УДК 517.9

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ РОЗРИВНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

І. Л. Нижник, А. О. Краснєєва

Ін-т математики НАН України
Україна, 01601, Київ, ул. Терещенківська, 3

We study periodic solutions of second order differential equations with discontinuous nonlinearity. For equations that have chaotic solutions, we find the value of the spatial entropy with respect to periodic solutions.

Исследуются периодические решения однородных дифференциальных уравнений второго порядка с разрывной нелинейностью. Для уравнений, имеющих хаотические решения, найдено значение пространственной энтропии относительно периодических решений.

1. Вступ. Диференціальні рівняння з розривною нелінійністю відіграють важливу роль в теорії диференціальних рівнянь [1–3], оскільки вони виникають у різних розділах фізики, механіки, техніки [4–6]. Такі рівняння описують різні типи нелінійних коливань. У зв'язку з цим важливим і актуальним є дослідження коливних та, зокрема, періодичних розв'язків таких рівнянь, їх ефективна побудова.

У даній роботі досліджуються періодичні розв'язки диференціального рівняння другого порядку із розривною нелінійністю

$$y'' + Ay' + By = C\operatorname{sign} y, \tag{1}$$

де A, B, C — сталі, $C \neq 0$.

Вивчення рівняння (1) потребує насамперед уточнення поняття розв'язку. Найбільш загальне означення розв'язків диференціальних рівнянь із розривною нелінійністю пов'язане з інтерпретацією цього рівняння як диференціального включення [3]. Рівнянню (1) відповідає диференціальне включення, якщо у правій частині рівняння (1) вважати $\operatorname{sign} 0 = [-1, 1]$. Проте, оскільки рівняння (1) однорідне (функція, тотожно рівна нулю, є його розв'язком), для нього можна навести еквівалентне, більш просте означення розв'язку, аналогічне введеному в [9].

Означення 1. *Під розв'язком рівняння (1) будемо розуміти неперервно диференційовну функцію $y(x)$, яка поза своїми нулями є класичним розв'язком рівняння (1).*

2. Класифікація рівнянь. Виконавши у рівнянні (1) заміну $x \to \alpha x$, $y \to ky$, можна обмежитись розглядом таких випадків:

$$y'' = \operatorname{sign} y, \tag{2}$$

$$y'' = -\operatorname{sign} y \tag{3}$$

при умові $A = 0$, $B = 0$,

$$y^{''} - y^{'} = \operatorname{sign} y, \tag{4}$$

$$y^{''} - y^{'} = -\operatorname{sign} y \tag{5}$$

при умові $A \neq 0$, $B = 0$,

$$y^{''} + y = \operatorname{sign} y, \tag{6}$$

$$y^{''} + y = -\operatorname{sign} y, \tag{7}$$

$$y^{''} - y = \operatorname{sign} y, \tag{8}$$

$$y^{''} - y = -\operatorname{sign} y \tag{9}$$

при умові $A = 0$,

$$y^{''} - 2y^{'} + (1 - \beta^2)y = \operatorname{sign} y, \quad \beta \geq 0, \quad \beta \neq 1, \tag{10}$$

$$y^{''} - 2y^{'} + (1 - \beta^2)y = -\operatorname{sign} y, \quad \beta \geq 0, \quad \beta \neq 1, \tag{11}$$

$$y^{''} - 2y^{'} + (1 + \beta^2)y = \operatorname{sign} y, \quad \beta > 0, \tag{12}$$

$$y^{''} - 2y^{'} + (1 + \beta^2)y = -\operatorname{sign} y, \quad \beta > 0, \tag{13}$$

при умові $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Легко бачити, що якщо $y(x)$ — розв'язок рівняння (1), то $\pm y(x + a)$, де a — стала, є розв'язками рівняння (1). Ці розв'язки називатимемо ***еквівалентними.***

3. Коливні розв'язки.

Теорема 1. *Рівняння (2), (4), (8), (10) не мають коливних розв'язків, тобто розв'язків не менш ніж з двома нулями, між якими ці розв'язки відмінні від тотожного нуля.*

Доведення. Нехай $y(x)$ — коливний розв'язок одного із рівнянь (2), (4), (8), (10). Оскільки функція $y(x)$ є неперервною і між своїми двома нулями відмінною від тотожного нуля, то існує скінченний інтервал (α, β), на якому $y(x)$ набуває значень одного знака, а на кінцях інтервалу дорівнює нулю $y(\alpha) = y(\beta) = 0$. З огляду на те, що у розв'язків рівнянь (1) можна міняти знак і робити зсув по x, не порушуючи загальності можна вважати, що інтервал $(\alpha, \beta) = (0, \varepsilon)$ і розв'язок $y(x) > 0$ при $x \in (0, \varepsilon)$, а $y(0) = y(\varepsilon) = 0$.

Для рівняння (2) такі розв'язки мають вигляд

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1 x, \quad C_1 \geq 0,$$

і є додатними на півосі $(0, \infty)$.

Для рівняння (4) такі розв'язки мають вигляд

$$y(x) = -x + C_1(\exp x - 1), \quad C_1 \geq 1,$$

і є додатними на півосі $(0,\infty)$.

Для рівняння (8) такі розв'язки мають вигляд

$$y(x) = -1 + \cosh x + C_1 \sinh x, \quad C_1 \geq 0,$$

і є додатними на півосі $(0,\infty)$.

Для рівняння (10) такі розв'язки мають вигляд

$$y(x) = \begin{cases} 1 - \exp x + C_1 x \exp x, & C_1 \geq 1, \quad \beta = 0, \\ \dfrac{1}{1-\beta^2}\,(1 - \exp x \cosh(\beta x) + C_2 \exp(x) \sinh(\beta x)), & C_2 \geq \dfrac{1}{\beta}, \quad \beta < 1, \\ \dfrac{1}{\beta^2-1}\Big(-1 + \exp((1-\beta)x) + \\ \qquad + C_3(\exp((1+\beta)x) - \exp((1-\beta)x))\Big), & C_3 \geq \dfrac{\beta-1}{2\beta}, \quad \beta > 1, \end{cases}$$

і є додатними на півосі $(0,\infty)$.

Тому $y(\varepsilon) > 0$, що суперечить припущенню існування коливних розв'язків.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Рівняння (5), (11), (12), (13) мають коливні розв'язки, проте не мають періодичних розв'язків.*

Доведення. Нехай $y(x)$ — розв'язок рівнянь (5), (11), (12), (13) такий, що $y(0) = 0$, $y(l) = 0$ і $y(x) > 0$ при $0 < x < l$.

Для рівняння (5) такий розв'язок має вигляд

$$y(x) = x + \frac{l}{e^l - 1}\,(1 - e^x). \tag{14}$$

Для рівняння (11) розв'язок має вигляд

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta^2}\Bigg(-1 + \exp((1+\beta)x) + \\ \qquad + \dfrac{\exp(-l) - \exp(\beta l)}{2\sinh(\beta l)}(\exp((1+\beta)x) - \exp((1-\beta)x))\Bigg), & 0 < \beta < 1, \\ -1 + \exp x + \dfrac{\exp(-l) - 1}{l}\, x \exp x, & \beta = 0, \\ \dfrac{1}{\beta^2-1}\Bigg(1 - \exp((1+\beta)x) + \\ \qquad + \dfrac{\exp(\beta l) - \exp(-l)}{2\sinh(\beta l)}(\exp((1+\beta)x) - \exp((1-\beta)x))\Bigg), & \beta > 1. \end{cases} \tag{15}$$

Для рівняння (12) розв'язок має вигляд

$$y(x) = \frac{1}{1+\beta^2}\left[1 - \exp x \cos\beta x + \frac{\cos\beta l - \exp(-l)}{\sin\beta l}\, \exp x \sin\beta x\right], \quad \pi < \beta l < 2\pi. \tag{16}$$

Для рівняння (13) розв'язок має вигляд

$$y(x) = \frac{1}{1+\beta^2}\left[-1 + \exp x \cos\beta x + \frac{\exp(-l) - \cos\beta l}{\sin\beta l}\exp x \sin\beta x\right], \quad \beta l < \pi. \tag{17}$$

Легко бачити, що $z = y^{'}(l) + y^{'}(0)$ має вигляд

$$z = 2 - l\,\frac{\cosh\frac{l}{2}}{\sinh\frac{l}{2}} \tag{18}$$

для розв'язку (14),

$$z = \frac{2}{1-\beta^2}\left(1 - \beta\frac{\sinh l}{\sinh(\beta l)}\right) \tag{19}$$

для розв'язку (15),

$$z = \frac{2}{1+\beta^2}\left(1 - \beta\frac{\sinh l}{\sin\beta l}\right), \quad 0 < \beta l < \pi, \tag{20}$$

для розв'язку (16),

$$z = \frac{2}{1+\beta^2}\left(\beta\frac{\sinh l}{\sin\beta l} - 1\right), \quad \pi < \beta l < 2\pi, \tag{21}$$

для розв'язку (17).

Формули (18) – (21) показують, що похідна на правому кінці інтервалу $(0, l)$ за модулем більша за похідну на лівому кінці. Тому при послідовному переході через інтервали знакосталості розв'язків похідна на їхніх кінцях весь час зростає. Це означає, що коливні розв'язки рівнянь (5), (11) – (13) не можуть бути періодичними.

Теорему 2 доведено.

На рис. 1 зображено коливний розв'язок $y(x) = x + \dfrac{l(1-e^x)}{e^l - 1}$, $l = 0,5$, рівняння (5) на інтервалі $[0, l]$ та його продовження.

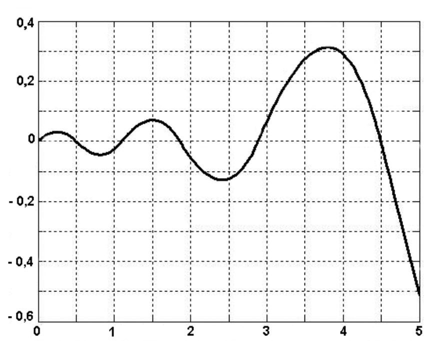

Рис. 1. Коливний розв'язок рівняння (5).

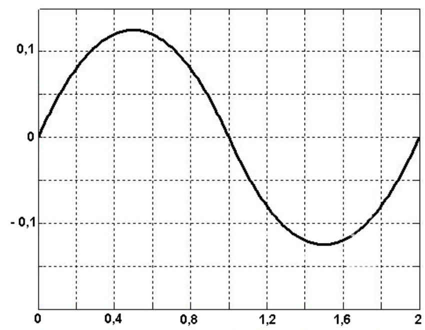

Рис. 2. Періодичний розв'язок (22) рівняння (3), $L = 2$.

4. Періодичні розв'язки.

Теорема 3. *Рівняння (3), (6), (7), (9) мають періодичні розв'язки, які можна зобразити в явному вигляді.*

Доведення. У випадку рівняння (3) розв'язок, що набуває додатних значень на інтервалі $(0, l)$, а на кінцях інтервалу дорівнює нулю, має вигляд

$$y(x) = \frac{1}{2}\,x(l - x).$$

Тому $2l$-періодичні розв'язки мають вигляд кусків парабол (рис. 2)

$$y(x) = \frac{(-1)^k}{2}\,(x - kl)((k+1)l - x), \quad kl \le x \le (k+1)l, \quad k \in Z. \tag{22}$$

Для рівняння (3) періодичні розв'язки існують **для довільного періоду** $L = 2l > 0$.

У випадку рівняння (9) маємо тривіальні розв'язки $\pm 1, 0$, періодичні розв'язки існують при довільному $L = 2l > 0$ і мають вигляд (рис. 3)

$$y(x) = 1 - \frac{\cosh\,(x - \frac{l}{2})}{\cosh\frac{l}{2}}, \quad 0 \le x \le l, \tag{23}$$

$$y(x) = -y(x - l), \quad l \le x \le 2l = L.$$

У випадку рівняння (7) маємо тривіальні розв'язки $\pm 1, 0$, нетривіальні періодичні з простими нулями розв'язки існують при $0 < l < \pi$, $L = 2l$ і мають вигляд (рис. 4)

$$y(x) = -1 + \frac{\cos(x - \frac{l}{2})}{\cos\frac{l}{2}}, \quad 0 \le x \le l, \tag{24}$$

$$y(x + l) = -y(x), \quad l \le x \le 2l = L.$$

У випадку рівняння (6) маємо тривіальні розв'язки $\pm 1, 0$, а розв'язки, що набувають додатних заначень, мають вигляд $y(x) = 1 + C_1\cos(x - \theta)$, $0 \le C_1 < 1$, і є 2π-періодичними.

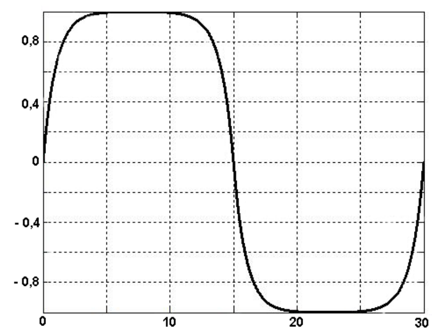

Рис. 3. Періодичний розв'язок (23) рівняння (9), $L = 30$.

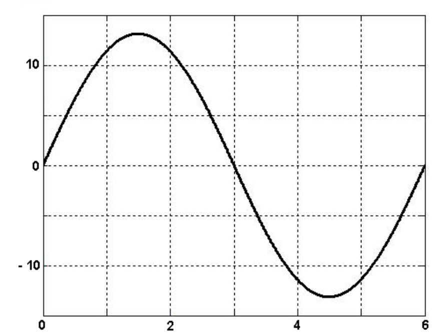

Рис. 4. Періодичний розв'язок (24) рівняння (7), $L = 6$.

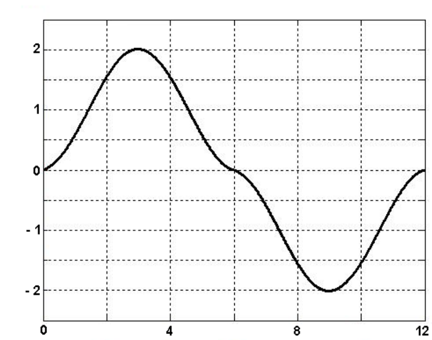

Рис. 5. Періодичний розв'язок (25) рівняння (6), $L = 12$.

Нетривіальні періодичні з простими нулями розв'язки існують при $\pi < l < 2\pi$, $L = 2l$ і мають вигляд (рис. 5)

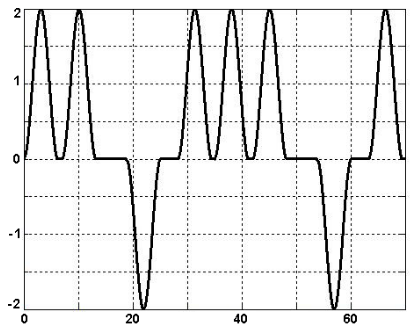

Рис. 6. Періодичний розв'язок рівняння (6), $L = 35$.

$$y(x) = 1 - \frac{\cos(x - \frac{l}{2})}{\cos \frac{l}{2}}, \quad 0 \le x \le l, \tag{25}$$

$$y(x + l) = -y(x), \quad l \le x \le 2l = L.$$

Розв'язок $y(x) = 1 - \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$, разом з його похідною дорівнюють нулю на кінцях інтервалу. Тому кожний набір неперетинних підінтервалів I_k довжини 2π, на кожному з яких розв'язок з точністю до знака та зсуву по x має вигляд $1 - \cos x$ і дорівнює нулю зовні всіх I_k, породжує розв'язок рівняння (6) (рис. 6).

У випадку рівнянь (6) періодичні розв'язки з ізольованими нулями є двох видів: із простими нулями вигляду (25) та з двократними нулями на періоді $L = 2N\pi$, де N — ціле число, і мають вигляд $\pm(1 - \cos x)$ на інтервалах $[2(k-1)\pi, 2k\pi]$, $k - 1, 2, \ldots, N$.

5. Хаотичні розв'язки. Ентропія. Наведемо означення ентропії для рівняння (1) по аналогії з даним у роботах [8, 9].

Нехай $S(L)$ — число всіх нееквівалентних періодичних розв'язків рівняння (1) з ізольованими нулями з найменшим періодом L.

Означення 2. *Число*

$$\eta = \overline{\lim_{L\to\infty}} \frac{1}{L} \ln S(L), \tag{26}$$

називатимемо просторовою ентропією рівняння (1) відносно періодичних розв'язків.

Теорема 4. *Просторова ентропія рівняння* $y'' + y = \operatorname{sign} y$ *відносно періодичних розв'язків визначається числом*

$$\eta = \frac{\ln 2}{2\pi}. \tag{27}$$

Доведення. Нехай $L = 2N\pi$, де N — ціле число. Розіб'ємо інтервал $[0, L]$ на N послідовних інтервалів довжини 2π. На кожному із них розв'язок має вигляд $\pm(1 - \cos x)$, тому число $S(L)$ всіх нееквівалентних розв'язків має оцінку

$$S(L) \le 2^N.$$

З іншого боку, зміна знака і зсуви на 2π приводять до еквівалентних розв'язків. Тому

$$S(L) \geq \frac{1}{2N}\,2^N.$$

Отже, ентропія, з одного боку, має оцінку

$$\eta \leq \lim_{N\to\infty} \frac{\ln 2^N}{2N\pi} = \frac{\ln 2}{2\pi},$$

а з іншого —

$$\eta \geq \lim_{N\to\infty} \frac{\ln(\frac{1}{2N}2^N)}{2N\pi} = \frac{\ln 2}{2\pi}.$$

Додатність просторової ентропії показує, що рівняння $y'' + y = \operatorname{sign} y$ може мати „хаотичні" розв'язки [7–9].

По аналогії з означенням, даним у роботах [8, 9], наведемо наступне строге означення хаотичного розв'язку.

Означення 3. *Будемо казати, що диференціальне рівняння має хаотичні розв'язки, якщо існують число $d > 0$ і інтервал $I = [a, b]$, $b > a$, такі, що для довільної послідовності аргументів x_k, $x_{k+1} - x_k \geq d$ і довільної послідовності значень $y_k \in I$ існує розв'язок диференціального рівняння такий, що*

$$y(x_k) = y_k. \tag{28}$$

Іншими словами, існує розв'язок диференціального рівняння, графік якого проходить через наперед задану послідовність точок $A_k(x_k, y_k)$, абсциси яких x_k відрізняються не менш ніж на d, а ординати y_k належать інтервалу I.

Теорема 5. *Диференціальне рівняння $y'' + y = \operatorname{sign} y$ має хаотичні розв'язки в сенсі означення 3.*

Доведення. Покладемо $d = 4\pi$, $I = [-2, 2]$. Нехай задано точки $A_k(x_k, y_k)$, де $x_{k+1} - x_k \geq 4\pi$, $y_k \in [-2, 2]$. Побудуємо розв'язки $y_k(x)$ рівняння рівняння $y'' + y = \operatorname{sign} y$, які задовольняють початкові умови $y_k(x_k) = y_k\; y'(x_k) = \sqrt{1 - (|y_k| - 1)^2}$. Розв'язки $y_k(x)$ мають вигляд $y_k(x) = \operatorname{sign} y_k[1 - \cos(x - a_k)]$, де числа a_k визначаються із рівності $\cos(x_k - a_k) = 1 - |y_k|$. Розв'язки $y_k(x)$ однозначно визначені на інтервалах I_k довжини 2π, що містять точку x_k, і дорівнюють нулю разом із похідною на кінцях інтервалів I_k. Оскільки за умовою $x_{k+1} - x_k \geq d = 4\pi$, то інтервали I_k не перетинаються. Розв'язок $y(x)$ рівняння $y'' + y = \operatorname{sign} y$, який збігається з $y_k(x)$ на інтервалах I_k і дорівнює тотожному нулю зовні всіх I_k, буде задовольняти означення 3.

Зауваження. Як випливає з теорем 1–5, рівняння вигляду (1) мають хаотичні розв'язки лише у випадку, коли рівняння (1) зводяться до вигляду $y'' + y = \operatorname{sign} y$.

Автори вдячні академіку А. М. Самойленку за постановку задачі і увагу до роботи.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987.

3. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
4. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
5. *Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Введение в теорию нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1987.
6. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Хаотические и стохастические колебания. — М.: Наука, 1987.
7. *Robinson C.* Dynamical systems; stability, symbolic dynamics, and chaos // Stud. Adv. Math. — Boca Raton, FL: CRC Press, 1999.
8. *Albeverio S., Nizhnik I.* Spatial chaos in a fourth-order nonlinear parabolic equation // Phys. Lett. A. — 2001. — **288**. — P. 299–304.
9. *Самойленко А. М., Нижник І. Л.* Обмежені розв'язки рівняння четвертого порядку з модельною бістійкою нелінійністю // Укр. мат. вісн. — 2009. — **6**, № 3. — С. 400–424.

Отримано 13.12.10,
після доопрацювання — 21.12.11