УДК 517.928

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

О. В. Тарасенко

Нежин. гос. ун-т им. Н. Гоголя
Украина, 16600, Нежин Черниговской обл., ул. Крапивянского, 2
e-mail: oxana.tarasenko@gmail.com

We construct an asymptotics for a pseudosolution of an optimal control problem for a process given by a singularly perturbed differential-algebraic system.

Побудовано асимптотику псевдорозв'язку задачі оптимального керування процесом, який описується лінійною сингулярно збуреною диференціально-алгебраїчною системою.

Рассмотрим процесс, который описывается системой дифференциальных уравнений

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

где $A(t,\varepsilon)$, $B(t)$ — действительные квадратные матрицы n-го порядка, $C(t,\varepsilon)$ — действительная $(n\times m)$-матрица, $x(t,\varepsilon)$ — n-мерный вектор состояния, $u(t,\varepsilon)$ — m-мерный вектор управления, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малый параметр, $\varepsilon_0 \ll 1$, $h\in N$, $t\in[0;T]$.

Задача состоит в отыскании такого управления $u(t,\varepsilon)$, под действием которого система переходит из состояния

$$x(0,\varepsilon) = x_1 \tag{2}$$

в состояние

$$x(T,\varepsilon) = x_2 \tag{3}$$

за конечный промежуток времени T, минимизируя функционал

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int\limits_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u, \tag{4}$$

в котором $D(t,\varepsilon)$ — симметричная положительно определенная матрица m-го порядка.

Предположим, что выполняются следующие условия:

1°) матрицы $A(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$, $D(t,\varepsilon)$ допускают на отрезке $[0;T]$ равномерные асимптотические разложения по степеням малого параметра:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k A_k(t), \quad C(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k C_k(t), \quad D(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k D_k(t); \tag{5}$$

2°) коэффициенты $A_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, разложений (5) неограниченно дифференцируемы на $[0; T]$;

3°) $\det D_0(t) \neq 0 \; \forall t \in [0; T]$;

4°) $\det B(t) \equiv 0 \; \forall t \in [0; T]$;

5°) пучок матриц $A_0(t) - \lambda B(t)$ регулярен на $[0; T]$ и имеет $n-1$ простой конечный элементарный делитель $\lambda - \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, и один — бесконечный;

6°) $\operatorname{Re} \lambda_i(t) < 0$, $i = \overline{1, n-1}$;

7°) $\lambda_i(t) + \lambda_j(t) \neq 0$, $i, j = \overline{1, n-1}$;

8°) область допустимых значений для управления $u(t,\varepsilon)$ совпадает со всем заданным m-мерным пространством.

Подобная задача, которая описывается системой дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и единичной матрицей при производных, рассматривалась в [1, 2], где предусматривалось, что все собственные значения матрицы $A_0(t)$ мнимые. В данной статье изучается возможность построения асимптотики решения этой задачи с использованием результатов асимптотического анализа линейных сингулярно возмущенных систем с вырождениями, осуществленного в работах [3, 4].

Поскольку система (1) удовлетворяет условиям теоремы о приводимости к центральной канонической форме, доказанной в [4] $\Big($матрица $B(t)$ имеет жорданову цепочку длины 1 относительно оператора $L(t,\varepsilon) = A(t,\varepsilon) - \varepsilon^h B(t) \dfrac{d}{dt}$, которая состоит лишь из собственного вектора $\tilde{\varphi}(t)\Big)$, согласно проведенному в [6] исследованию для решения данной задачи оптимального управления можно применить принцип максимума Понтрягина [7]. В результате придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^h B(t) \frac{dx}{dt} &= A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \\ \varepsilon^h \frac{d}{dt}\left(B^*(t)p\right) &= -A^*(t,\varepsilon)p, \end{aligned} \tag{6}$$

$$C^*(t,\varepsilon)p - D(t,\varepsilon)u = 0 \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$x(0,\varepsilon) = x_1, \quad x(T,\varepsilon) = x_2. \tag{8}$$

Введя обозначения

$$y(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(x(t,\varepsilon), p(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon)\right), \tag{9}$$

$$\tilde{A}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & 0 & C(t,\varepsilon) \\ 0 & -A^*(t,\varepsilon) - \varepsilon^h B^*(t) & 0 \\ 0 & C^*(t,\varepsilon) & -D(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$
$$\tilde{B}(t) = \begin{pmatrix} B(t) & 0 & 0 \\ 0 & B^*(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

систему (6), (7) запишем в виде

$$\varepsilon^h \tilde{B}(t)\frac{dy}{dt} = \tilde{A}(t,\varepsilon)y. \tag{11}$$

Предельный пучок матриц $A_0(t) - \lambda\tilde{B}(t)$ этой системы регулярен и имеет $2n-2$ конечных элементарных делителя $\lambda - \lambda_i(t)$, $\lambda + \lambda_j(t)$, $i,j = \overline{1, n-1}$, и $m+2$ простых бесконечных. Поскольку матрица $\tilde{B}(t)$ имеет две жордановы цепочки векторов единичной длины относительно оператора $\tilde{A}(t,\varepsilon) - \varepsilon^h\tilde{B}(t)\dfrac{d}{dt}$, то согласно теории [4] общее решение системы (11) является линейной комбинацией $2n-2$ линейно независимых решений, которые соответствуют конечным элементарным делителям.

Решения, которые соответствуют элементарным делителям $\lambda - \lambda_i(t)$, построим в виде

$$y_i(t,\varepsilon) = v_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda_i(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{12}$$

$$v_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon), 0, 0\right), \tag{13}$$

где n-мерные вектор-функции $v_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ и скалярные функции $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, изображаются в виде формальных разложений по степеням параметра ε:

$$v_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_{ki}^{(1)}(t), \quad \lambda_i(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(t). \tag{14}$$

Подставив (12) в (11), получим уравнение

$$A(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \lambda_i(t,\varepsilon)B(t)v_i^{(1)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h B(t)\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)',$$

которое по форме совпадает с соответствующим уравнением, рассмотренным в [4, с. 93] при построении решений однородной системы

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x. \tag{15}$$

Согласно [4] коэффициенты разложений (14) определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{gathered} v_{0i}^{(1)}(t) = \varphi_i(t), \\ v_{ki}^{(1)}(t) = H_i(t) b_{ki}^{(1)}(t), \\ b_{ki}^{(1)}(t) = \lambda_k^{(i)}(t) B(t) \varphi_i(t) + g_{ki}^{(1)}(t), \\ g_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{k-1} \lambda_s^{(i)}(t) B(t) v_{k-s,i}^{(1)}(t) - \sum_{s=1}^{k} A_s(t) v_{k-s,i}^{(1)}(t) + B(t) \left(v_{k-h,i}^{(1)}(t)\right)', \\ \lambda_k^{(i)}(t) = -\left(g_{ki}^{(1)}(t), \psi_i(t)\right), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{16}$$

где $\varphi_i(t), i = \overline{1, n-1}$, — собственные векторы пучка $A_0(t) - \lambda B(t)$, которые соответствуют его собственным значениям $\lambda_i(t)$; $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, — элементы нуль-пространств матриц $(A_0 - \lambda_i B)^*$, которые удовлетворяют условию

$$(B_0 \varphi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n-1}, \tag{17}$$

$H_i(t)$ — полуобратная матрица к матрице $A_0(t) - \lambda_i(t) B(t)$, $i = \overline{1, n-1}$.

В [4] доказано, что при выполнении условия 6° построенные таким образом формальные решения (12) являются асимптотическими разложениями точных линейно независимых решений системы (11). А именно, если разложения (14) оборвать на r-м члене, то точные решения изображаются асимптотическими формулами

$$y_i(t, \varepsilon) = \left(\sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k v_{ki}(t) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\lambda_i(\tau) + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(\tau)\right) d\tau\right), \tag{18}$$

где согласно (13) $v_{ki}(t, \varepsilon) = \operatorname{col}\left(v_{ki}^{(1)}(t, \varepsilon), 0, 0\right)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Решения, которые соответствуют второй группе элементарных делителей $\lambda + \lambda_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, построим в виде

$$y_i(t, \varepsilon) = \tilde{v}_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \tilde{\lambda}_i(\tau, \varepsilon) d\tau\right), \quad i = \overline{1, n-1}, \tag{19}$$

$$\tilde{v}_i(t, \varepsilon) = \operatorname{col}\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t, \varepsilon), \tilde{v}_i^{(2)}(t, \varepsilon), \tilde{v}_i^{(3)}(t, \varepsilon),\right), \tag{20}$$

где функции $\tilde{\lambda}_i(t, \varepsilon)$ и вектор-функции $\tilde{v}_i^{(j)}(t, \varepsilon)$, $j = \overline{1, 3}$, изображаются разложениями, аналогичными (14):

$$\tilde{v}_i^{(j)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{v}_{ki}^{(j)}(t), \quad j = \overline{1, 3}, \quad \tilde{\lambda}_i(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tilde{\lambda}_k^{(i)}(t). \tag{21}$$

Подставляя (19), (20) в систему (11) и учитывая структуру (10) матриц $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t)$, получаем систему трех векторных уравнений

$$A(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) = -\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)B(t)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) - C(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h B(t)\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)', \tag{22}$$

$$A^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)B^*(t)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h\left(B^*(t)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)', \tag{23}$$

$$D(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = C^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon). \tag{24}$$

Второе уравнение этой системы по форме совпадает с соответствующим уравнением, к которому приводит построение решений вида (19) однородной системы (7), сопряженной (15). Предельный пучок матриц $A_0^*(t)+\lambda B^*(t)$ этой системы имеет собственные значения $-\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, а соответствующими собственными векторами будут векторы $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n-1}$.

Повторив рассуждения, проведенные в [4, с. 98] при доказательстве теоремы 3.3, для нахождения коэффициентов $\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t)$, $\tilde{v}_{ki}^{(2)}(t)$ получим рекуррентные соотношения

$$\tilde{\lambda}_0^{(i)}(t) = -\lambda_i(t), \quad \tilde{\lambda}_k^{(i)}(t) = -\lambda_k^{(i)}(t), \quad k = 1,2,\ldots,$$

$$\tilde{v}_{0i}^{(2)}(t) = \psi_i(t),$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(2)}(t) = H_i^*(t)\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t), \quad k = 1,2,\ldots,$$

$$\tilde{b}_{ki}^{(2)}(t) = \sum_{j=0}^{k}\lambda_j^{(i)}(t)B^*(t)\tilde{v}_{k-j,i}^{(2)}(t) - \sum_{j=1}^{k}A_j^*(t)\tilde{v}_{k-j,i}^{(2)}(t) + \left(B^*\tilde{v}_{k-h,i}^{(2)}(t)\right)'.$$

Тогда, взяв во внимание условие 3°, из уравнения (24) найдем

$$\tilde{v}_{0i}^{(3)}(t) = D_0^{-1}(t)C_0^*(t)\psi_i(t),$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t) = D_0^{-1}(t)\left[\sum_{s=0}^{k}C_s^*\tilde{v}_{k-s,i}^{(2)}(t) - \sum_{s=1}^{k}D_s(t)\tilde{v}_{k-s,i}^{(3)}\right], \quad k = 1,2,\ldots.$$

Учитывая, что согласно условию 7° $\det(A_0(t)+\lambda_i(t)B(t)) \neq 0$ $\forall t \in [0;T]$, и вводя обозначения

$$R_i(t) = (A_0(t)+\lambda_i(t)B(t)), \quad i=\overline{1,n-1},$$

из уравнения (22) получаем такие рекуррентные формулы для нахождения коэффициентов $\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t)$:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_{0i}^{(1)}(t) &= -R_i^{-1}(t)K_0(t)\psi_i(t),\\ \tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) &= -R_i^{-1}(t)\left[\sum_{j=1}^{k}\lambda_j^{(i)}B(t)\tilde{v}_{k-j,i}^{(1)}(t)+\sum_{j=1}^{k}A_j(t)\tilde{v}_{k-j,i}^{(1)}(t)+\right.\\ &\left.+\sum_{j=0}^{k}C_j(t)\tilde{v}_{k-j,i}^{(3)}(t)-B(t)\left(\tilde{v}_{k-h,i}^{(1)}\right)'\right],\quad k=1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$K_0(t)=C_0(t)D_0^{-1}(t)C_0^*(t).$$

Построенные формальные решения (19) также являются асимптотическими разложениями точных решений системы (11). Оборвав соответствующие формальные ряды (21) на r-м члене, для точных решений получим асимптотические формулы

$$\begin{gathered}y_i(t,\varepsilon)=\left(\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\tilde{v}_{ki}(t)+O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right),\\ i=\overline{1,n-1},\end{gathered} \tag{26}$$

где

$$\tilde{v}_{ki}(t)=\operatorname{col}\left(\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t),\tilde{v}_{ki}^{(2)}(t),\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t)\right),\quad k=0,1,\ldots.$$

Тогда общее решение системы (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned}y(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n-1}&\left(\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k v_{ki}(t)+O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right)\times\\ &\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)c_i^{(1)}(\varepsilon)+\\ &+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\tilde{v}_{ki}(t)+O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right)\times\\ &\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\lambda_i(\tau)+\sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}(\tau)\right)d\tau\right)c_i^{(2)}(\varepsilon),\end{aligned} \tag{27}$$

где $c_i^{(1)}(\varepsilon), c_i^{(2)}(\varepsilon)$ — произвольные скалярные множители.

Обозначив

$$V_k^{(1)}(t) = \left[v_{k1}^{(1)}(t), v_{k2}^{(1)}(t), \ldots, v_{k,n-1}^{(1)}(t)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{28}$$

$$\tilde{V}_k^{(j)}(t) = \left[\tilde{v}_{k1}^{(j)}(t), \tilde{v}_{k2}^{(j)}(t), \ldots, \tilde{v}_{k,n-1}^{(j)}(t)\right], \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{29}$$

$$V_r^{(1)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^k V_k^{(1)}(t),$$

$$\tilde{V}_r^{(j)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^k \tilde{V}_k^{(j)}(t), \quad j = \overline{1,3},$$

$$\Lambda_r(t, \varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\lambda_1(t) + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^k \lambda_k^{(1)}(t), \ldots, \lambda_{n-1}(t) + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon^k \lambda_k^{(n-1)}(t)\right\},$$

$$c_1(\varepsilon) = \operatorname{col}\left(c_1^{(1)}(\varepsilon), \ldots, c_{n-1}^{(1)}(\varepsilon)\right), \quad c_2(\varepsilon) = \operatorname{col}\left(c_1^{(2)}(\varepsilon), \ldots, c_{n-1}^{(2)}(\varepsilon)\right),$$

с учетом (9) из формулы (27) получим

$$x(t, \varepsilon) = \left(V_r^{(1)}(t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \Lambda_r(\tau, \varepsilon) d\tau\right) c_1(\varepsilon) +$$

$$+ \left(\tilde{V}_r^{(1)}(t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \Lambda_r(\tau, \varepsilon) d\tau\right) c_2(\varepsilon), \tag{30}$$

$$u(t, \varepsilon) = \left(\tilde{V}_r^{(3)}(t, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \Lambda_r(\tau, \varepsilon) d\tau\right) c_2(\varepsilon). \tag{31}$$

Подставив выражение (30) в краевые условия (8) и обозначив $c(\varepsilon) = \operatorname{col}(c_1(\varepsilon), c_2(\varepsilon))$, $y_0 = \operatorname{col}(x_1, x_2)$, получим уравнение для определения $(2n-2)$-мерного вектора $c(\varepsilon)$:

$$Q(\varepsilon) c(\varepsilon) = y_0, \tag{32}$$

где

$$Q(\varepsilon) = \begin{pmatrix} V_r^{(1)}(0, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right) & \begin{matrix} \left(\tilde{V}_r^{(1)}(0, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \times \\ \times \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \Lambda_r d\tau\right) \end{matrix} \\ \begin{matrix} \left(V_r^{(1)}(T, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \times \\ \times \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \Lambda_r d\tau\right) \end{matrix} & \tilde{V}_r^{(1)}(T, \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right) \end{pmatrix}.$$

Взяв во внимание условие 6°, запишем полученное уравнение в виде

$$\left[Q_r(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right] c(\varepsilon) = y_0, \tag{33}$$

где

$$Q_r(\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{V_r^{(1)}(0,\varepsilon), \tilde{V}_r^{(1)}(T,\varepsilon)\right\} = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k Q_k, \tag{34}$$

$$Q_k = \operatorname{diag}\left\{V_k^{(1)}(0), \tilde{V}_k^{(1)}(T)\right\}, \quad k = \overline{0,r}.$$

Согласно (28), (29), (16), (25)

$$V_0^{(1)}(t) = [\varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)],$$

$$\tilde{V}_0^{(1)}(t) = -[R_1^{-1}(t)K_0(t)\psi_1(t), \ldots, R_{n-1}^{-1}(t)K_0(t)\psi_{n-1}(t)].$$

Векторы $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, линейно независимы при всех $t \in [0; T]$ как собственные векторы матричного пучка $A_0(t) - \lambda B(t)$, которые соответствуют его собственным значениям $\lambda_i(t)$.

Предположим, что выполняется условие:

9°) векторы $R_i^{-1}(T)K_0(T)\psi_i(T)$, $i = \overline{1, n-1}$, линейно независимы.

Тогда $\operatorname{rank} Q_0 = 2n-2$ и, следовательно, при достаточно малых ε, отличных от нуля, $\operatorname{rank} Q_r(\varepsilon) = 2n-2$.

Будем предполагать, что кроме условия 10° выполняется следующее условие:

10°) $P_{Q_r^*(\varepsilon)} y_0 = 0$, где $P_{Q_r^*(\varepsilon)}$ — ортопроектор на ядро $\operatorname{Ker} Q_r^*(\varepsilon)$ матрицы $Q_r^*(\varepsilon)$.

Тогда, даже если задача (33) является некорректной из-за слагаемого $O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)$, существует так называемое псевдорешение $c_+(\varepsilon)$ [8, 9] этой задачи, которое минимизирует невязку $\|Q(\varepsilon)c_+(\varepsilon) - y_0\|$. Это псевдорешение единственно и определяется по формуле

$$c_+(\varepsilon) = Q^+(\varepsilon) y_0, \tag{35}$$

где $Q^+(\varepsilon)$ — псевдообратная матрица к матрице $Q(\varepsilon)$, а соответствующая невязка

$$\|Q(\varepsilon)Q^+(\varepsilon)y_0 - y_0\| = P_{Q^*(\varepsilon)} y_0. \tag{36}$$

Исходя из определения псевдообратной матрицы и формулы для ее вычисления, приведенной в [8, с. 91], легко убедиться в том, что

$$Q^+(\varepsilon) = \left[Q_r(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right]^+ = Q_r^+(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right). \tag{37}$$

Кроме того, из формул для вычисления ортопроекторов, приведенных в [10], следует, что

$$P_{Q^*(\varepsilon)} = P_{Q_r^*(\varepsilon)} + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right). \tag{38}$$

Подставив (37) в (35), а (38) в (36) и приняв во внимание условие 10°, получим

$$c_+(\varepsilon) = Q_r^+(\varepsilon) y_0 + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right), \tag{39}$$

$$\|Q(\varepsilon)c_+(\varepsilon) - y_0\| = O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right). \tag{40}$$

Таким образом, при выполнении условия 10° найденное по асимптотической формуле (39) псевдорешение $c_+(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (32) с точностью до $O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)$. Согласно (34)

$$Q_r^+(\varepsilon) = \operatorname{diag}\left\{\left(V_r^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^+, \left(\tilde{V}_r^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^+\right\}.$$

Следовательно, $c_+(\varepsilon) = \operatorname{col}\left[c_+^{(1)}(\varepsilon), c_+^{(2)}(\varepsilon)\right]$, где

$$c_+^{(1)}(\varepsilon) = \left(V_r^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^+ x_1 + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right), \tag{41}$$

$$c_+^{(2)}(\varepsilon) = \left(\tilde{V}_r^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^+ x_2 + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right). \tag{42}$$

В свою очередь равенство из условия 10° распадается на два:

$$P_{\left(V_r^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^*} x_1 = 0, \quad P_{\left(\tilde{V}_r^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^*} x_2 = 0,$$

которые равносильны следующим:

$$(x_1, g_1(\varepsilon)) = 0, \quad (x_2, g_2(\varepsilon)) = 0,$$

где $g_1(\varepsilon)$, $g_2(\varepsilon)$ — элементы нуль-пространств матриц $\left(V_r^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^*$ и $\left(\tilde{V}_r^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^*$ соответственно.

Подставив (42) в (31), получим управление

$$u(t,\varepsilon) = \left(\tilde{V}_r^{(3)}(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T \Lambda_r(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\left(\tilde{V}_r^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^+ x_2, \tag{43}$$

которое переводит систему (1) из состояния, достаточно близкого к x_1, в состояние, достаточно близкое к x_2. Порядок „близости" этих состояний к заданным равен $O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)$ и будет тем меньше, чем меньше ε и больше r.

Подставив (41), (42) в (30), получим асимптотическую формулу для траектории, по которой осуществляется этот переход:

$$x(t,\varepsilon) = \left(V_r^{1)}(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_r(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\left(V_r^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^+ x_1 +$$

$$+ \left(\tilde{V}_r^{(1)}(t,\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{r+1-h}\right)\right) \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T \Lambda_r(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\left(\tilde{V}_r^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^+ x_2. \tag{44}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. *Если выполняются условия 1° – 10°, (17), то при достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует и притом единственное управление, которое задается асимптотической формулой (43), с помощью которого систему (1) можно перевести за фиксированный промежуток времени* T *из состояния, достаточно близкого к* x_1, *в состояние, достаточно близкое к* x_2, *минимизируя функционал (4). При этом траектория, по которой осуществляется этот переход, изображается асимптотической формулой (44).*

Коэффициенты разложений, которые содержатся в (43), (44), находятся с помощью рекуррентных формул, приведенных в процессе доказательства этой теоремы.

Аналогичный подход к исследованию задачи оптимального управления (1) – (4) можно применить и в более сложных случаях, когда предельный пучок матриц $A_0(t) - \lambda B(t)$ имеет кратный спектр.

1. *Шкиль Н. И., Лейфура В. Н.* Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленноменяющимися коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А — 1976. — № 7. — С. 604 – 608.
2. *Шкиль Н. И., Лейфура В. Н.* К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами с медленноменяющимися коэффициентами в случае кратных корней // Вычислит. и прикл. математика: Межвед. респ. сб. — 1977. — Вып. 31. — С. 81 – 92.
3. *Шкиль Н. И., Старун И. И., Яковец В. П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. — Киев: Вища шк., 1991. — 207 с.
4. *Самойленко А. М., Шкіль М. І., Яковець В. П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — Київ: Вища шк., 2000. — 294 с.
5. *Самойленко А. М., Яковец В. П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Докл. НАН Украины. — 1993. — № 4. — С. 10 – 15.
6. *Тарасенко О. В.* Применение принципа максимума к вырожденным линейным задачам оптимального управления // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. — 2009. — **18**. — С. 178 – 183.
7. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 392 с.
8. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев, 1995. — 318 с.
9. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1986. — 288 с.
10. *Блисс Г. А.* Лекции по вариационному исчислению. — М.: Изд-во иностр. лит., 1950.

Получено 23.09.13