УДК 517.956, 517.958

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Покутный

Ин-т математики НАН Украины
Украина, 01601, Киев 4, ул. Терещенковская, 3
e-mail: lenasas@gmail.com

We find the necessary and sufficient conditions for existence of generalized solutions to a Schrödinger equation on a Hilbert space, as well as conditions for normalized and generalized solvability of such problems. The solutions are given in terms of a generalized Green's function.

Знайдено необхідну й достатню умови існування узагальнених розв'язків рівняння Шрьодінгера у гільбертовому просторі. Встановлено умови нормальної та узагальненої розв'язності. Розв'язки наведено з використанням узагальненого оператора Гріна.

Введение. Краевые задачи для нелинейного уравнения Шредингера часто возникают в квантовой механике, нелинейной оптике, теории сверхпроводимости и других областях физики и техники. Их изучение представляет как теоретический, так и практический интерес. Так, свободное уравнение Шредингера, а также уравнение Клейна – Гордона, которое можно записать в виде матричного уравнения Шредингера, исследовались в работе [1], расщепленная система нелинейных уравнений, а также уравнение Шредингера с чисто мнимыми коэффициентами — в [2], нелинейное уравнение диффузии Колмогорова – Петровского – Пискунова исследовалось в [3], магнитный оператор Шредингера — в [4, 5].

С развитием квантового функционального анализа все более популярными становятся так называемые квантовые нелинейные уравнения Шредингера. Они получаются из классических стандартной процедурой квантования [6]. Поскольку охватить все множество работ и результатов относительно уравнения Шредингера невозможно, опишем идеи и методы, которые положены в основу предложенного в работе подхода.

Данная работа посвящена вопросу существования, а также конструктивному построению решений краевых задач для слабонелинейного нестационарного уравнения Шредингера в гильбертовом пространстве. Исследование зависящего от времени уравнения важно потому, что в ряде случаев приходится расчитывать изменение квантовой системы в таких случаях, когда внешний потенциал включается, а затем выключается через короткое время, или когда включается периодический потенциал. Наибольший интерес представляет критический (резонансный) случай, когда нарушается единственность решений. В таком случае традиционные методы, основанные на теоремах о неподвижных точках, непосредственно не могут быть использованы. Резонансы нарушают простоту динамического движения. Предложенная модель уравнения Шредингера охватывает довольно широкий класс как дифференциальных уравнений в частных производных, так и абстрактных уравнений, которые могут быть связаны с необратимыми процессами [7]. Предложенный подход дает возможность взглянуть на некоторые свойства краевых задач для уравнения Шредингера с единой позиции.

Постановка задачи. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассматривается слабонелинейное дифференциальное уравнение Шредингера

$$\frac{d\varphi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\varphi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon) + f(t), \quad t \in J, \tag{1}$$

с операторным краевым условием вида

$$l\varphi(\cdot,\varepsilon) = \alpha + \varepsilon\mathcal{J}(\varphi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{2}$$

где для каждого $t \in J \subset \mathbb{R}$ (J — конечный отрезок) неограниченный оператор $H(t)$ имеет вид $H(t) = H_0 + V(t)$. Здесь $H_0 = H_0^*$ — самосопряженный оператор с плотной областью определения $D = D(H_0) \subset \mathcal{H}$, отображение $t \to V(t)$ сильно непрерывное. Оператор l предполагается линейным и ограниченным, действующим из гильбертового пространства $\mathcal{H}$ в гильбертовое пространство $\mathcal{H}_1$, α — произвольный элемент пространства $\mathcal{H}_1$. Ищется такое решение $\varphi(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2), которое обращается в одно из решений порождающей краевой задачи

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_0(t) + f(t), \quad t \in J, \tag{3}$$

$$l\varphi_0(\cdot) = \alpha, \tag{4}$$

при $\varepsilon = 0$. Операторы-функции $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \mathcal{J}(\varphi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ удовлетворяют следующим ограничениям в окрестности порождающего решения $\varphi_0(t)$ по совокупности переменных:

$$Z(\cdot,\cdot,\cdot) \in C^1[\|\varphi - \varphi_0\| \le q] \times C(J,\mathcal{H}) \times C[0,\varepsilon_0],$$

$$\mathcal{J}(\cdot,\cdot) \in C^1[\|\varphi - \varphi_0\| \le q] \times C[0,\varepsilon_0],$$

где q — некоторая положительная постоянная. Работа посвящена получению необходимых и достаточных условий существования решений краевой задачи (1), (2) и построению итеративной процедуры, сходящейся к точным решениям, а также установлению связи между необходимым и достаточным условиями.

Для краевой задачи (3), (4) будет показано каким образом можно ввести различные виды решений, чтобы можно было гарантировать ее разрешимость при произвольных неоднородностях (относительно различных классов обобщенных решений см. [8]). Эти решения строятся с помощью обобщенного оператора Грина и имеют один и тот же вид для всех типов решений.

Линейный случай. Установим ряд утверждений, касающихся разрешимости краевой задачи (3), (4). Определим, как и в [9], операторнозначную функцию

$$\tilde{V}(t) = e^{itH_0}V(t)e^{-itH_0}.$$

В этом случае для $\tilde{V}(t)$ справедливо представление Дайсона [9, с. 311] и можно определить эволюционный оператор $\tilde{U}(t,s)$. Если $U(t,s) = e^{-itH_0}\tilde{U}(t,s)e^{isH_0}$, то $\psi_s(t) = U(t,s)\,\psi$ — слабое решение однородного уравнения

$$\frac{d\varphi_0(t)}{dt} = -iH(t)\varphi_0(t) \tag{5}$$

с условием $\psi_s(s) = \psi$ в том смысле, что для произвольного $\eta \in D$ функция $(\eta, \psi_s(t))$ является дифференцируемой и

$$\frac{d}{dt}(\eta, \psi_s(t)) = -i(H_0\eta, \psi_s(t)) - i(V(t)\eta, \psi_s(t)), \quad t, s \in J.$$

Для простоты изложения будем предполагать, что область D плотна в $\mathcal{H}$. Оператор $U(t,s)$ является линейным ограниченным при фиксированных t, s и, так как область D плотна в $\mathcal{H}$, ее можно расширить на все пространство $\mathcal{H}$ по непрерывности, что и предполагается в дальнейшем. Расширение эволюционного оператора на все пространство будем обозначать таким же образом. Будем также предполагать, что вектор-функция $f(t)$ действует из J в гильбертовое пространство $\mathcal{H}$, причем $f(t)$ принадлежит $C(J,\mathcal{H})$ — банахову пространству непрерывных на J функций со значениями в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Отметим [9], что любое слабое решение уравнения (3) можно представить в виде

$$\varphi_0(t,s) = U(t,s)\varphi_0(s,s) + \int\limits_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau \tag{6}$$

(равенство в общем случае подразумевается в слабом смысле).

Подставив выражение (6) в краевое условие (4), получим следующее уравнение относительно элемента $\varphi_0(s,s) \in \mathcal{H}$:

$$Q\varphi_0(s,s) = \alpha - \ell \int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{7}$$

где $Q = \ell U(\cdot, s)$ — оператор, полученный подстановкой эволюционного оператора $U(t,s)$ в краевое условие (4). Для удобства дальнейшего изложения обозначим $\varphi = \varphi_0(s,s)$, $g = \alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau$. Тогда операторное уравнение (7) примет вид

$$Q\varphi = g. \tag{8}$$

Уравнение (8) можно сделать разрешимым в определенном смысле при произвольных неоднородностях в правой части таким же образом, как и уравнение Хилла в статье [10]. Для полноты изложения приведем соответствующие конструкции. В силу того, что оператор Q является линейным и ограниченным, справедливы следующие разложения в прямые суммы:

$$\mathcal{H} = N(Q) \oplus X, \quad \mathcal{H}_1 = \overline{R(Q)} \oplus Y.$$

Здесь $X = N(Q)^{\perp}$, $Y = \overline{R(Q)}^{\perp}$. В силу представления существуют операторы ортогонального проектирования $\mathcal{P}_{N(Q)}$, $\mathcal{P}_X$ и $\mathcal{P}_{\overline{R(Q)}}$, $\mathcal{P}_Y$ на соответствующие подпространства. Будем обозначать через $\mathcal{H}_2$ фактор-пространство пространства $\mathcal{H}$ по ядру $N(Q)$ ($\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}/N(Q)$). Тогда существуют непрерывная биекция $p : X \to \mathcal{H}_2$ и проекция $j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_2$. Тройка $(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2, j)$ является локально тривиальным расслоением с типичным слоем $\mathcal{P}_{N(L)}\mathcal{H}$. Определим теперь оператор

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P}_{\overline{R(Q)}} L j^{-1} p : X \to R(Q) \subset \overline{R(Q)}.$$

Нетрудно убедиться, что определенный таким образом оператор является линейным, инъективным и непрерывным. Воспользовавшись теперь процессом пополнения [8] по норме $\|x\|_{\overline{X}} = \|\mathcal{Q}x\|_F$, где $F = \overline{R(Q)}$, получим новое пространство $\overline{X}$ и расширенный оператор $\overline{\mathcal{Q}}$. Тогда

$$\overline{\mathcal{Q}} : \overline{X} \to \overline{R(Q)}, \quad X \subset \overline{X},$$

и так построенный оператор будет осуществлять гомеоморфизм между $\overline{X}$ и $\overline{R(Q)}$. Рассмотрим расширенный оператор $\overline{Q} = \overline{\mathcal{Q}}\mathcal{P}_{\overline{X}} : \overline{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}_2$,

$$\overline{\mathcal{H}} = N(Q) \oplus \overline{X}, \quad \mathcal{H}_1 = R(\overline{Q}) \oplus Y.$$

Ясно, что $\overline{Q}x = Qx$, $x \in \mathcal{H}$, и оператор $\overline{Q}$ будет нормально разрешимым. Следовательно, существует псевдообратный по Муру – Пенроузу к $\overline{Q}$ оператор $\overline{Q}^{+}$, который будем называть обобщенным псевдообратным к оператору Q. Используем его при исследовании уравнения (8). Выделим три типа его решений.

1. Классические решения. Если оператор Q нормально разрешимый, то [11] элемент g принадлежит $R(Q)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{P}_{N(Q^*)}g = 0$. В этом случае существует псевдообратный по Муру – Пенроузу оператор Q^+ и множество решений (8) может быть представлено в виде

$$\varphi = Q^+ g + \mathcal{P}_{N(Q)}c \quad \text{для всех} \quad c \in \mathcal{H}.$$

2. Сильные обобщенные решения. Рассмотрим случай, когда множество значений оператора Q не является замкнутым. В этом случае существует расширенный оператор $\overline{Q}$ и условие обобщенной разрешимости уравнения (8) имеет вид

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}g = 0,$$

а соответствующим обобщенным решением будем называть произвольный элемент из множества $\{\overline{Q}^{+}g + \mathcal{P}_{N(Q)}c, c \in \mathcal{H}\}$.

Замечание 1. Если $g \in R(Q)$, то обобщенное решение, определенное выше, будет классическим.

3. Обобщенные квазирешения. Рассмотрим случай, когда $g \notin \overline{R(Q)}$. Для элемента g это равносильно выполнению условия $\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}g \neq 0$. В этом случае сильные обобщенные решения не существуют, но существуют такие элементы из $\overline{X}$, которые являются решениями вариационной задачи $\inf \|\overline{Q}\varphi - g\|_{\mathcal{H}_1}$, где $\overline{Q} = \overline{Q}_{\overline{X}}\mathcal{P}_{\overline{X}}$ и инфимум берется по всем элементам $\varphi \in \overline{X}$. Множество этих элементов имеет вид $\{\overline{Q}^{+}g + \mathcal{P}_{N(Q)}c, c \in \mathcal{H}\}$. Будем называть их обобщенными квазирешениями по аналогии с обычными квазирешениями [11] (см. также [8] относительно обобщенных экстремальных элементов). В силу изложенного справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Краевая задача (3), (4), определенная в гильбертовых пространствах, является всюду разрешимой.*

1. Существуют сильные обобщенные решения тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\alpha - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell \int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau = 0; \tag{9}$$

если $\alpha - \ell \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau \in R(Q)$, *то решения будут классическими обобщенными.*

2. Существуют обобщенные квазирешения тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\alpha - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\ell \int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau \neq 0. \tag{10}$$

3. Обобщенные решения краевой задачи (3), (4) имеют вид

$$\varphi_0(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c + U(t,s)\overline{Q}^+\alpha + (\overline{G[f]})(t,s), \tag{11}$$

где

$$(\overline{G[f]})(t,s) = \int\limits_s^t U(t,\tau)f(\tau)d\tau - U(t,s)\overline{Q}^+\ell\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)f(\tau)d\tau$$

— обобщенный оператор Грина краевой задачи (3), (4), c *— произвольный элемент пространства* $\mathcal{H}$.

Замечание 2. Во всех случаях обобщенные решения имеют одинаковое представление, но в них вкладывается разный смысл.

Нелинейный случай. Основной результат. Сначала найдем необходимое условие существования сильного обобщенного решения $\varphi(t,s,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2), которое при $\varepsilon = 0$ обращается в порождающее решение $\varphi_0(t,s,c)$ вида (11). При этом будем предполагать, что краевая задача (3), (4) также имеет сильные обобщенные решения, т. е. выполняется условие (9).

Теорема 2 *(необходимое условие). Пусть краевая задача (1), (2) имеет сильное обобщенное решение* $\varphi(t,s,\varepsilon)$, *которое при* $\varepsilon = 0$ *обращается в порождающее решение* $\varphi_0(t,c^0)$ *(11) с элементом* $c = c^0$. *Тогда элемент* $c^0 \in \mathcal{H}$ *должен удовлетворять операторному уравнению для порождающих констант*

$$F(c) = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\left\{\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c),0) - l\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z(\varphi_0(\tau,s,c),\tau,0)d\tau\right\} = 0. \tag{12}$$

Доказательство. Если краевая задача (1), (2) имеет сильные обобщенные решения, то согласно теореме 1 должно выполняться условие

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\left\{\alpha + \varepsilon\mathcal{J}(\varphi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)(f(\tau) + \varepsilon Z(\varphi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon))d\tau\right\} = 0. \tag{13}$$

Поскольку выполнено условие (9), после упрощения условие (13) можно записать в виде

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\left\{\mathcal{J}(\varphi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) - l\int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z(\varphi(\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau\right\} = 0.$$

Переходя к пределу в этом равенстве, при $\varepsilon = 0$ получаем операторное уравнение (12).

Замечание 3. Теорема 2 справедлива и в случае, когда нелинейные операторы функции $Z(\varphi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)$, $J(\varphi(t,s,\varepsilon),\varepsilon)$ непрерывны в окрестности порождающего решения.

Для получения достаточного условия существования решения выполним замену переменных в краевой задаче (1), (2) вида

$$\varphi(t,s,\varepsilon) = \varphi_0(t,s,c^0) + \psi(t,s,\varepsilon),$$

где $\varphi_0(t,s,c^0)$ — порождающее решение (11) с элементом c^0, который удовлетворяет операторному уравнению для порождающих констант (12). В новых переменных будем искать сильное обобщенное решение краевой задачи

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\psi(t,\varepsilon) + \varepsilon Z(\varphi_0(t,s,c^0) + \psi(t,\varepsilon),t,\varepsilon), \tag{14}$$

$$l\psi(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon), \tag{15}$$

которое при $\varepsilon = 0$ обращается в нулевое решение. Разрешимость краевой задачи (14), (15) эквивалентна разрешимости краевой задачи (1), (2). Используя непрерывную дифференцируемость нелинейностей в окрестности порождающего решения, выделим линейную часть по ψ и члены нулевого порядка по ε. Тогда имеют место следующие разложения:

$$Z(\varphi_0(t,s,c^0) + \psi(t,s,\varepsilon),t,\varepsilon) = Z(\varphi_0(t,s,c^0),t,0) + A_1(t)\psi(t,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(t,s,\varepsilon),t,\varepsilon),$$

$$\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) = \mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0),\varepsilon) + l\psi(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon),$$

где

$$A_1(t) = A_1(t,c^0) = Z_{\varphi}^{(1)}(v,t,\varepsilon)|_{v=\varphi_0(t,s,c^0),\varepsilon=0}, \quad l = \mathcal{J}^{(1)}(\varphi_0,0)$$

— производные Фреше в точке $\varphi = \varphi_0(t,s,c^0), \varepsilon = 0$, а для членов более высокого порядка $\mathcal{R}(\psi,t,\varepsilon), \mathcal{R}_1(\psi,\varepsilon)$ выполнены соотношения

$$\mathcal{R}(0,t,0) = 0, \quad \mathcal{R}_{\psi}^{(1)}(0,t,0) = 0, \quad \mathcal{R}_1(0,0) = 0, \quad \mathcal{R}_{1\psi}^{(1)}(0,0) = 0.$$

Таким образом, учитывая замену, будем рассматривать краевую задачу

$$\frac{d\psi(t,\varepsilon)}{dt} = -iH(t)\psi(t,\varepsilon) + \varepsilon\{Z(\varphi_0(t,s,c^0),t,0) + A_1(t)\psi(t,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(t,\varepsilon),t,\varepsilon)\}, \qquad (16)$$

$$l\psi(\cdot,\varepsilon) = \varepsilon\{\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0) + l\psi(\cdot,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,\varepsilon),\varepsilon)\}, \qquad (17)$$

которая имеет сильное обобщенное решение

$$\psi(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c + \overline{\psi}(t,s,\varepsilon), \quad c \in \mathcal{H},$$

$$\overline{\psi}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^{+}\{\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0) + l\psi(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\} +$$
$$+ \varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0),\cdot,0) + A_1(\cdot)\psi(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s)$$

при выполнении условия

$$\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0),0) + l\psi(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\} -$$
$$- \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{Z(\varphi_0(\tau,s,c^0),\tau,0) + A_1(\tau)\psi(\tau,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau = 0.$$

Подставляя в линейную часть последнего выражения вместо $\psi(t,s,\varepsilon)$ выражение

$$U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c + \overline{\psi}(t,s,\varepsilon)$$

и учитывая уравнение (12), получаем операторное уравнение относительно $c \in$ $\in \mathcal{H}$:

$$B_0 c = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau -$$
$$- \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}, \qquad (18)$$

где оператор B_0 определяется следующим образом:

$$B_0 = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l \left\{ U(\cdot,s) - \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)A_1(\tau)U(\tau,s)d\tau \right\} \mathcal{P}_{N(Q)}.$$

Для сильной обобщенной разрешимости уравнения (18), согласно изложенному выше, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)} \left\{ \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l \int_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\left\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right\} d\tau - \right.$$
$$\left. - \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\left\{l\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\right\} \right\} = 0,$$

которое будет заведомо выполняться, если $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$. Решая (18) относительно c, приходим к операторной системе

$$\psi(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c + \overline{\psi}(t,s,\varepsilon),$$

$$c = \overline{B}_0^+\Bigg\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\left\{A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon) + \mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\right\}d\tau -$$

$$- \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\left\{l\overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon) + \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\right\}\Bigg\}, \tag{19}$$

$$\overline{\psi}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^+\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

Введем вспомогательный вектор $u = (\psi, c, \overline{\psi})^T \in \mathcal{H}\times\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ (T обозначает операцию транспонирования). Тогда операторную систему (19) можно записать в виде

$$u = \begin{bmatrix} 0 & U(t,s)P_{N(Q)} & I \\ 0 & 0 & L_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

где

$$L_1\overline{\psi} = B_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} l\left\{\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)A_1(\tau)\overline{\psi}(\tau,s,\varepsilon)d\tau - \overline{\psi}(\cdot,s,\varepsilon)\right\},$$

$$g_1 = B_0^+\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\left\{l\int\limits_s^{\cdot}\mathcal{R}(\psi(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)d\tau - \mathcal{R}_1(\psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\right\},$$

$$g_2 = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^+\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0) + \psi(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s).$$

В свою очередь эта операторная система эквивалентна следующей:

$$Lu = g, \tag{20}$$

где

$$L = \begin{bmatrix} I & -U(t,s)P_{N(Q)} & -I \\ 0 & I & -L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}.$$

Оператор L имеет ограниченный обратный L^{-1}. Действительно, оператор L^{-1} можно записать в явном виде

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} I & -U(t,s)P_{N(Q)} & -U(t,s)P_{N(Q)}L_1 + I \\ 0 & I & L_1 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

То, что так определенный оператор удовлетворяет равенству $LL^{-1} = L^{-1}L = I$, проверяется непосредственной подстановкой. Ограниченность доказывается так же, как и в [12]. Систему (20) можно записать в виде

$$u = L^{-1}S(\varepsilon)u.$$

Для достаточно малого ε оператор $S(\varepsilon)$ будет сжимающим. Тогда из принципа сжимающих отображений будет следовать, что операторная система (20) имеет единственную неподвижную точку, которая и дает ограниченное решение краевой задачи (1), (2). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть для оператора B_0 выполняется условие $\mathcal{P}_{N(\overline{B}_0^*)}\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)} = 0$.*

Тогда для произвольного элемента $c = c^0 \in \mathcal{H}$, удовлетворяющего уравнению для порождающих констант, существует, по крайней мере, одно сильное обобщенное решение краевой задачи (1), (2). Это решение может быть найдено с помощью итерационного процесса

$$\overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon) = \varepsilon U(t,s)\overline{Q}^{+}\mathcal{J}(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)+\varepsilon\overline{G[Z(\varphi_0(\cdot,s,c^0)+\psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\cdot,\varepsilon)]}(t,s),$$

$$c_k = \overline{B}_0^{+}\Bigg\{\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}l\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)\{A_1(\tau)\overline{\psi}_k(\tau,s,\varepsilon)+\mathcal{R}(\psi_k(\tau,s,\varepsilon),\tau,\varepsilon)\}d\tau -$$

$$-\mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\{l\overline{\psi}_k(\cdot,s,\varepsilon)+\mathcal{R}_1(\psi_k(\cdot,s,\varepsilon),\varepsilon)\}\Bigg\},$$

$$\psi_{k+1}(t,s,c) = U(t,s)\mathcal{P}_{N(Q)}c+\overline{\psi}_{k+1}(t,s,\varepsilon),$$

$$\varphi_k(t,s,\varepsilon) = \varphi_0(t,s,c^0)+\psi_k(t,s,\varepsilon),\ k = 0,1,2,\ldots,\psi_0(t,s,\varepsilon) = 0,\ \varphi(t,s,\varepsilon) = \lim_{k\to\infty}\varphi_k(t,s,\varepsilon).$$

Докажем следствие (вытекающее из теорем 1, 2), устанавливающее связь между необходимым и достаточным условиями.

Следствие. *Пусть оператор $F(c)$ имеет производную Фреше $F^1(c)$ для каждого элемента c^0 гильбертового пространства $\mathcal{H}$, удовлетворяющего уравнению (12) для порождающих констант. Если $F^1(c)$ имеет ограниченный обратный, то краевая задача (1), (2) имеет единственное решение для каждого c^0.*

Доказательство. Из теоремы о суперпозиции дифференцируемых отображений в гильбертовом пространстве следует представление

$$F^{(1)}(c)[h] = \mathcal{P}_{N(\overline{Q}^*)}\Bigg\{\mathcal{J}^{(1)}(v,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}[\varphi_0^{(1)}(\cdot,s,c)[h]] -$$

$$-l\int\limits_s^{\cdot} U(\cdot,\tau)Z^{(1)}(v,\tau,\varepsilon)|_{v=\varphi_0,\varepsilon=0}[\varphi_0^{(1)}(\tau,s,c)[h]]d\tau\Bigg\} = B_0[h].$$

В силу обратимости оператора $F^{(1)}(c)$ оператор B_0 также обратим. Благодаря этому уравнение (12) имеет единственное решение для каждой константы $c = c^0$, а тогда и краевая задача (1), (2) также имеет единственное решение.

1. *Копылова Е. А.* Дисперсионные оценки для уравнений Шредингера и Клейна – Гордона // Успехи мат. наук. — 2010. — **65**, вып. 1(391). — С. 97 – 144.
2. *Махмудов Н. М.* Разрешимость краевых задач для уравнения Шредингера с чисто мнимым коэффициентом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. — 2011. — **11**, вып. 1. — С. 31 – 38.
3. *Murray J. D.* Mathematical biology: I. An introduction. — Springer-Verlag, 2002. — 576 p.
4. *Гарифулин Р. Н.* Авторезонансное возбуждение солитона нелинейного уравнения Шредингера // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2012. — **18**, № 2. — С. 62 – 66.
5. *Алиев А. Р., Эйвазов Э. Х.* Резольвентное уравнение одномерного магнитного оператора Шредингера на всей оси // Сиб. мат. журн. — 2012. — **53**, № 6. — С. 1201 – 1208.
6. *Славнов Н. А.* Введение в теорию квантовых интегрируемых систем. Квантовое нелинейное уравнение Шредингера // Лекц. курсы НОЦ. — 2011. — **18**. — С. 3 – 118.
7. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. — М.: Наука, 1985. — 328 с.
8. *Ляшко С. И., Номировский Д. А., Петунин Ю. И., Семенов В. В.* Двадцатая проблема Гильберта. Обобщенные решения операторных уравнений. — М.: Диалектика, 2009. — 185 с.
9. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: в 4 т. — Т.2: Гармонический анализ. Самосопряженность. — М.: Мир, 1978. — 395 с.
10. *Покутный А. А.* Периодические решения уравнения Хилла // Нелінійні коливання. — 2013. — **16**, № 1. — С. 111 – 117.
11. *Pokutnyi A. A.* Bounded solutions of linear and weakly nonlinear differential equations in a Banach space with an unbounded operator in the linear part // Different. Equat. — 2012. — **48**, № 6. — P. 803 – 813.
12. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized-inverse operators and Fredholm boundary value problems. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 317 p.

Получено 17.10.13