывны, монотонно невозрастающие и $J_n(t) \to J(t)$ п. в. Тогда [8] (лемма 3.12) $J_n(t) \to J(t)$ $\forall t \in (\varepsilon, T)$, и поскольку $\omega^n \to \omega$ в $L^2(0,T; L^2(\Omega))$, существует $\lim_{n\to\infty} \|\omega^n(t)\| = \|\omega(t)\|$, что вместе со слабой сходимостью гарантирует $\omega^n(t) \to \omega(t)$ в $L^2(\Omega)$. Тогда в силу леммы 1 m-полупоток G имеет глобальный аттрактор Θ_R в B_R. Покажем, что он не зависит от параметра R. Пусть $\varphi(\cdot) = \{u(\cdot), \omega(\cdot)\}$ — решение задачи (1), (2), которое удовлетворяет (3), (5), $\varphi(t) \in B_R$ $\forall t \geq 0$. Докажем, что φ удовлетворяет (4), (6). Из (5) имеем, что при $t \geq s > 0$

$$\|\omega(t)\|^2 + \lambda_1 \int\limits_s^t \|\omega(p)\|^2\,dp \leq \|\omega(s)\|^2 + \frac{1}{\lambda_1}\|g\|^2(t-s). \tag{12}$$

Используем следующий результат.

Лемма 2 [5]. *Для функции $\varkappa \in L^1_{\mathrm{loc}}(0,+\infty)$ следующие условия эквивалентны:*
1) $\varkappa(t) \leq \varkappa(s)$ для п. в. $t \geq s$,
2) $\varkappa' \leq 0$ в $D'(0,+\infty)$.

Из (12) имеем, что непрерывная на $(0,+\infty)$ функция $l(t) = \|\omega(t)\|^2 - \dfrac{1}{\lambda_1^2}\,\|g\|^2$ $\forall t \geq s > > 0$ удовлетворяет неравенству

$$l(t) + \lambda_1 \int\limits_0^t l(p)\,dp \leq l(s) + \lambda_1 \int\limits_0^s l(p)\,dp.$$

Отсюда согласно лемме 2 $l' + \lambda_1 l \leq 0$ в $D'(0,+\infty)$, а следовательно [8] (лемма 5.17), $(le^{\lambda_1 t})' \leq 0$ в $D'(0,+\infty)$.

Тогда из леммы 2 для п. в. $t \geq s$

$$l(t)e^{\lambda_1 t} \leq l(s)e^{\lambda_1 s}. \tag{13}$$

Из (13) и непрерывности l получаем (6).

Аналогично из (3) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$ имеем

$$\|u(t)\|^2 + \nu\lambda_1 \int\limits_s^t \|u(p)\|^2\,dp \leq \|u(s)\|^2 + \frac{2|\xi|^2}{\nu\lambda_1}\int\limits_s^t \|\omega(p)\|^2\,dp + \frac{2}{\nu\lambda_1}\,\|f\|^2(t-s). \tag{14}$$

Из (14) полунепрерывная снизу на $(0, +\infty)$ функция

$$m(t) = \|u(t)\|^2 - \frac{2}{\nu^2\lambda_1^2}\,\|f\|^2$$

удовлетворяет при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$ неравенству

$$m(t) + \nu\lambda_1 \int\limits_0^t \|m(p)\|^2\,dp - \frac{2|\xi|^2}{\nu\lambda_1} \int\limits_s^t \|\omega(p)\|^2\,dp \leq m(s) + \nu\lambda_1 \int\limits_0^s \|m(p)\|^2\,dp.$$

Тогда в силу леммы 2

$$m' + \nu\lambda_1 m \leq \frac{2|\xi|^2}{\nu\lambda_1}\,\|\omega\|^2 \quad \text{в} \quad D'(0, +\infty),$$

а следовательно [8] (лемма 5.17),

$$\left(m e^{\nu\lambda_1 t} - \int\limits_0^t \frac{2|\xi|^2}{\nu\lambda_1}\,e^{\nu\lambda_1 p}\|\omega(p)\|^2\,dp\right)' \leq 0 \quad \text{в} \quad D'(0, +\infty).$$

Из леммы 2 для п. в $t \geq s$ $\Psi(u, \omega)(t) \leq \Psi(u, \omega)(s)$, и в силу полунепрерывности снизу Ψ имеем (4). Из оценок (4), (6) выводим

$$\forall\varepsilon > 0\,\forall R > R_0\,\exists T = T(R, \varepsilon)\,\forall t \geq T : G_R(t, B_R) \subset B_{R_0+\varepsilon}. \tag{15}$$

Тогда из вложения $\Theta_R \subset G_R(t, B_R)$ имеем, что для любого $R > R_0$ $\Theta_R \subset B_{R_0}$. Рассмотрим $\xi = \varphi(t) = \{u(t), \omega(t)\} \in G_R(t, B_{R_0})$. В силу (15) $\forall\varepsilon > 0\,\forall R > R_0\,\exists T = T(R, \varepsilon)\,\forall t \geq T$ $\forall r \geq \dfrac{t}{2} : \|u(r)\| \leq \alpha(R_0 + \varepsilon)$, $\|\omega(r)\| \leq R_0 + \varepsilon$. Тогда

$$\forall t \geq T : \xi \in G_{R_0+\varepsilon}\left(\frac{t}{2}, \varphi\left(\frac{t}{2}\right)\right) \subset G_{R_0+\varepsilon}\left(\frac{t}{2}, B_{R_0+\varepsilon}\right).$$

Поскольку для любого $t \geq 0$ $\Theta_R \subset G_R(t, \Theta_R) \subset G_R(t, B_{R_0})$, то $\Theta_R \subset G_{R_0+\varepsilon}\left(\dfrac{t}{2}, B_{R_0+\varepsilon}\right)$ и, таким образом,

$$\Theta_R \subset \Theta_{R_0+\varepsilon} \quad \forall\varepsilon > 0. \tag{16}$$

Так как для $R_0 < R_1 < R_2$ $\Theta_{R_1} \subset \Theta_{R_2}$, из (16) окончательно имеем

$$\forall R > R_0 : \Theta_R = \Theta := \bigcap_{\varepsilon > 0} \Theta_{R_0+\varepsilon}.$$

Докажем ограниченность Θ в $H \times L^4(\Omega)$. Поскольку для любого $R > R_0$ $\Theta \subset G_R(1, \Theta) \subset$ $\subset G_R(1, B_R)$, достаточно показать ограниченность в $H \times L^4(\Omega)$ множества $G_R(1, B_R)$.

Пусть $\xi \in G_R(1, B_R)$. Тогда $\xi = \varphi(1) = \{u(1), \omega(1)\}$, $\varphi \in \mathcal{K}$, $\varphi(t) \in B_R \ \forall t \geq 0$ и в силу (5) ω удовлетворяет оценке

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \|\omega(p)\|_1^2 dp \leq \frac{1}{2\lambda_1}\|g\|^2 + R^2.$$

Далее из (7) имеем

$$\|\omega(1)\|_{L^4}^4 \leq C^2 \left(\frac{1}{\lambda_1}\|g\|^2 + 2R^2\right)^2 e^3 + \frac{1}{3}\|g\|_{l^4}^4 e^3,$$

где $C > 0$ — константа из неравенства $\|\omega\|_{L^4} \leq C\|\omega\|_1$. Из этой оценки следует искомая ограниченность Θ в $H \times L^4(\Omega)$.

Теорема доказана.

Теперь покажем, что полученный в теореме 2 аттрактор является связным множеством в $H_w \times L^2(\Omega)$. Для этого рассмотрим задачу [11–13]

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \triangle u + F_N(\|u\|_1)(u\nabla)u + \xi\omega = f - \nabla p, \\ &\operatorname{div} u = 0, \\ &u|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \omega}{\partial t} - \triangle \omega + (u\nabla)\omega = g, \\ &\omega|_{\partial\Omega} = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

где $F_N(r) = \min\left\{1, \dfrac{N}{r}\right\}$. Слабая разрешимость (17), (18) определяется аналогично (1), (2) с заменой формы $b(u, v, z)$ на форму $b_N(u, v, z) = F_N(\|v\|_1)b(u, v, z) = \langle B_N(u, v), z\rangle$, где элемент $B_N(u, v) \in V^*$ удовлетворяет оценке [13]

$$\|B_N(u, v)\|_{V^*} \leq CN\|u\|_1. \tag{19}$$

Благодаря этому аналогично [13] (теорема 7) устанавливается глобальная разрешимость (17), (18) для $f \in H$, $g \in L^2(\Omega)$ и для любых $\varphi_0 = \{u_0, \omega_0\} \in X := H \times L^2(\Omega)$, причем в силу (19) для любого решения $\varphi = \{u, \omega\}$ задачи (17), (18) имеем $u \in C([0, T]; H)$. Если же $g \in L^4(\Omega)$, то для задачи (17), (18) справедлива теорема 1, причем энергетические неравенства (3)–(6) выполнены при $t \geq s \geq 0$ с константами, не зависящими от параметра N.

Лемма 3. *Для $f \in H$, $g \in L^4(\Omega)$ и для любых $\varphi_0 = \{u_0, \omega_0\} \in V \times H_0^1(\Omega)$ задача (17), (18) имеет единственное слабое решение $\varphi = \{u, \omega\}$ с $\varphi(0) = \varphi_0$, причем*

$$u \in C([0, T]; V) \cap L^2(0, T; D(A_1)), \quad \omega \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; D(A_2)).$$

Доказательство. Фиксируя $\omega \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ в правой части (17), из [13] (теорема 7) имеем $u \in C([0,T];V) \cap L^2(0,T;D(A_1))$ и при $t \geq s \geq 0$ выполнена оценка

$$\|u(t)\|_1^2 + \nu \int_s^t \|A_1 u\|^2\, dp \leq \|u(s)\|_1^2 + \frac{4}{\nu}\|f\|^2(t-s) + \frac{4|\xi|}{\nu}\int_s^t \|\omega\|^2\, dp + C_N \int_s^t \|u\|_1^2\, dp. \quad (20)$$

Из неравенства

$$|c(u,\omega,\eta)| \leq d\|u\|_1\|\omega\|_1\|\eta\|_1$$

выводим $C(u,\omega) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, откуда $\dfrac{d\omega}{dt} \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $\omega \in C([0,T];L^2(\Omega))$. Поскольку при фиксированном $u \in L^2(0,T;V)$ задача (18) имеет единственное решение, соответствующее начальной функции ω_0, с помощью галеркинских аппроксимаций получаем, что $\omega \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,T;D(A_2))$ и при $t \geq s \geq 0$ выполнена оценка

$$\|\omega(t)\|_1^2 + \int_s^t \|A_2\omega\|^2\, dp \leq \|\omega(s)\|_1^2 + C\|g\|^2(t-s) + C\int_s^t \|u\|_1^4\|\omega\|_1^2\, dp. \quad (21)$$

Докажем единственность. Пусть $\varphi_1 = \{u_1,\omega_1\}$, $\varphi_2 = \{u_2,\omega_2\}$ — решения задачи (17), (18) такие, что $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0$. Тогда для $u = u_1 - u_2$, $\omega = \omega_1 - \omega_2$ имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \nu\|u\|_1^2 - F_N(\|u_1\|_1) b(u,u,u_1) +$$
$$+ (F_N(\|u_1\|_1 - F_N(\|u_2\|_1)) b(u_2,u_2,u) + (\xi\omega,u) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 + \|\omega\|_1^2 - c(u,\omega,\omega_1) = 0. \quad (23)$$

Используя неравенства [13]

$$|c(u,\omega,\omega_1)| \leq d_1\|u\|_1\|\omega_1\|_1^{\frac{1}{2}}\|A_2\omega_1\|^{\frac{1}{2}}\|\omega\| \leq \frac{\nu}{4}\|u\|_1^2 + C(\|\omega_1\|_1^2 + \|A_2\omega_1\|^2)\|\omega\|^2, \quad (24)$$

$$F_N(\|u_1\|_1)|b(u,u,u_1)| \leq |b(u,u,u_1)| \leq d_2\|u\|\|u\|_1\|A_1u_1\| \leq \frac{\nu}{4}\|u\|_1^2 + C\|A_1u_1\|^2\|u\|^2, \quad (25)$$

$$|F_N(\|u_1\|_1) - F_N(\|u_2\|_1)||b(u_2,u_2,u)| \leq d_3\frac{\|u_1-u_2\|_1}{\|u_2\|_1}\|u_2\|_1^{\frac{3}{2}}\|A_1u_2\|^{\frac{1}{2}}\|u\| \leq$$
$$\leq \frac{\nu}{4}\|u\|_1^2 + C(\|u_2\|_1^2 + \|A_1u_2\|^2)\|u\|^2, \quad (26)$$

из (22), (23) получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|\omega\|^2\right)+\delta(\|u\|_1^2+\|\omega\|_1^2)\leq$$

$$\leq C(\|\omega_1\|_1^2+\|u_2\|_1^2+\|A_2\omega_1\|^2+\|A_1u_1\|^2+\|A_1u_2\|^2)(\|u\|^2+\|\omega\|^2). \quad (27)$$

Неравенство (27) вместе с (20), (21) в силу леммы Гронуолла гарантирует равенства $u = 0, \omega = 0$.

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть $f \in H$, $g \in L^4(\Omega)$. Тогда глобальный аттрактор Θ, существование которого гарантируется теоремой 2, является связным множеством в $H_w \times L^2(\Omega)$.*

Доказательство. В силу теоремы 2 для некоторого $R > R_0$

$$\Theta \subset B_1 := \{\{u,\omega\} \in X \mid \|u\| \leq \alpha(R),\ \|\omega\| \leq R,\ \|\omega\|_{L^4} \leq R\}$$

и B_1 — связное множество в пространстве B_R. Тогда в силу леммы 1 достаточно показать связность в пространстве B_R множества $G_R(t,\varphi_0)$ $\forall t > 0$ $\forall \varphi_0 \in B_1$. Пусть это не так. Поскольку из доказательства теоремы 2 следует, что $G_R(t,\varphi_0)$ — компакт в B_R, если при некоторых $\tau > 0$, $\varphi_0 \in B_1$ множество $G_R(\tau,\varphi_0)$ не является связным, то существуют компакты Γ_1, Γ_2 в B_R, их окрестности U_1, U_2 и решения $\varphi_i(\tau) \in G_R(\tau,\varphi_0)$, $i = 1,2$, такие, что $G_R(\tau,\varphi_0) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $\varphi_i(\tau) \in U_i$, $i = 1,2$. Для $\gamma \geq 0$, $N \geq 1$ положим

$$\psi_i^N(t,\gamma) = \begin{cases} \varphi_i(t), & \text{если} \quad t \in [0,\gamma], \\ \{\varphi_i^N(t)\}, & \text{если} \quad t \geq \gamma, \end{cases} \quad (28)$$

где φ_i^N — решение задачи (17), (18) с начальными данными $\varphi_i^N(\gamma) = \varphi_i(\gamma) \in H \times L^4(\Omega)$, которое удовлетворяет (3) – (6) при $t \geq s \geq \gamma$ и (7) при $t \geq s$ для п. в. $s > \gamma$ и для $s = \gamma$. Тогда легко показать, что каждая из функций $\psi_i^N(\cdot,\gamma)$ удовлетворяет (3) – (7) на $[0,+\infty)$ в том же смысле, что и φ_i, и при этом для любого $t \geq 0$ $\psi_i^N(t,\gamma) \subset B_R$. Покажем, что для каждого $i = 1,2$ отображение

$$[0,+\infty) \ni \gamma \mapsto \psi_i^N(t,\gamma) \subset B_R \quad (29)$$

полунепрерывно сверху в $H_w \times L^2(\Omega)$ и связнозначно в $H \times L^2(\Omega)$ (а тогда и в $H_w \times L^2(\Omega)$). Для упрощения записи опустим индекс i. Пусть $\gamma \searrow \gamma_0$. Если $t \leq \gamma_0 < \gamma$, то $\psi^N(t,\gamma) = \varphi(t) = \psi^N(t,\gamma_0)$. Если $t > \gamma > \gamma_0$, то, рассуждая от противного, убеждаемся в существовании $\varepsilon > 0$, $\gamma_j \searrow \gamma_0$, $\xi_j = \{u_j(t),\omega_j(t)\} \in \psi^N(t,\gamma_j)$ таких, что $\operatorname{dist}_{B_R}(\xi_j,\psi^N(t,\gamma_0)) \geq \varepsilon$. Положим $\overline{u}_j(t) = u_j(t+\gamma_j-\gamma_0)$, $\overline{\omega}_j(t) = \omega_j(t+\gamma_j-\gamma_0)$, $\overline{u}_j(\gamma_0) = u(\gamma_j)$, $\overline{\omega}_j(\gamma_0) = \omega(\gamma_j)$. Рассмотрим последовательность $\overline{\varphi}_j = \{\overline{u}_j,\overline{\omega}_j\}$ решений задачи (17), (18) при $t \geq \gamma_0$, $\overline{\varphi}_j(\gamma_0) = \varphi(\gamma_j) \to \varphi(\gamma_0)$ слабо в X в силу вложения $\varphi \in C([0,T];X_w)$. Поскольку $\{\overline{\varphi}_j\}$ удовлетворяют (3) – (6) при $t \geq s \geq \gamma_0$ и (7) при $t \geq s$ для п. в. $s > \gamma_0$ и для $s = \gamma_0$, рассуждая, как и при доказательстве теоремы 2, приходим к тому, что по подпоследовательности $\overline{\varphi}_j \to \overline{\varphi}$ в смысле (8), где $\overline{\varphi} = \{\overline{u},\overline{\omega}\}$ — решение задачи (17), (18) при $t \geq \gamma_0$, $\overline{\varphi}(\gamma_0) = \varphi(\gamma_0) \in H \times L^4(\Omega)$, которое удовлетворяет (3) – (7) при $t \geq s$ для п. в. $s > \gamma_0$. При этом $\overline{\omega} \in C((\gamma_0,T];L^2(\Omega))$, $\overline{\omega}_j(t) \to \overline{\omega}(t)$ в $L^2(\Omega)$ $\forall\, t \in (\gamma_0,T]$, а в силу (19)

$\overline{u} \in C([\gamma_0, T]; H)$. Таким образом, $\overline{\varphi}$ удовлетворяет (3), (4) при $t \geq s \geq \gamma_0$ и (5), (6) при $t \geq s > \gamma_0$.

Далее, при фиксированном $\overline{u} \in L^2(\gamma_0, T; V)$ задача (18) имеет единственное решение, соответствующее начальным данным $\gamma_0 \geq 0, \omega(\gamma_0) \in L^4(\Omega)$. Тогда с помощью галеркинских аппроксимаций ω^m для задачи (18) при фиксированном $\overline{u} \in L^2(\gamma_0, T; V)$ и с начальными данными $\omega^m(\gamma_0) \to \omega(\gamma_0)$ в $L^2(\Omega)$ легко устанавливается, что $\overline{\omega}$ удовлетворяет (5), (6) при $t \geq s \geq \gamma_0$. Теперь пусть $\overline{u}^m \in C^1([\gamma_0, T]; V)$, $\overline{u}^m \to \overline{u}$ в $L^2(\gamma_0, T; V)$ и рассмотрим для каждого $m \geq 1$ задачу

$$\begin{gathered} \frac{d\omega^m}{dt} + A_2\omega^m + C(\overline{u}^m, \omega^m) = g, \quad t \in (\gamma_0, T), \\ \omega^m(\gamma_0) = \omega_0^m \in H_0^1(\Omega), \quad \omega_0^m \to \omega(\gamma_0) \quad \text{в} \quad L^4(\Omega). \end{gathered} \tag{30}$$

Тогда из [6] (лемма 9) при $t \geq \gamma_0$ выполняется

$$\|\omega^m(t)\|_{L^4}^4 \leq \|\omega^m(\gamma_0)\|_{L^4}^4 e^{3(t-\gamma_0)} + \frac{1}{3}\|g\|_{L^4}^4 (e^{3(t-\gamma_0)} - 1),$$

и переходя к пределу, убеждаемся, что $\overline{\omega}$ удовлетворяет (7) и для $s = \gamma_0$. Таким образом,

$$\{\overline{u}_j(t), \overline{\omega}_j(t)\} \to \{\overline{u}(t), \overline{\omega}(t)\} \in \psi^N(t, \gamma_0) \quad \text{в} \quad B_R.$$

Получили противоречие. Аналогично при $\gamma \nearrow \gamma_0$. Теперь докажем для каждого $\tau > 0$ связность в $H \times L^2(\Omega)$ множества $G_R^N(\tau, \varphi_0)$ — пучка решений задачи (17), (18) с начальными данными $\varphi_0 \in B_R \cap (H \times L^4(\Omega))$, которые удовлетворяют (3)–(6) при $t \geq s \geq 0$ и (7) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$ и для $s = 0$. Рассуждая от противного, получаем существование $\varphi_i(\tau) \in G_R^N(\tau, \varphi_0)$, $i = 1, 2$, таких, что $\varphi_i(\tau) \in V_i$, где $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $G_R^N(\tau, \varphi_0) \subset V_1 \cup V_2$. Выберем $\varepsilon_k \to 0+$ так, что $\varphi_i(\varepsilon_k) \in V \times H_0^1(\Omega)$, и для $\rho \in [0, 1]$ обозначим через $\varphi_k(\cdot, \rho) = \{u_k(\cdot, \rho), \omega_k(\cdot, \rho)\}$ единственное в силу леммы 3 решение задачи (17), (18) с начальными данными $\varphi_0^k = \rho\varphi_1(\varepsilon_k) + (1 - \rho)\varphi_2(\varepsilon_k)$. Тогда $\varphi_k(t, 0) = \varphi_2(t + \varepsilon_k)$, $\varphi_k(t, 1) = \varphi_1(t + \varepsilon_k)$, т. е. $\varphi_k(\tau - \varepsilon_k, 0) \in V_2$, $\varphi_k(\tau - \varepsilon_k, 1) \in V_1$. Применяя неравенство (27), выводим, что отображение

$$[0, 1] \ni \rho \mapsto \varphi_k(\cdot, \rho) \in C([0, T]; H \times L^2(\Omega))$$

непрерывно. Тогда существует $\rho_k \in [0, 1]$ такое, что $\varphi_k(\tau - \varepsilon_k, \rho_k) \notin V_1 \cup V_2$. Поскольку $\varphi_0^k \to \varphi_0$ слабо в X, аналогично предыдущим рассуждениям (с $\gamma_0 = 0$) получаем, что $\varphi_k(\cdot, \rho_k) \to \varphi(\cdot)$ в смысле (8), где $\varphi(\tau) \in G_R^N(\tau, \varphi_0)$. Используя функции J_k, J из (11), аналогично [11] (лемма 3.1) можно показать, что для любого $\delta > 0$ $\varphi_k(\cdot, \rho_k) \to \varphi(\cdot)$ в $C([\delta, T]; H \times L^2(\Omega))$. Тогда $\varphi_k(\tau - \varepsilon_k, \rho_k) \to \varphi(\tau)$ в $H \times L^2(\Omega)$. Получили противоречие.

Далее аналогично [11, с. 1499] устанавливается, что для одного из индексов $i = 1$ либо $i = 2$ (и в дальнейшем индекс i будем опускать) существуют последовательность $\gamma_N \to \gamma_0$ и функции из (28)

$$\psi^N(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если} \quad t \in [0, \gamma_N], \\ \varphi^N(t), & \text{если} \quad t \geq \gamma_N, \end{cases} \tag{31}$$

такие, что $\psi^N(\tau) \notin U_1 \cup U_2$.

Воспользовавшись для последовательности $\{\psi^N = \{u^N, \omega^N\}\}$ леммой о компактности, получим, что при $N \to \infty$ по подпоследовательности $\psi^N \to \psi = \{u, \omega\}$ в смысле (8). Поскольку $\omega^N \to \omega$ слабо в $L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$, аналогично [11, с. 1501, 1502] имеем, что u — решение задачи (1) с правой частью $f - \xi\omega$, $u(0) = u_0$, $\psi^N(\tau) \to \psi(\tau)$ слабо в H. При этом ψ удовлетворяет (3) – (6) при $t \geq s$ для п. в. $s > 0$ и для $s = 0$. Поскольку для функции $\eta \in H_0^1(\Omega)$ имеем $c(u^N, \omega^N, \eta) \to c(u, \omega, \eta)$ в $L^1(0,T)$ [6, с. 462], то $\psi = \{u, \omega\}$ — решение задачи (1), (2), $\psi(0) = \varphi_0$. Повторяя предыдущие рассуждения, выводим, что ω принадлежит $C((0,T]; L^2(\Omega))$ и $\psi \in \mathcal{K}$. Таким образом, $\psi(\tau) \in G_R(\tau, \varphi_0)$. Используя функции J_N, J из (11), получаем, что $\omega^N(\tau) \to \omega(\tau)$ в $L^2(\Omega)$, т. е. $\psi(\tau) \notin U_1 \cup U_2$, что противоречит вложению $\psi(\tau) \in G_R(\tau, \varphi_0)$.

Теорема доказана.

1. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York: Springer, 1988. — 645 p.
2. *Birnir B., Svanstedt N.* Existence theory and strong attractors for the Rayleigh – Benard problem with a large aspect ratio // DCDS. — 2004. — **10**. — P. 53 – 74.
3. *Norman D. E.* Chemically reacting fluid flows: weak solutions and global attractors // J. Different. Equat. — 1999. — **152**. — P. 75 – 135.
4. *Мельник В. С.* Многозначная динамика нелинейных бесконечномерных систем. — Киев, 1994. — 60 с. — (Препринт / НАН Украины; Ин-т кибернетики, № 94-17).
5. *Ball J. M.* Continuity properties and attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations // J. Nonlinear Sci. — 1997. — **7**, № 5. — P. 475 – 502.
6. *Kapustyan O. V., Melnik V. S., Valero J.* A weak attractors and properties of solutions for the three-dimensional Bernard problem // DCDS. — 2007. — **18**. — P. 449 – 481.
7. *Kapustyan O. V., Pankov A. V., Valero J.* On global attractors of multivalued semiflows generated by the 3D Benard system // Set-Valued and Variational Analysis. — 2012. — **20**, № 3. — P. 445 – 465.
8. *Kapustyan O. V., Mel'nik V. S., Valero J., Yasinsky V. V.* Global attractors of multi-valued dynamical systems and evolution equations without uniqueness. — Kyiv: Naukova Dumka, 2008. — 215 p.
9. *Chepyzhov V. V., Vishik M. I.* Attractors for equations of mathematical physics. — Providence: AMS, 2002. — 361 p.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.
11. *Kloeden P. E., Valero J.* The weak connectedness of the attainability set of weak solutions of the 3D Navier – Stokes equations // Proc. Roy. Soc. London A. — 2007. — **463**. — P. 1491 – 1508.
12. *Kloeden P. E., Valero J.* The Kneser property of the weak solutions of the three- dimensional Navier – Stokes equations // DCDS. — 2010. — **28**. — P. 161 – 179.
13. *Caraballo T., Kloeden P. E., Real J.* Unique strong solution and V-attractors of a three-dimensional system of globally modified Navier-Stokes equations // Adv. Nonlinear Stud. — 2006. — **6**. — P. 411 – 436.

Получено 20.02.12