УДК 519. 944

ЗАСТОСУВАННЯ ТОПОЛОГІЧНИХ МЕТОДІВ ДО КВАЗІЛІНІЙНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

І. Б. Романенко, А. В. Заблодська

Київ. нац. ун-т. ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, Київ, просп. акад. Глушкова, 2, корп. 6

A topological approach is used to study quasilinear parabolic boundary-value problems. The class of problems under the investigation is reduced to an operator equation with an operator that satisfies condition $(S)_+$. We obtain theorems on existence of a solution and, as an example, apply this approach to a second order parabolic equation.

Топологічний підхід застосовується до дослідження квазілінійних параболічних крайових задач. Досліджуваний клас задач зведено до операторного рівняння з оператором, який задовольняє умову $(S)_+$. Одержано теореми розв'язності та наведено приклад застосування даного підходу у випадку параболічного рівняння другого порядку.

Вступ. У даній роботі розглядаються квазілінійні параболічні задачі вигляду

$$\widetilde{L}[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x,t,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u)D^\alpha u -$$

$$- F(x,t,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$\widetilde{B_j}[u] = G_j(x,t,u,\ldots,D^{m_j}u) = g_j(x,t),\ (x,t) \in S_T,\ j = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$u(x,0) = h(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

у скінченному циліндрі Q_T з межею S_T та основою Ω. Задача вивчається за допомогою теорії ступеня відображення. З цією метою вона спочатку зводиться до операторного рівняння з неперервним обмеженим оператором, який задовольняє умову $(S)_+$. Використання для таких операторів теорії ступеня відображення дозволило отримати результати про розв'язність досліджуваної задачі та твердження про збіжність послідовності гальоркінських наближень розв'язку.

Лінійні та квазілінійні задачі для рівняння другого порядку вивчались у роботі [1]. Лінійні задачі для систем параболічних задач високого порядку було вивчено у роботі [2], де отримано апріорні оцінки їх розв'язку. Вивченню властивостей параболічних задач присвячено також монографії [3–6]. У роботі [7] досліджуються квазілінійні параболічні задачі для рівнянь високого порядку з граничною умовою першого роду. Методом дослідження у роботі [7] слугував принцип нерухомої точки. У даній роботі суттєво використовуються результати робіт [8, 9]. Зокрема, в ній застосовано методику зведення параболічних задач до операторних рівнянь, запропоновану у роботі [9], а також твердження з теорії ступеня, сформульовані і доведені у роботі [8].

Постановка задачі та формулювання основних припущень. Нехай n, m — натуральні, а p, T — додатні числа. Для обмеженої області $\Omega \subset R^n$ із гладкою межею $\partial\Omega$ позначимо $Q_T := \Omega \times (0,T),\ S_T := \partial\Omega \times (0,T)$ і розглянемо загальну нелінійну параболічну крайову задачу (1) – (3).

Розв'язок задачі (1) – (3) буде розглядатись у просторі $W_p^{(2m,1)}(Q_T)$ (див. [10]). Будемо вважати, що для чисел p, n, m виконано нерівності

$$p > n + 2m, \quad m_j \le 2m - 1, \quad j = \overline{1,m}, \tag{4}$$

а межа $\partial\Omega$ області Ω задовольняє умову

$$\partial\Omega \in C^{2m}. \tag{5}$$

Введемо позначення

$$a_{\alpha\beta}(x,t,\xi) := \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} a_\alpha(x,t,\xi), \quad F_\beta(x,t,\xi) := \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} F(x,t,\xi),$$

$$|\alpha| = 2m, \quad |\beta| \le 2m-1, \quad \xi = \{\xi_\beta \in R : |\beta| \le 2m-1\},$$

$$G_{j\beta}(x,t,\zeta) := \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} G_j(x,t,\zeta), \quad |\beta| \le m_j,$$

$$\zeta = \{\zeta_\beta \in R : |\beta| \le m_j\}, \quad j = \overline{1,m},$$

та умови:

F_1) функції $a_\alpha(x,t,\xi)$, $F(x,t,\xi)$ мають усі неперервні частинні похідні вигляду $D_x^\alpha D_\xi^\beta$ до другого порядку включно, $F(x,t,0) \equiv 0$;

F_2) існує неперервна функція $\nu : \overline{R^+} \to R^+$ така, що для довільних $\xi \in R^{M(2m-1)}$, $\eta \in \in R^n$ виконується нерівність

$$(-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x,t,\xi)\eta^\alpha \ge \nu(|\xi|)|\eta|^{2m};$$

G_1) при кожному фіксованому j функція $G_j(x,t,\zeta)$ має усі неперервні частинні похідні вигляду $D_x^\alpha D_\eta^\beta$ до порядку $2m - m_j + 1$ включно, $G_j(x,t,0) \equiv 0$.

Для $(x,t) \in S_T, \xi \in R^{M(2m-1)}, \zeta = \{\xi_\beta : |\beta| \le m_j\}$ (для $j \in 1, \ldots, m$), η — одиничного вектора зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$ у точці x, δ – довільного вектора з дотичної до $\partial\Omega$ у точці x площини, комплексного τ та дійсного q означимо

$$L(x,t,\xi,\delta+\tau\eta,q) := q - (-1)^m \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x,t,\xi)(\delta+\tau\eta)^\alpha,$$

$$B_j(x,t,\zeta,\delta+\tau\eta) := \sum_{|\beta|=m_j} G_{j\beta}(x,t,\zeta)(\delta+\tau\eta)^\beta, \quad j = \overline{1,m}.$$

Якщо $q \geq -\tilde{\nu}|\delta|^{2m}$, $0 < \tilde{\nu} < \nu(|\xi|)$ та $|q| + |\delta| > 0$, то $L(x,t,\xi,\delta+\tau\eta,q)$ як поліном від τ має m коренів τ_s^+ з додатною дійсною частиною, а решту — з від'ємною [2]. Позначимо

$$L^+(x,t,\xi,\delta,\tau,q) := \prod_{s=1}^{m}(\tau - \tau_s^+)$$

та вимагатимемо виконання такої умови (умови Лопатинського):

G_2) для довільної точки $(x,t) \in S_T$, довільного $\xi \in R^{M(2m-1)}$ та δ — довільного вектора з дотичної до $\partial\Omega$ у точці x площини при виконанні умов $q \geq -\tilde{\nu}|\delta|^{2m}$, $0 < \tilde{\nu} < \nu(|\xi|)$ та $|q| + |\delta| > 0$ поліноми B_j від τ лінійно не залежні за модулем полінома L^+ від τ.

Нехай для функцій у правих частинах задачі (1) – (3) мають місце включення

$$f \in L_p(Q_T), \quad g_j \in W_p^{\left(2m-m_j-\frac{1}{p},1-\frac{m_j}{2m}-\frac{1}{2mp}\right)}(S_T), \quad j = \overline{1,m},$$
$$h \in W_p^{\left(2m,-\frac{2m}{p}\right)}(\Omega) \tag{6}$$

та умови узгодженості

C) $G_j(x,0,h,\ldots,D^{m_j}h) = g_j(x,0), \quad x \in \Omega, \quad j = \overline{1,m}.$

Зведення досліджуваної задачі до задачі з однорідними початковими умовами. Стандартним чином (див. [9]) можна побудувати функцію $v \in W_p^{(2m,1)}(Q_T)$, що задовольняє умову

$$v(x,0) = h(x), \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

За допомогою заміни $u_1 = u - v$ від задачі (1) – (3) можна перейти до задачі

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha^{(1)}(x,t,u_1,D^1u_1,\ldots,D^{2m-1}u_1)D^\alpha u_1 -$$
$$- F^{(1)}(x,t,u_1,D^1u_1,\ldots,D^{2m-1}u_1) = f^{(1)}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{8}$$

$$G_j^{(1)}(x,t,u_1,\ldots,D^{m_j}u_1) = g_j^{(1)}(x,t),\ (x,t) \in S_T,\ j = \overline{1,m}, \tag{9}$$

$$u_1(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{10}$$

де

$$a_\alpha^{(1)}(x,t,u_1,D^1u_1,\ldots,D^{2m-1}u_1) =$$
$$= a_\alpha(x,t,u_1+v,D^1(u_1+v),\ldots,D^{2m-1}(u_1+v)),$$

$$F^{(1)}(x,t,u_1,D^1u_1,\ldots,D^{2m-1}u_1) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=2m} \big(a_\alpha(x,t,u_1+v,D^1(u_1+v),\ldots,D^{2m-1}(u_1+v))-$$

$$- a_\alpha(x,t,v,D^1v,\ldots,D^{2m-1}v)\big)D^\alpha v+$$

$$+ F(x,t,u_1+v,D^1(u_1+v),\ldots,D^{2m-1}(u_1+v))-$$

$$- F(x,t,v,D^1v,\ldots,D^{2m-1}v),$$

$$f^{(1)}(x,t) = f(x,t) - \widetilde{L}[v],$$

$$G_j^{(1)}(x,t,u_1,\ldots,D^{m_j}u_1) = G_j(x,t,u_1+v,\ldots,D^{m_j}u_1+v) - \widetilde{B_j}[v],$$

$$g_j^{(1)}(x,t) = g_j(x,t) - \widetilde{B_j}[v],\ j = \overline{1,m}.$$

Крім умов F_1), F_2), G_1), G_2) для задачі (8) – (10) будуть розглядатись такі умови:

F_3) функції $a_\alpha(x,t,\xi)$, $F(x,t,\xi)$ мають усі неперервні частинні похідні по змінних ξ_β до другого порядку включно, $F(x,t,0)\equiv 0$;

F_4) оператори

$$\{a_\alpha(\cdot,\cdot,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u), a_{\alpha\beta}(\cdot,\cdot,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u),$$

$$F_\beta(\cdot,\cdot,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u)\} : W_p^{(2m,1),0}(Q_T) \to W_p^{\left(1,\frac{1}{2m}\right)}(Q_T)$$

неперервні та обмежені;

G_3) при кожному фіксованому j функція $G_j(x,t,\zeta)$ має усі неперервні частинні похідні по змінних η_β до порядку $2m-m_j+1$ включно, $G_j(x,t,0)\equiv 0$;

G_4) оператори

$$G_{j\beta}(\cdot,\cdot,u,\ldots,D^{m_j}u) : W_p^{\left(2m-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2mp}\right),0}(S_T) \to W_p^{\left(2m-m_j-\frac{1}{p},1-\frac{m_j}{2m}-\frac{1}{2mp}\right)}(S_T)$$

неперервні та обмежені.

Коректність зведення задачі (1) – (3) до задачі (8) – (10) обґрунтовується такими двома лемами (наводяться без доведення).

Лема 1. *Нехай для задачі (1) – (3) виконано умови (4) – (6), F_1) ,F_2), G_1), G_2) та умови узгодженості C), а $u \in W_p^{(2m,1)}(Q_T)$ — розв'язок крайової задачі (1) – (3). Тоді:*

i) функції $a_\alpha^{(1)}(x,t,\xi)$, $F^{(1)}(x,t,\xi)$ задовольняють умови F_2) (з деякою функцією $\nu^{(1)}$, можливо, відмінною від ν), F_3), F_4), а функції $G_j^{(1)}(x,t,\zeta)$ задовольняють умови G_2), G_3), G_4);

ii) для функцій $u_1(x,t), f^{(1)}(x,t), g_j^{(1)}(x,t)$ *виконано включення*

$$u_1 \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T), \qquad f^{(1)} \in L_p(Q_T),$$

$$g_j^{(1)} \in W_p^{\left(2m-m_j-\frac{1}{p},1-\frac{m_j}{2m}-\frac{1}{2mp}\right),0}(S_T), \quad j = \overline{1,m}.$$

Лема 2. *Нехай виконано умови леми 1, а* $u_1 \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$ *— розв'язок крайової задачі (8) – (10). Тоді функція* $u(x,t) = u_1(x,t) + v(x,t)$ *— розв'язок крайової задачі (1) – (3).*

Зведення однорідної квазілінійної задачі до нелінійного операторного рівняння. Отже, замість задачі (1) — (3) можна аналізувати розв'язність задачі

$$\widetilde{L}[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x,t,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u)D^\alpha u-$$

$$- F(x,t,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u) = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{11}$$

$$\widetilde{B_j}[u] = G_j(x,t,u,\ldots,D^{m_j}u) = g_j(x,t), \ (x,t) \in S_T, \ j = \overline{1,m}, \tag{12}$$

$$u \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T), \tag{13}$$

де функція F задовольняє умови $F_2) - F_4)$, функції G_j задовольняють умови $G_2) - G_4)$, а для функцій f, g_j справедливі умови

$$f \in L_p(Q_T), \qquad g_j \in W_p^{\left(2m-m_j-\frac{1}{p},1-\frac{m_j}{2m}-\frac{1}{2mp}\right),0}(S_T), \quad j = \overline{1,m}. \tag{14}$$

Задачі (11) – (13) співставимо нелінійний оператор, який означимо за допомогою рівності

$$\left\langle Au,\phi\right\rangle := \frac{1}{p}\frac{d}{ds}\Bigg[\left\|\widetilde{L}[u+s\phi]-f\right\|_{p,Q_T}^p +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \left(\left\|\widetilde{B_j}[u+s\phi]-g_j\right\|_{p,S_T}^{\left(2m-m_j-\frac{1}{p},1-\frac{m_j}{2m}-\frac{1}{2mp}\right)}\right)^p\Bigg]\Bigg|_{s=0}. \tag{15}$$

У формулі (15) $\{u,\phi\} \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$, а під $\left\langle Au,\phi\right\rangle$ розуміється дія функціонала Au на функцію ϕ.

Основні властивості оператора, означеного за допомогою (15), наведено у теоремі 1.

Теорема 1. *Нехай для задачі (11) – (13) виконано умови (4), (5), (14),* $F_2) - F_4)$, $G_2) - G_4)$. *Тоді:*

i) для довільної фіксованої функції $u \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$ Au *є лінійним неперервним функціоналом над простором* $W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$;

ii) оператор A *обмежений, неперервний та задовольняє умову* $(S)_+$ *на* $W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$.

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 1 з [10].

Задачі (11) – (13) можна поставити у відповідність операторне рівняння

$$Au = 0, \qquad u \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T), \tag{16}$$

оператор у якому означений за допомогою (15).

Теорема 2. *Нехай для задачі (11) – (13) виконано умови (4), (5), (14),* $F_2) - F_4)$, $G_2) - G_4)$. *Функція* $u \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$ *є розв'язком задачі (11) – (13) тоді й лише тоді, коли вона є розв'язком рівняння (16).*

Доведення теореми аналогічне доведенню теореми 2 з [10].

Отже, дослідження крайової задачі (11) – (13) можна звести до дослідження операторного рівняння (16).

Виконання для оператора A, означеного за допомогою (15), умови $(S)_+$ дозволяє запроваджувати для нього таку цілочислову характеристику, як ступінь відображення.

Теорема 3. *Нехай для задачі (11) – (13) виконано умови (4), (5), (14),* $F_2) - F_4)$, $G_2) - G_4)$, *а оператор* A *означений за допомогою рівності (15). Тоді для довільної скінченної відкритої множини* D *з простору* $W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$ *такої, що*

$$Au \neq 0, \quad u \in \partial D,$$

можна коректно означити ступінь відображення $\mathrm{Deg}\,(A, \overline{D}, 0)$.

Розв'язність досліджуваних задач. Використання апріорних оцінок, отриманих у роботах [1, 2, 11], методів теорії ступеня відображення [8] та схем доведень з роботи [9] дозволило отримати для задач (1) – (3) та (11) – (13) твердження про розв'язність, наведені у даній частині роботи.

Теорема 4. *Нехай для задачі (11) – (13) виконано умови (4), (5), (14),* $F_2) - F_4)$, $G_2) - G_4)$. *Тоді розв'язок задачі (11) – (13) єдиний, якщо він існує.*

Наслідок 1. *Нехай для задачі (1) – (3) виконано умови (4) – (6),* $F_1)$, $F_2)$, $G_1)$, $G_2)$ *та умови узгодженості* $C)$. *Тоді розв'язок задачі (1) – (3) єдиний, якщо він існує.*

Теорема 5. *Нехай для задачі (11) – (13) виконано умови (4), (5), (14),* $F_2) - F_4)$, $G_2) - G_4)$, *а* K — *деяке додатне число.*

Тоді існує додатне число T_0, *залежне від* K, *але не залежне безпосередньо від функцій у правій частині задачі, таке, що задача (11) – (13) має розв'язок* $u \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$ *при* $0 < T < T_0$, *якщо*

$$\|f\|_{p,Q_T} \le K, \qquad \|g_j\|_{p,S_T}^{\left(2m-m_j-\frac{1}{p},1-\frac{m_j}{2m}-\frac{1}{2mp}\right)} \le K, \quad j = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Наслідок 2. *Нехай для задачі (1) – (3) виконано умови (4), (5), (6),* $F_1)$, $F_2)$, $G_1)$, $G_2)$, $C)$, *а* K — *деяке додатне число.*

Тоді існує додатне число T_0, залежне від K, але не залежне безпосередньо від функцій у правій частині задачі, таке, що задача (1) – (3) має розв'язок $u \in W_p^{(2m,1)}(Q_T)$ при $0 < T < T_0$, якщо

$$\|f\|_{p,Q_T} \leq K, \quad \|g_j\|_{p,S_T}^{\left(2m-m_j-\frac{1}{p},1-\frac{m_j}{2m}-\frac{1}{2mp}\right)} \leq K, \quad j = \overline{1,m},$$
$$\|h\|_{p,\Omega}^{\left(2m-\frac{2m}{p}\right)} \leq K. \tag{18}$$

Включимо крайову задачу (11) – (13) у параметричну сім'ю задач

$$\widetilde{L_\tau}[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha|=2m} a_{\alpha,\tau}(x,t,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u)D^\alpha u-$$
$$- F_\tau(x,t,u,D^1u,\ldots,D^{2m-1}u) = \tau f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{19}$$
$$\widetilde{B_{j,\tau}}[u] = G_{j,\tau}(x,t,u,\ldots,D^{m_j}u) = \tau g_j(x,t),\ (x,t) \in S_T,\ j = \overline{1,m}, \tag{20}$$
$$u \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T), \tag{21}$$

де

$$a_{\alpha,\tau}(x,t,\xi) := a_\alpha(\tau,x,t,\xi),\ \tau \in [0,1],\ (x,t) \in Q_T,\ \xi \in R^{M(2m-1)},$$
$$F_\tau(x,t,\xi) := F(\tau,x,t,\xi),\ \tau \in [0,1],\ (x,it) \in Q_T,\ \xi \in R^{M(2m-1)},$$
$$G_{j,\tau}(x,t,\xi) := G_j(\tau,x,t,\zeta),\ \tau \in [0,1],\ (x,t) \in S_T,\ \zeta \in R^{M(m_j)},\ j = \overline{1,m}.$$

Припустимо, що для $|\alpha| \leq 2m$

$$a_\alpha(x,t,\xi) = a_{\alpha,1}(x,t,\xi),$$
$$F(x,t,\xi) = F_1(x,t,\xi), \qquad G_j(x,t,\zeta) = G_{j,1}(x,t,\zeta),$$

де $a_\alpha(x,t,\xi)$, $F(x,t,\xi)$, $G_j(x,t,\zeta)$ — функції з лівої частини рівняння та крайових умов задачі (11) – (13).

Теорема 6. *Нехай функції $a_{\alpha,\tau}(x,t,\xi)$, $F_\tau(x,t,\xi)$ та усі їх похідні по змінних ξ_β до другого порядку включно неперервні за сукупністю змінних $\tau \in [0,1]$, $(x,t) \in Q_T$, $\xi \in R^{M(2m-1)}$, а $F_\tau(x,t,0) \equiv 0$.*

Припустимо, що для кожного фіксованого $\tau \in [0,1]$ функції $a_{\alpha,\tau}(x,t,\xi)$, $F_\tau(x,t,\xi)$ задовольняють умови F_2), F_4).

Нехай при кожному фіксованому $j \in 1,\ldots,m$ функція $G_{j,\tau}(x,t,\zeta)$ та усі її похідні по змінних ζ_β до порядку $2m-m_j+1$ включно неперервні за сукупністю змінних $\tau \in [0,1]$, $(x,t) \in S_T$, $\zeta \in R^{M(m_j)}$, а $G_{j,\tau}(x,t,0) \equiv 0$.

Припустимо, що для кожного фіксованого $j \in 1, \ldots, m$, $\tau \in [0,1]$ *функція* $G_{j,\tau}$ *задовольняє умови* G_2), G_4).

Нехай виконано умови (4), (5), (14).

Будемо припускати, що існує стала $R = R(f, g_1, \ldots, g_m)$, *не залежна від* τ *та така, що при довільному фіксованому* $\tau \in [0,1]$ *для розв'язку* u_τ *задачі (19) – (21) справедлива апріорна оцінка*

$$\|u_\tau\|_{p,Q_T}^{(2m,1)} \leq R. \tag{22}$$

Тоді задача (11) – (13) має єдиний розв'язок $u \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$.

Доведення теореми наведено в [11] (теорема 6.4.4).

Збіжність гальоркінських наближень. Ще одним результатом застосування топологічних методів до квазілінійних параболічних задач є побудова та доведення сильної збіжності послідовності гальоркінських наближень розв'язку.

Означення 1. *Нехай* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *повна система функцій у просторі* $W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$. *Припустимо, що для крайової задачі (11) – (13) виконано умови теореми 5. Для натурального* $\mathcal{K}$ *назвемо* $\mathcal{K}$*-наближеним розв'язком крайової задачі (11) – (13) функцію* $u_\mathcal{K}$ *таку, що* $u_\mathcal{K} = \sum\limits_{k=1}^{\mathcal{K}} c_k^{(\mathcal{K})} v_k(x,t)$ *та* $\langle A u_\mathcal{K}, v_k \rangle = 0$, $k = \overline{1,\mathcal{K}}$, *де* $c_k^{(\mathcal{K})}$ — *дійсні числа, оператор* A *означений за допомогою рівності (15).*

Означення 2. *Будемо говорити, що крайова задача (11) – (13) має обмежену послідовність* $\mathcal{K}$*-наближених розв'язків, коли існує натуральне* $\mathcal{K}_0$ *таке, що для кожного* $\mathcal{K} \geq \mathcal{K}_0$ *задача (11) – (13) має* $\mathcal{K}$*-наближений розв'язок* $u_\mathcal{K}(x,t)$, *а послідовність* $\{u_\mathcal{K}\}_{\mathcal{K}=\mathcal{K}_0}^{\infty}$ *обмежена у просторі* $W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$.

Теорема 7. *Нехай для задачі (11) – (13) виконано умови теореми 5. Крайова задача (11) – (13) має розв'язок* $u_0 \in W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$ *тоді й лише тоді, коли для неї існує обмежена послідовність* $\mathcal{K}$*-наближених розв'язків* $\{u_\mathcal{K}\}_{\mathcal{K}=\mathcal{K}_0}^{\infty}$. *При цьому послідовність* $u_\mathcal{K}$ *сильно збігається до* u_0 *у* $W_p^{(2m,1),0}(Q_T)$.

Доведення теореми наведено у [11] (теорема 6.6.2). Як приклад застосування даної методики розглянемо випадок крайової задачі

$$\widetilde{L}[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \triangle u + \rho(u) = f(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{23}$$

$$u = 0, \qquad (x,t) \in S_T, \tag{24}$$

$$u(x,0) = h(x), \qquad x \in \Omega. \tag{25}$$

Будемо розглядати розв'язок задачі (23) – (25) у соболєвському просторі $W_p^{(2,1)}(Q_T)$. Нехай виконано умови:

i) $p > n + 2$,

ii) межа області Ω задовольняє включення $\partial\Omega \in C^2$.

Припустимо, що функція ρ задовольняє такі умови:

$\rho_1)$ функція ρ має усі неперервні частинні похідні по змінній u першого порядку, $\rho(0) \equiv \equiv 0$;

Нехай для функцій у правих частинах задачі (23) – (25) мають місце включення:

$g_1)$ $f \in L_p(Q_T)$, $\quad h \in C^2$ та умови узгодженості;

$g_2)$ $h\mid_{\partial\Omega} = 0,\ x \in \partial\Omega$.

За допомогою заміни $u = h(x) + u_1$ від задачі (23) – (25) можна перейти до задачі

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \triangle u_1 + \rho_1(u_1) = f_1(x,t), \qquad (x,t) \in Q_T, \tag{26}$$

$$u_1 = 0, \qquad (x,t) \in S_T, \tag{27}$$

$$u_1\mid_{t=0} = 0, \qquad x \in \Omega, \tag{28}$$

де

$f_1)$ $f_1 = f - \widetilde{L}[h],\ f_1 \in L_p(Q_T)$;

$u_1)$ $u_1(x,t)$ задовольняє включення $u_1 \in W_p^{(2,1),0}(Q_T)$;

$\rho_1)$ функція $\rho_1(u)$ має усі неперервні частинні похідні по змінній u першого порядку, $\rho(0) \equiv 0$.

Задачі (26) – (28) співставимо нелінійний оператор, який означимо за допомогою рівності

$$\big\langle Au, \phi \big\rangle := \frac{d}{ds}\Bigg[\Big\|\frac{\partial(u+s\phi)}{\partial t} - a^2\triangle[u+s\phi] + \rho_1(u+s\phi) - f_1\Big\|^p_{p,Q_T} + \\ + \left(\big\|[u+s\phi]\big\|^{\left(2-\frac{1}{p},1-\frac{1}{2p}\right)}_{p,S_T}\right)^p\Bigg]\Bigg|_{s=0}. \tag{29}$$

У формулі (29) $\{u,\phi\} \in W_p^{(2,1),0}(Q_T)$, а під $\big\langle Au,\phi\big\rangle$ розуміємо дію функціонала Au на функцію ϕ.

Згідно з теоремою 1 оператор A, означений за допомогою рівності (29), має такі властивості:

1) для довільної фіксованої функції $u \in W_p^{(2,1),0}(Q_T)$ A є нелінійним неперервним функціоналом над простором $W_p^{(2,1),0}(Q_T)$;

2) оператор Au обмежений , неперервний та задовольняє умову $(S)_+$ на $W_p^{(2,1),0}(Q_T)$.

Задачі (26) – (28) можна поставити у відповідність операторне рівняння

$$Au = 0, \quad u \in W_p^{(2,1),0}(Q_T), \tag{30}$$

оператор у якому означений за допомогою (29). Згідно з теоремою 2 рівняння (29) еквівалентне задачі (26) – (28). Записаний більш детально оператор A, означений у формулі

(29), має вигляд

$$\left\langle Au,\phi\right\rangle := \int\limits_{Q_T}\psi_p\left[\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\triangle u+\rho(u)-f\right]\left[\frac{\partial \phi}{\partial t}-a^2\triangle \phi+\rho(\phi)\right]dxdt+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi_p\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial\gamma}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial\varphi}-\frac{\partial \phi}{\partial\gamma}\right)\frac{d\varphi d\gamma}{|\varphi-\gamma|^p}+$$

$$+\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{2\pi}\psi_p[u]\phi d\varphi+\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{2\pi}\psi_p\left(\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}d\varphi+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^T\int\limits_0^T\psi_p[u(\varphi,t)-u(\varphi,\tau)]\phi(\varphi,t)-\phi(\varphi,\tau)\frac{dtd\tau}{|t-\tau|^{p-\frac{1}{2}}}, \tag{31}$$

де $\psi_p(s) = s|s|^{p-2}$.

Зручність обрання базису простору $W_p^{(2,1),0}(Q_T)$ фактично визначає зручність наближеного розв'язання рівняння (30), а отже, задачі (26) – (28) у випадку конкретно заданої області.

Розглянемо, зокрема, випадок, коли область Ω — коло у просторі R_2 радіуса l.

Оберемо повну систему простору $W_p^{(2,1),0}(Q_T)$ у вигляді

$$v_{n,m,k} = \left\{\left\{t^m\ J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}r\right)\ \cos\varphi n\right\}_{m,n\ge 0}^{k\ge 1}\right\}\ ,\ \left\{\left\{t^m\ J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}r\right)\ \sin\varphi n\right\}_{m,n\ge 0}^{k\ge 1}\right\}, \tag{32}$$

$$u_K = \sum_{m,n\ge 0,k\ge 1}^{K} t^m\ J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}r\right)\ \left(A_{mnk}\cos\varphi n+B_{mnk}\sin\varphi n\right), \tag{33}$$

де $J_n\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{l}r\right)$ — функція Бесселя першого роду n-го порядку.

Завдяки тому, що функція Бесселя на межі області Ω перетворюється в 0, з формули

(31) дія оператора A, означеного за допомогою (30), набуває вигляду

$$\left\langle Au_K, v_{nmk} \right\rangle := \int\limits_{Q_T} \psi_p \left[\frac{\partial \Bigl(\sum\limits_{m,n\geq 0,k\geq 1}^{K} c_{mnk} v_{mnk} \Bigr)}{\partial t} - a^2 \triangle \left(\sum_{m,n\geq 0,k\geq 1}^{N} c_{mnk} v_{mnk} \right) + \right.$$

$$\left. + \quad \rho \left(\sum_{m,n\geq 0,k\geq 1}^{K} c_{mnk} v_{mnk} \right) - f \ \right] \left[\frac{\partial v_{mnk}}{\partial t} - a^2 \triangle v_{mnk} + \rho(v_{mnk}) \right] dxdt. \tag{34}$$

Розв'язування системи нелінійних рівнянь $\left\langle Au_K \right\rangle = 0$ з невідомими c_{mnk} можна замінити процедурою мінімізації функціонала (34):

$$\sum_{m,n\geq 0,k\geq 1}^{N} (\langle Au_K, v_{mnk} \rangle)^2 \longrightarrow \min .$$

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
2. *Солонников В.А.* Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1967. — **102**. — С. 137 – 160.
3. *Худяев С.И.* Первая краевая задача для нелинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. — 1963. — **149**, № 3. — С. 535 – 538.
4. *Кружков С.Н., Кастро А., Лопес М.* Оценки шаудеровского типа и теоремы существования решений основных задач для линейных и нелинейных параболических уравнений // Там же. — 1975. — **220**, № 2. — С. 277 – 280.
5. *Soltanov K., Sprekels J.* Nonlinear equations in nonreflexive Banach spaces and strongly nonlinear differential equations // Adv. in Math.Sci. and Appl. — 1999. — **9**, № 2. — P. 939 – 972.
6. *Крылов Н.В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. — М.: Наука, 1985. — 376 с.
7. *Amann H.* Linear and quasilinear parabolic problems. Vol I. Abstract linear theory. — Basel: Burkhäuser Verlag, 1995. — 335 p.
8. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990. — 448 с.
9. *Kartsatos A.G., Skrypnik I.V.* A global approach to fully nonlinear parabolic problems // Trans. Amer. Math. Soc. — 2000. — **352**. — P. 4603 – 4640.
10. *Романенко І.Б.* Зведення загальних нелінійних параболічних крайових задач до операторних рівнянь // Нелінійні коливання. — 2000. — **3**, № 3. — С. 400 – 413.
11. *Романенко І.Б.* Топологічні характеристики загальних нелінійних параболічних задач: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. — Київ, 2001. — 157 с.

Одержано 13.06.2002